BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
LVI
G
71
NAPOLI

LVI.
G
71

Digitized by Google

VIII. D. 16

Digitized by Google

115. C.1

Digitized by Google

PHILOSOPHIÆ RECENTIORIS

A BENEDICTO STAY

IN ROM. ARCHIGYMN. PUBL. ELOQUENTIÆ PROFESS.

VERSIBUS TRADITÆ

LIBRI X

AD SILVIUM VALENTIUM

CARDINALEM AMPLISSIMUM

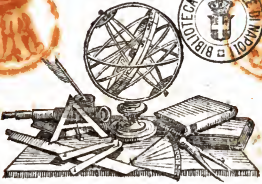
CUM ADNOTATIONIBUS, ET SUPPLEMENTIS

P. ROGERII JOSEPHI BOSCOVICH S. J.

IN COLLEGIO ROM. PUBL. MATHESEOS PROFESS.

TOMUS I.

BIBLIOTECA NAZIONALE DI NAPOLI



ROMÆ MDCCLV.

TYPIS, ET SUMPTIBUS
NICOLAI, ET MARCI PALEARINI
PRÆSIDUM FACULTATE.

Digitized by Google

LECTORI STUDIOSO

ROGERIUS JOSEPHUS BOSCOVICH S. JESU.

HABES, *amice Lector, Benedicti Stay celeberrimi viri, ac mecum non communis patriæ tantummodo, & communium conſanguineorum vinculo, ſed arctiore veteris amicitiæ, & quotidianæ fere conſuetudinis nexu conjunctiſsimi, Recentiorem Philoſophiam verſibus traditam, opus jamdiu expetitum, ac iis omnibus, qui ſimul & latini ſermonis puritate, ac poetica venuſtate, & lepore delectantur, & in intima quædam Naturæ veluti penetralia recepti altioribus phyſicarum rerum contemplationibus aſſueverunt, futurum ſanè & jucundiſſimum, & utiliſſimum; quod tamen quo multo pluribus & adjumento eſſe poſſet, & voluptati, nulli ego quidem aut induſtriæ parcendum duxi, aut etiam labori. Qua de re quo in hoc ipſo limine facilius judicare poſſis, & brevem quandam totius operis imaginem intueri, dicam, quid ipſe ſibi propoſuerit animo, ac re præſtiterit, quid ego in publicum emiſſurus adjecerim.*

Ac primo quidem nihil ſane miraberis, cur Recentioris *nomen Stayanæ huic philoſophiæ in ipſa fronte ſit additum, ſi alterum ejuſdem Auctoris opus, quod undecim ab hinc annis lucem primum aſpexit Venetiis, ac iterum Romæ pluribus auctum, & iterum Venetiis paulo poſt eſt recuſum, in mentem revoces, quod ille quidem tum inſcripſit* Benedicti Stay Raguſini Philoſophia verſibus tradita. *Id quidem opus in ipſo juventutis, vel potius adoleſcentiæ fervore conſcripſit, nondum enim vigeſimum quartum ingreſſus annum abſolverat, & in litterariis patriæ conventibus perlectum, ad amicos, & ad me ipſum in Italiam tranſmiſerat, poſt annos autem aliquot edidit omnium hortatu, eo verò ſucceſſu, quem, qui litteratorum diaria perlegerit, ignorare omnino non poteſt.*

Porro Carteſianas ibidem meditationes potiſſimum amplexus eſt, & per obſoletas nunc quidem multo magis, quam tum eſſent, ſed & tum ſanè multo minus, quam ſuperiore ſæculo, receptas

Digitized by Google

triplicis elementi, & vorticum implexorum hypotheſes, rerum phyſicarum explicationem propoſuit; non quod eum recentiora, & omnino vera Newtoni inventa laterent, quorum ibidem mentionem etiam injecit aliquam, ſed quod hinc quidem plus æquo, & Geometricis impeditum anfractibus, ac abſtruſiſſimorum ambagibus calculorum pene invium iter pertimeſceret, inde vero univerſum Carteſiani ſyſtematis machinamentum poeticis commentationibus aptiſſimum judicaret.

Verum & meis, & Chriſtophori fratris, & amicorum omnium conſiliis aſſidue extimulatus, SILVII *demum* VALENTII CARDINALIS AMPLISSIMI, *hominis de univerſa litteraria republica, ac de omnibus omnino bonis artibus, quas impenſiſſimè fovet benemerentiſſimi, auctoritate permotus, duram admodum, & periculi, ac laboris plenam ſolidioris, abſtruſiorisque philoſophiæ verſibus itidem illuſtrandæ ſuſcepit provinciam, in qua quidem ita ſe geſſit, ut brevi admodum tempore præclariſſima quæque, quæ ad rerum naturalium cognitionem pertinent, Newtoni inventa, & alia ſane quamplurima ſcitu digna, quæ vel ante Newtonum ipſum innotuerant a Galileo in primis, ac Hugenio producta, vel poſt ipſum Newtonum ab aliis ſunt prodita, & ad plenam Naturæ quandam comprehenſionem conducunt, libris decem complexus ſit.*

Quamobrem vel maximam eorum partem, quæ perſequitur, conſideres, & tempora, quibus inventa ſunt, cum Carteſianæ Philoſophiæ exortu conferas, vel ipſum hoc philoſophicum ejuſdem Auctoris opus cum illo priore componas, videbis facile, jure hanc Recentiorem *Benedicti Stay Philoſophiam appellari.*

Jam vero, quod ad methodum pertinet, quam in tanti argumenti amplitudine diggerenda, atque in ordinem redigenda ſelegit, ea eſt ipſa, quæ in Newtoni libris occurrit. Multa is quidem, quæ ad puram etiam Matheſim promovendam pertinent, Geometriam nimirum, atque Analyticam calculorum artem, pluribus in locis propoſuit; at quidquid ad Naturæ cognitionem conducit, id quidem immortalibus illis, & nunquam ſane abſque ultimo Reip. litterariæ interitu perituris ope-

operibus continetur, quorum alterum inſcripſit Philoſophiæ naturalis principia mathematica, *alteri* Opticæ *nomen dedit; in quibus minus illa quidem diggeſta, ſed plena quædam rerum naturalium cognitio vel aperte continetur, vel involuta quodammodo, & altius velut defoſſa deliteſcit.*

Et primo quidem utrobique ſe prodit analytica inveſtigationis ratio ad veritatem detegendam aptiſſima. Primum enim in priore opere metaphyſicæ quædam ideæ evolvuntur in ipſo primi libri exordio, ac vocum ſignificationes explicantur, tum generales Naturæ leges & vulgo cognitæ, atque receptæ, & facili inductione comprobandæ proponuntur, ac faciliora aliquot, atque utiliora conſectaria deducuntur. Succedit univerſa motuum ſcientia, quorum leges ipſo etiam Ariſtotele teſte ad cognitionem naturæ perneceſſarias, ejus enim eſt effatum illud, ignorato motu Naturam ignorari neceſſe eſt, *toto primo, ac ſecundo libro complectitur. Et primo quidem motus in ſpatio non reſiſtente factos contemplatur viribus vel ad certum punctum tendentibus undique, atque id ipſum ſive quietum, ſive motibus translatum quibuſcumque, quod ad Aſtronomiam mechanicam in primis iter aperuit mortalibus omnibus ante ipſum omnino impervium, vel ad omnes ingentis maſſæ particulas directis, quod in Telluris figura, ac in gravitatis inæqualitate determinanda, potiſſimum autem in explicandis proprietatibus luminis uſum habet ingentem; ſecundo vero ipſam etiam medii reſiſtentiam adjungit, & fluidorum naturam, ipſorum vel æquilibrium, vel celeritatem, & incurſum, vel undas ad ſoni rationem explicandam perneceſſarias, vel vorticum indolem ad convellendas a fundamentis carteſianas hypotheſes miro ſane artificio perſequitur, atque evolvit.*

Hiſce conſtitutis tertio Cælum ipſum libro conſcendit, & primo loco propoſitis philoſophandi regulis, tum præcipuis cæleſtium motuum legibus a Keplero in primis per aſtronomicas obſervationes detectis, e phœnomenis ipſis, eorum ope, quæ de motuum legibus jam in primo demonſtraverat libro, virium leges derivat, ex quibus univerſa mundani ſyſtematis pendent

phænomena, gravitatem nimirum generalem, & mutuam; ac decreſcentem eadem lege, qua ea, quæ dicimus diſtantiarum quadrata, augentur. Ea per analyſim detecta, inde per ſyntheſim cæleſtia omnia phœnomena, & ipſas aſtrorum, ac Lunæ in primis aberrationes implexas admodum ipſos Cometarum curſus tam varios multo accuratius determinat, quam per obſervationes aſtronomicas præſtari poſſit; quibus pleraque, quæ ad hanc noſtram Tellurem pertinent, conjunguntur, ut illa uſque adeo quondam abdita, & tantis tot ſæculorum laboribus necquidquam inveſtigata, nunc autem demum ab ipſo uno patefacta, & in publicam producta lucem æſtus marini cauſa, atque alia ejuſmodi ſane multa.

At in poſteriore illo Optices opere miram lucis radiorum naturam, nemini cognitam ante ipſum, diverſorum indolem coloratorum quorundam veluti filorum, ex quibus albus luminis radius contexitur, diverſam ipſorum ſuſcepti itineris retinendi vim, quam diverſam refrangibilitatem, & reflexibilitatem *appellant, diverſas facilioris reflexionis, & facilioris tranſmiſſus vices, ac ipſarum vicium diverſa intervalla, ex quibus omnibus mira ſane facilitate deducitur, quidquid vel ad variabiles, vel ad permanentes, conſtanteſque corporum colores pertinet, & vero etiam internum ipſum eorundem corporum textum ita per obſervationes incredibili quadam dexteritate inſtitutas exhibuit, & in apertum poſuit, ut jam de iis hominem ſatis in Naturæ contemplatione, ac inſtrumentorum uſu verſatum pudere debeat, ſi dubitet.*

Atque hæc ſane ea ſola ſunt, de quibus jam ita conſtat, ut non per vagas quaſque, & verſatiles, ut ita dicam, explicationes, confuſa quædam rei ſummæ ratio reddi poſſit, ſed ſingularia phœnomena definiri, calculo ſubjici, prænunciari in anteceſſum. De reliquis, quorum ejuſmodi minus diſtincta quædam habetur cognitio, cujuſmodi ea ſunt omnia virium genera, a quibus cohæſiones pendent, compoſitiones, fermentationes, efferveſcentiæ, diſſolutiones, præcipitationes, ut ajunt, atque alia ejuſdem generis, quæ ad chymicam potiſſimum artem pertinent, in ipſius operis fine quæſtionibus adje-

adjectis eſt perſecutus, ubi & in prima materiæ elementa, & in corporum compoſitionem primariam inquiſivit, & ſuam ſubdubitanter quidem, ſed tamen ſatis apertè ſententiam prodidit.

Iis omnibus abſolutis, & veluti perluſtrato Naturæ regno, in ipſum oculos Auctorem Naturæ convertit demum, cujus Omnipotentiam, Sapientiam, Providentiam, ac Bonitatem deprædicat.

Atque hæc ipſa fere eſt methodus, qua Noſter ſuam hanc recentiorem philoſophiam pertractat. Libris decem univerſum opus continetur, cujus ternos quoſque prioribus ego tibi tribus tomis exhibeo, quartum addicens poſtremo libro, & indici ſatis amplo. Et prioribus quidem tribus hiſce libris metaphyſicas inprimis notiones evolvit, de ſpiritu diſputat, & corpore, ac generales omnes materiæ proprietates perſequitur adjecta olim cognitis illa, quam actionum, & reactionum æqualitatem appellant, & gravitate generali, quam tamen hìc quidem in Telluris tantummodo ſuperficie contemplatur. Cæleſtem autem gravitatem illam mutuam, & generalem inſequentibus tribus evolvit libris, tribus vero reliquis, quidquid ad luminis proprietates pertinet, ac demum poſtremo chymicos effectus, & prima corporum elementa, primò quidem juxta Newtoni ſententiam, tum juxta meam quandam e Newtoniana quidem exortam, ſed ipſi Newtonianæ admodum deinde contrariam, exponit, & ad ipſum Naturæ Opificem contemplandum aſſurgit.

Porro quid ſingillatim in hoc primo tomo contineatur, ex adjectis patet ſingulorum librorum argumentis, ubi primò quidem de Mente, ac de Materia initio libri primi agit Noſter, de noſtrarum idearum natura, atque indole, de ſpatio, ac tempore, de variis proprietatum materiæ generibus, tum expoſitis philoſophandi regulis, generales ipſas materiæ proprietates quaſque perſequitur, impenetrabilitatem, extenſionem, figurabilitatem, ut vocant, aliaſque ejuſmodi, vim in primis inertiæ, & varia virium activarum ipſam inertiæ vim determinantium genera, ac motus inde ortos, & illos ipſos, qui viribus ad certum punctum tendentibus, quas centrales *dicunt,*

centripetas, *atque* centrifugas, *peraguntur ſatis multis exponit. Secundi libri initio illam, quam actionis, & reactionis æqualitatem vocari diximus, tum reliquo libro ipſo, ac libro tertio gravitatem hanc noſtram Terreſtrem multo pluribus perſequitur. Agit autem de præcipuis quibuſque Galilei inventis, de aſcenſu nimirum, ac deſcenſu libero gravium, de parabolico obliquo projectorum motu, de deſcenſu per plana inclinata quælibet, quibus addit, quæ pertinent ad deſcenſum per curvas lineas, ubi & Hugenianum illum cycloidis iſochroniſmum exhibet, & præcipua quæque, quæ ad pendulorum oſcillationes ſpectant, diligentiſſime demonſtrat, ipſam vero Lectori ſuo ſectionum Conicarum indolem, ipſam cycloidis naturam, & geometricas quaſque, ac mechanicas ipſius proprietates proponit ob oculos, quibus omnibus abſolutis gravitatem demum conſiderat in locis a ſe invicem disjunctis & directione, & niſu diverſam, ac in ejus diſcriminis conſectaria, globoſam nimirum Telluris formam, & pendulorum iſochronorum inæqualitatem inquirit.*

In iis autem alia identidem argumenta occurrunt plura, ad quæ opportuna quapiam occaſione arrepta digreditur, ut ad corporum colliſiones ex actionis, & reactionis mutuæ æqualitate, ad vires vivas ex quadruplo aſcenſu gravium ſurſum cum dupla velocitate projectorum, ad fluidorum reſiſtentiam ex inæquali motu gravium in aere retardatorum, ad horologiorum vitia, remedia, uſum in primis in longitudine geographica determinanda, atque inde ad longitudinem ipſam & latitudinem ex pendulorum theoria, ad eas, quas Geometræ infiniteſimales methodos appellant, & ipſum differentialem calculum, atque integralem ex deſcenſu gravium per curvas lineas quaſcumque, ad ipſos curvarum linearum diverſos ordines, & diverſa genera ex cycloide, ut alia ejuſmodi leviora prætercam, quæ in ipſis librorum argumentis incurrunt ſponte in oculos.

Secundus tomus, qui totus, ut monui, in generali gravitate, & ejus conſectariis impenditur, primo quidem in ipſo quarti libri initio Lunæ gravitatem in Terram cum hac noſtra comparat Terreſtrium corporum, tum generali Mundi ſyſtemate expoſito Keple-

Kepleri leges proponit; & earum ope Planetarum omnium gravitatem in Solem, ac ſecundariorum in primarios deducit, ejuſque legem determinat, cui Cometarum ipſorum curſus tam varios parere docet. Inde ad mutuæ gravitatis argumenta petita ex Planetarum figuris, e Jovis, ac Saturni, & utriuſque Satellitum perturbationibus in acceſſu, ac aliis ejuſmodi, gradum facit, quibus analyſim ſuam abſolvit, detecta natura, & legibus gravitatis generalis ipſius.

Analyſi autem abſoluta ſyntheſim aggreditur, & puncti in omnia vel ſphæricæ ſuperficiei, vel ſphæræ ſolidæ puncta attracti vim conjunctam definit, cujus magnitudine definita, minorum corporum attrahentem vim a gravitate in Tellurem univerſam ita velut abſorberi demonſtrat, ut ſenſum omnem effugiat; tum, quæ ad Telluris figuram pertinent, & quæ ad gravitatem in aliis Terræ locis alio agentem niſu, evolvit. At quod ad Telluris figuram pertinet per dimenſiones inveſtigatam, quinto exponit libro, ubi ad aeris figuram gradu facto de ipſius gravitate, de denſitatis progreſſione, ſermonem inſtituit, unde ad Solarem atmoſphæram, & ejus cum terreſtri noſtra commixtionem, ac Boreales Auroras inde ortas digreditur; tum ad noſtram ipſam Terreſtrem atmoſphæram redux de ſoni natura ex aeris ipſius elaterio & denſitate pendentis breviter agit. Inde vero ad Planetarum denſitates ac maſſas fit tranſitus; ac ad ipſorum, & Cometarum actionem in Solem, ad mutuas eorundem perturbationes, ad ſyſtema trium corporum in ſe invicem gravitate mutua attractorum, ubi in ipſas Lunæ inæqualitates diligenter inquiritur.

Et hæc quidem omnia habentur libro quinto: tum ſexto agitur de Lunaris faciei poſitione ad Terram, de illa, quam æquinoctiorum Aſtronomi præceſſionem appellant, de maris æſtu, atque æſtu ſimili aeris, ubi occaſione arrepta de ventis, tum de atmoſphæra cæterorum Planetarum, ac Lunæ in primis, de Cometarum atmoſphæris, & caudis, & de iis, quæ Telluri a Cometis timenda eſſe poſſint. Demum, quæ contra generalem gravitatem proferri ſolent argumenta Noſter diſſolvit, & vorticum theoriam impugnat, quibus hic ſecundus tomus abſolvitur.

Digitized by Google

Tertius autem tomus illa exhibet, quæ ad lucem pertinent. Septimo nimirum libro in propagationem ipſius ac tenuitatem inquiritur, in reflexionem, refractionem, ac coloratorum radiorum diviſionem, & diverſam naturam, ac mixtionem multiplicem. Octavo libro primo quidem de reflexionis, tum de refractionis conſectariis eſt ſermo, de lævium videlicet ſpeculorum focis, de diſperſione radiorum e ſcabris ſuperficiebus, ut etiam e Planetis, ac Terra, de Iridis natura, & Coronis. Lentium autem vitrearum natura expoſita de oculi forma, & viſione agitur, ac multiplici teleſcopiorum & microſcopiorum apparatu. Nonus liber miras illas in primis perſequitur vices facilioris tranſmiſsùs, & facilioris regreſsùs, ac omnia colorum phœnomena inde orta, tum in ipſam inquirit naturam luminis, & proprietatum ſingularum cauſas exponit, ubi & de illa agit, quam difractionem appellant, de luminis actione in ſenſus noſtros, qua & coloris idea, & vero etiam caloris excitatur, de apparenti lumine, ubi caput concutitur, de peculiaribus in Chryſtallo Islandica luminis proprietatibus quibuſdam, ac de aliis nonnullis agitur eodem ſpectantibus.

Decimo demum libro, ut monui, de viribus aliis, quæ in minore diſtantia agunt, & de iis potiſſimum, quæ chymicos effectus edunt, fuſius aliquanto habetur ſermo, tum de principiis corporum, ubi mea quædam theoria fuſe exponitur, cujus ope admodum facile & generales omnes, & peculiares pleræque corporum proprietates explicantur. Eam ego pluribus jam locis propoſui, & hic in hoc primo tomo in ſupplementis ad lib. 1, num. 9 ejus ideam quandam ingeſſi. Tum vero ad Auctorem demum Naturæ aſſurgitur, ut ſupra innui.

Porro quanta ſit hujus argumenti ubertas, quanta difficultas, nemo non videt. Neque enim Noſter primis tantummodo ſumma quæque delibat labris, quod vel Algarottus, vel Volterius præſtitit, ſed ad intimam ubique medullam uſque ſe inſinuat, & geometricas ipſas demonſtrationes nonnunquam perficit, ſæpiſſime autem omnia demonſtrationum elementa proponit, fere ſemper theoremata quæque, & conſectaria enunciat. Quod quidem cum latino ſemper ſermone præſtet puriſſimo, in-

ter-

terdicto ſibi quovis cujuſcumque, a Veteribus optimæ notæ auctoribus non adhibitæ, vocis uſu, ut ſanè poetam decet, ac poetico lepore condiat; patet profectò ſi ſola ejuſmodi prodirent carmina; demptis epiſodiis quibuſdam venuſtioribus, quibus potiſſimum in exordio, & in egreſſu ſingulorum librorum Lectorem detinet, iis tantummodo futurum uſui opus ipſum, qui & Latinæ poeſeos apprime gnari, & Philoſophicis etiam arcanis initiati ad lectionem accederent. Quid vero, quod cum veritatum, quarum aliæ ab aliis derivantur, demonſtrationes, ac nexus, plerumque & complicatiſſimas geometricas demonſtrationes, & calculos initos aliquando requirant; fieri omnino non poteſt, ut veritatem propoſitam Poeta evincat, ut nexum illum ponat ob oculos, in quo maxima pars philoſophicæ contemplationis eſt ſita?

Hæc cum ego mecum animo reputarem, utrique incommodo facile occurri poſſe ſum arbitratus. Primo quidem, ſi verſibus ipſis argumentum ſubjicerem amplum illud quidem, & quanta maxima fieri poſſet cum perſpicuitate propoſitum, quod artis vocabula, & ſolutam adhibenti orationem longe facilius fore, nemo non videt. Ita lectorem in phyſicis etiam omnino rudem præparari quodammodo videbam poſſe, qui ibidem de re tota edoctus venuſtatem ipſam carminis, veritatis enunciandæ jam compos, deguſtaret. Idcirco verſibus ipſis adnotationes adſcripſi, in cujuſvis paginæ fine, in quibus Lectorem de re tota, de qua agitur, quanta maxima cum perſpicuitate ſimul, ac brevitate liceret, commonerem, ubi a quovis aut algebraico calculo, aut geometrico ſchemate conſulto abſtinui, Lectori conſulens utriuſque vel ignaro penitus, vel parum admodum gnaro. Porro adnotationibus iiſdem, & meam aliquando de ipſa re ſententiam, in metaphyſicis potiſſimum, a Noſtri Auctoris ſententia diſcrepantem indicavi, & alia, quæ forte occurrerent notatu digna, vel quæ Lectoris intereſſet, ut ipſi ſuggererem, diligentiſſime ſemper ſum perſecutus.

Hæc quidem in adnotationibus ipſis, tum in tomi cujuſque fine quædam, quæ ſupplementa appellare libuit, adjeci, in quibus Geometram jam alloquor, Geometriæ peritum, atque Arithmeticæ,

ticæ, Trigonometriæ non penitus imperitum, & in algebraicarum notarum ſignis adhibendis exercitatum. Ibi quæcunque Noſter propoſuit, quæcumque indicavit theoremata, problemata, conſectaria, accuratiſſime demonſtranda, ac ſolvenda ſuſcipio, & alia plura, quæ inde derivari poſſunt, vel quæ ſcitu digna ad propoſitum argumentum pertinent, diligentiſſime perſequor. Sunt autem in iis ſane multa, tum quæ ad metaphyſicas meditationes, tum quæ ad Phyſicas inveſtigationes pertinent, mihi quidem omnino nova, ac eorum, quæ jamdiu vulgo ſunt nota, nova plerumque methodus, & novæ demonſtrationes, contractioreſque, in quibus illud mihi ubique propoſui, ut ea ipſa, quæ abditam admodum, atque ſublimem analyſeos infinitorum cognitionem poſtulant, quam quidem, cum fructu ſane maximo ad Newtoni doctrinam illuſtrandam, promovendamque uſurparunt identidem in doctiſsimis commentariis ſuis ſummi viri, mihique amiciſsimi Thomas le Seur, & Franciſcus Jacquier, ſublimiſsimorum quorumcumque, ubicumque occurrerent, enodatione ſuſcepta, quantum fieri poſſet, ad communiorem geometricam methodum redigerem, & minus etiam provectis, minus exercitatis conſulerem. Horum autem ſupplementorum ope confido fore, ut Lector nihil adhuc, vel fere nihil in Philoſophicis initiatus, labore exiguo omne hoc Philoſophiæ genus, & in primis præcipua quæque præclariſſima Newtoni inventa abunde perdiſcat, & Auctorem deinde noſtrum cum longe majore & fructu, & voluptate percurrat.

Quoniam autem poſtremo libro meam paucis ab hinc annis in lucem editam, necdum ſatis pervulgatam Phyſicæ generalis theoriam amplectitur, & illuſtrat, hic in ipſo limine, ubi de metaphyſicis agitur ideis, quidquid mea hæc ipſa theoria peculiare habet ex metaphyſica, diligenter exponendum cenſui, ne ſuo divulſa loco, obſcuritatem deinde parerent, & confuſionem.

Et id quidem de adnotationibus, ac ſupplementis hiſce meis, in quibus philoſophicum ſermonem adhibui, vocabulis uſus omnibus, quæ a Philoſophis paſſim nunc temporis adhiberi ſolent, licet minus latina ſint, perſpicuitati nimirum in re tam implexa,

at-

atque difficili potius indulgens, quam venuſtati ſermonis importunæ, ubi & adnotationes meas appellavi notas *uſitato, ac breviori vocabulo. Supplementorum autem ipſorum argumenta etiam, titulis quibuſdam breviſſimis expreſſa initio cujuſque tomi collecta ſimul collocavi idcirco, ut unico tibi intuitu patere poſſet, quid mihi in iis pertractandum ſuſceperim; longiora itidem ſingulorum librorum argumenta ab ipſo Auctore noſtro diggeſta, quo minus itidem imparatus ad lectionem accedas, initio Tomi cujuſque libros eoſdem continentis propoſui. Longiorem demum epiſtolam, quam Chriſtophorus Stayus Noſtri frater, ad ipſum tranſmiſit, in qua multa de hoc in primis philoſophiæ genere, ac de ipſius fratris conſilio, & eleganter, & eruditè diſputat, quod idem olim præſtiterat epiſtola priori illi Carteſianæ philoſophiæ operi præfixa, huic primo tomo præfigendam cenſui, quod eam itidem & utiliſſimam tibi fore ſum arbitratus, & jucundiſſimam.*

Illud unum ſupereſt, ut te rogem; quoniam & præpropera typorum correctio, & nimis exigua litterularum magnitudo menda reliquerunt in adnotationibus potiſſimum, & ſupplementis aliqua, quæ ſenſum omnino turbare poſſent, ipſorum errorum indicem in fine adjectum mature conſulas, & correctionem adhibeas.

Fruere igitur laboribus hiſce meis, atque conſiliis, ſi forte ſucceſſum habuerint; quod ſi fato quodam ſecus acciderit, animum ſaltem tui ſtudioſiſſimum commenda, vires incuſa tanto operi nimirum impares. Vale.

CHRI-

CHRISTOPHORI STAY
AD
BENEDICTUM FRATREM
EPISTOLA.

Edditus eſt Liber mihi tuus, in quo Philoſophiam, eam præſertim, quæ a Nevvtono traditur, verſibus complexus es; quem quidem & cupidiſſime excepi, & ſemel atque iterum maxima cum voluptate perlegi. Quid enim mihi gratius eſſe poteſt, quam cura jam omni, ac diuturni laboris moleſtia te eſſe perfunctum? aut quid me magis delectet, quam ea tibi feliciter, atque ex animo proceſſiſſe, quæ, ut ſuſciperes, auctor ego tibi præcipuus fuiſſem? Nam eam quidem video additam eſſe rebus omnibus elegantiam, atque ornatum, quem a te, cujus mihi in ſcribendo facultas ſatis eſt cognita, exoptare maxime potuiſſem Huc accedit, quod omnem hanc Philoſophiæ pertractationem uberiorem profecto, quam aut ego expectabam, aut ipſe receperas, præſtitiſti; remiſſius enim acturum te putabam, neque ea tam facile traditurum, quæ nimia ſepta eſſent explicandi difficultate. Nunc omnia fuſe, copioſeque perſequutum eſſe te video, nihil ut fere in ſumma rerum obſcuritate aut ſit prætermiſſum, aut a carminum cultu, atque humanitate detractum. Ain vero? Pergin tu Muſas, omnino ut ſapiant, adigere? miror equidem illas tantopere morigeras eſſe factas, atque a riſu, ac joco, ad tantam ſeveritatem traductas. Sed opportune actum eſt a te, qui leniore primi de Carteſiana Philoſophia operis argumento, quo facilius obſequi vellent, cum ſemel induxeris, fræno velut jam recepto, quocumque libuerit, impellis, ac moves. Quapropter tibi me plurimum, ac fere æque mihimetipſi gratulor. Noſti

enim,

enim, quamdiu a te flagitarim, ut, cum in tradendis illius doctrinæ rationibus, quæ a Carteſio eſt inſtituta, non mediocrem legentium comprobationem eſſes conſequutus, eo loci minime conſiſteres, animumque ad Nevvtonianam etiam Philoſophiam verſibus exornandam adjungeres. Tametſi enim ſuperioris operis non inelegantem ſcribendi rationem, venuſtatemque ſatis agnoſcerem, deſiderabam tamen probatioris diſciplinæ delectum, ne cum te ad ſcribendum contuliſſes, idereris ſententias ſequutus eſſe hujuſmodi, quæ Muſarum ingenio magis eſſent accommodatæ, quam veritati, judicioque Naturæ. Neque vero magnopere me movebat ſumma rerum difficultas, ac magnitudo: Sperabam enim, quæcumque a communi carminum conſuetudine remota, aut aliena etiam viderentur, te diuturno jam uſu paratiorem facile aſſequuturum. Itaque cum rem aggreſſus eſſes, experiendi magis, ut ipſe ajebas, voluntate, quam perficiendi ſpe, putabam nos, ſi non omnem ſolidam, atque expreſſam, at hujuſmodi certe habituros illius doctrinæ formam, quæ & rebus,& verſibus conveniret. Verum hoc minime inficior, me nunquam arbitratum eſſe, in his etiam verſari ut velles, quæ in Geometriæ involucris, atque in tanta rerum obſcuritate deliteſcerent. Nam neque tuæ, neque cujuſquam facultatis eſſe exiſtimabam, ut univerſam motuum doctrinam, quam Mechanicam vocant, Keplerianas leges, tam varios ac tam impeditos Lunæ curſus, atque alia hujuſmodi, quæ a Gravitatis vi promanant, illa item, quæ lucis, & colorum naturam continent, enunciare, ac verſibus expolire valeat. Quæ cum omnia perfecta jam a te, atque abſoluta eſſe videam, poſſumne illud tibi ominari, quod in ſcribendo propoſitum nobis habere minime quidem debemus, tamen ſi conſequamur, libenti animo excipere ne Sapientes quidem vetant, ut quantum operæ ac vigiliæ tam diuturnus labor attulit, tantum legentium ſecunda comprobatio afferat jucunditatis. Si enim eorum, quæ mandantur litteris, ab ipſa difficultate aliqua repetenda eſt laus, affirmare profecto auſim, ex quo Poetarum artificia extiterunt, a nemine unquam

quam difficilioris rei pertractandæ curam eſſe ſuſceptam. Verum quæ hominum eſt, ſive in aliorum expendendis laboribus iniquitas, ſive in judiciis ferendis varietas, facile accidet, ut, quæ mihi ad commendationem valere plurimum videantur, eadem plerique arripiant ad reprehendendum. Erunt enim fortaſſe nonnulli, qui tam accurate res tam difficiles verſibus pertractandas eſſe non arbitrentur, moremque Neoptolemi in hoc ſcribendi genere ſervari potiſſimum oportere, dicant, ut moderatius, ac levius ſit philoſophandum; tenuiorem eſſe Muſarum habitum, quam ut valentioris doctrinæ vim ſuſtinere poſſint; præſcripta enim eſſe vocabula, & quaſdam veluti diſciplinæ formulas, quæ rerum vim, poteſtatemque duntaxat declarare valeant; has autem arcendas eſſe a carminibus, ac prorſus repudiandas, propterea quod quæ a venuſtate, ac numeris omnino abhorreant; ita ſi perſequi illa etiam velimus, quæ ab intima philoſophia hauriri ſolent, cum eadem per ſe ſatis aſpera ſint, atque impedita, poſſe ea quidem quaſi mollitie enervari carminum, augeri, atque illuſtrari non poſſe. At qui ita ſentiunt, nimium anguſtis terminis ampliſſima Poetarum ſtudia definiunt. Quæ enim erit tanta artis hujus inopia, atque infirmitas, ſi primos tantummodo poſſit aditus, ac ſumma rerum veſtigia perſequi, majoribus autem doctrinis, ac gravioribus enunciandis nulla ſit facultas, atque copia? Sed hujus quidem judicii iniquitas redarguenda re ipſa eſt a te potius, quam verbis a me refellenda. Quanquam enim tua cum legerem, & exornari numeris res a te agnoverim, atque ipſo ſplendore, ac varietate carminis in claritate, ac luce collocari, idque ut confirmarem, pluribus e locis repetere exempla poſſem, tamen ne gratiæ aliquid tribuere videar, nihil quidem de te ipſe amplius, at de univerſo potius hoc ſcribendi genere ea dicam, quæ ſentio. Ac primum hoc facile conceſſerim Muſas profecto delicatioris cujuſdam eſſe faſtidii atque offenſionis, ut ſolemnes quaſdam diſciplinæ formulas reſpuant; quis enim ferat, ut in carminibus duplicatas rationes, ac triplicatas,

tas, areas temporibus proportionales, atque alia hujuſmodi uſurpemus? Verum quæ ſuis enunciare nominibus ob elegantiorem dicendi modum minime audemus, an eadem ut aliter efferamus, omnis interclusus eſt locus? Nullane alia erit ratio, qua hæc verborum aſperitas leniri, ac moderari poſſit? quæque ob inamœniorem quandam ſpeciem conjungi cum numerorum venuſtate nequeant, nullo pacto eadem illuminare, ac diſtinguere valeamus? Atqui ſcimus Poetis ſuum eſſe loquendi morem, quo ipſi omnia & comiter, & jucunde, clare item, & dilucide exhibent; pollere enim illos formis quibuſdam, ac ſimulacris, quibus res ita conveſtiant, atque illuſtrent, ut eaſdem pene contrectare manibus, atque uſurpare oculis videamur. Neque vero hæc ſimulandi, efformandique ratio tantummodo in grandioribus argumentis, velut in motibus animi metu, ac terrore concitandis, adhibenda eſt, ut cum in fabulis Oreſtem inducunt agitatum furiarum tædis ardentibus, aut Philoctetem, ac Prometheum vi doloris miſere ejulantem, aliaque hujuſmodi flexanima, atque ad ægritudinem, ac mœrorem declarandum aptiſſima. Latius patet hæc effingendarum imaginum ratio, atque ad res etiam, quæ nullam habent animi perturbationem, exprimendas æque convenire poteſt. Quid enim eſt tantopere a ſenſibus, vitæque conſuetudine abductum, quid tam aſperum, tam impeditum, quod ſimulacra ejuſmodi minime recipiat? Quare ſi hunc ſimilitudinum, ac ſpecierum uſum ad ſeveriores etiam doctrinas traducimus, ſi res quaſque colorare, effingere, animare, oculis ſubjicere poſſumus, quæ, malum, eſt iſta judicii perverſitas, ut tenebras claritati ac luci anteponamus? Nonne enim tum excitatur animus, ac movetur acrius, & ſignorum hujuſmodi præſidio, quæ obſcuriora ſunt, etiam videt, ac percipit clarius, quam ſi ſolemnibus vocabulis, uſitatoque loquendi more indicarentur? Nam ſi aliquam a Philoſophia accerſitam, ſive ex ipſa Geometria ſententiam proponere mihi velis, quæ quidem uſitatis verbis horridius dici ſolet, ut ſi ſolida ſimilia

in ratione triplicata laterum homologorum eſſe dicas ; num idem minus intelligam, ſi liberalius hiſce tuis verſibus exponatur?

Nec tibi prætercam, ſimiles quæcumque figuræ
Si creſcunt, vel ſi major collata minori eſt,
Creſcere plus ipſa facie molemque, locumque,
Majoremque magis multo diſtendier intra ;
Nam facies tantum, qua longa eſt, lataque creſcit
Menſura duplici ; debetur terna ſed ipſi
Moli, quandoquidem pariter procurrit in altum.
Propterea ſi ſint ſimili conſtructa figura
Horrea noſtra tuis, ſed pariete quæ magis alto
Claudantur decies ; centum frons undique major
Partibus excurret ; centum at non partibus iſtis
Ditior ipſe ego ſim, decies ſed denique centum,
Si duro agreſtum placata labore, boumque
Utraque complerit flavis Ceres horrea donis.

Aut ſi velocitatem eſſe, ut ſpatium diviſum per tempus, in hunc modum exprimas?

exoritur menſura hinc mobilitatis,
Si loca nimirum referas ad tempora, ſic ut
Quo fuerit ſpatium productius, & vice tempus
Mutata fuerit contractius, hoc tibi conſtet
Major mobilitas ; producto a tempore contra
Illa remiſſior exiſtat, ſpatioque minuto ;
Propterea breviore viam qui tempore eandem,
Aut, mage quæ longa eſt, in eodem tempore carpunt,
Præ reliquis laudantur equi, palmamque reportant
Curſores : animos ſpectantum a plauſibus acres
Exacuunt, quatiuntque jubam, inſultantque ſuperbi,
Dum per Olympiacos reſonat victoria campos.

Quæ quidem cum lego, præterquamquod argumentum plane aſſequor, libentius etiam aſſequor ; dum enim ſplendidiora hæc adjumenta ad obſcuritatem amovendam comparantur, rebus etiam accedit hilaritas quædam, ac lepos, quo fit, ut aſpera nitide, jejuna plene, pervulgata novo, ac minus

nus uſitato more dicantur. Illud tamen in hiſce exprimendis ſimulacris præcipue animadverti oportere arbitror, ut moderatior quædam retineatur ratio, atque ad doctrinæ ſeveritatem accommodetur, ne dum graviores diſciplinas perſequimur, diſſolutiorem, quam rerum gravitas poſtulet, effingendi, atque ornandi licentiam conſectemur. Neque enim ingenii luminibus, atque amœniore cultu diſtinguenda ſunt omnia, ſed; qui res deceat, ſervandus eſt modus. Quemadmodum enim in hominum vita venuſtas quædam, atque jucunditas morum pro ſua cujuſque natura, inſtitutoque ineſt, ut non eadem, quæ juvenes deceat, ſenioribus etiam conſentanea ſit, quæque in ſolutiori vitæ genere convenire poſſit, eadem in graviore adhibeatur; ſic in carminum artificiis ſuus eſt rebus quibuſque cultus, nec qui levioribus ſtudiis aptus eſſe poſſit lepos, atque humanitas, idem etiam ſeverioribus doctrinis rite adjungatur. Atque idcirco varia dicendi genera ſunt a Poetis inſtituta, ut de majoribus rebus locupletior ſit oratio, atque ornatior, de tenuioribus autem preſſior, ac ſubtilior. Hinc res publice geſtas, belliqne varios caſus epico verſu illuſtrare illos, ac diſtinguere videmus: Cum autem inſtituere nos, ac docere velint, venuſtum quidem ſervant, at candidum, & moderatum loquendi genus; atque in hac eadem tenuiori inſtituendi ratione cum in faciliore argumento verſantur, nonne alium ſibi proponunt, quem ſequantur, modum, alium, cum in obſcuriore? neque enim quo pacto de rebus ruſticis, ac de agrorum cultu dicunt, eodem etiam difficiliores Philoſophiæ partes pertractare poſſint. At dolemus profecto multa atque eximia tradendæ carminibus Philoſophiæ, exempla ſive hominum, ſive temporum injuria periiſſe; unum tantummodo reliquum eſt, idem tamen locupletiſſimum, ſpecimen Lucretii Poema, quem mihi quidem non tam ipſe potiſſimum imitari velle, atque exprimere videris, quam ab ipſa rerum ſimilitudine rapi pene, ac deferri ad imitationem dicendi. Quid enim convenientius eſt, atque aptius, quam ut ſermo rebus conſentiat, aut quid magis alienum, quam, cum obſcuriores ſententias

tractamus, orationem adhibere inaniter ita exultantem, ut legentium animi ab intelligendi contentione ad nimiam ornatus hilaritatem delabantur? Abunde enim ſatisfactum hic nobis cenſemus, ſi apte omnia, ſi compoſite, ſi ad rem accommodate exponantur. Reliquum eſt, ut eorum etiam reprehenſionibus occurramus, qui paucos difficilioribus Philoſophiæ ſtudiis teneri putant, atque idcirco carminum jucunditatem, quæ ad omnium permovendos animos eſt inſtituta, negant adhibendam eſſe hujuſmodi rebus, quæ ad ſapientium uſum, atque intelligentiam ſint accommodatæ; nam neque hos ea fortaſſe curaturos, quæ ex ipſis fontibus haurire malint, neque indoctos, qui intelligere non poſſint. Ego autem non tam inimicos alienæ induſtriæ eos dixerim, qui nos a ſcribendo abducant, quam hujus ætatis gloriæ invidos, qui paucorum cognitione optimas artes in hac litterarum luce finiant. Quando enim unquam Philoſophia aut a tot ſummis ingeniis exculta, aut majori hominum frequentia celebrata tantopere floruit? M. quidem Antonius is, qui cum L. Craſſo maximam eloquentiæ gloriam eſt conſequutus, pecudis eſſe exiſtimare ſe ajebat, non hominis, cum Græci tantas res ſuſciperent, profiterentur, agerent, ſeſeque videndi res obſcuriſſimas rationem hominibus daturos pollicerentur, non admovere aurem, &c, quid narrarent, attendere. Nonne hoc magis noſtris eſſet temporibus affirmandum, cum Regum ipſorum, populorumque opibus Philoſophiam proferri, atque extendi videmus, & hiſce præſidiis eo uſque perductam eſſe, ut plura nobis in inquirenda natura ſint cognita, quam omnium ſuperiorum temporum diuturnitas viderit? Verum ſi, quæ optima ſunt, eadem a paucis conquirantur, an idcirco etiam erunt a Muſarum cognitione removenda? Quaſi vero ea tantummodo, quæ ludicra, ac leviora ſint venuſtiore hoc ſcribendi genere pertractari oporteat, aut eos, qui ſeverioribus ſtudiis ſeſe dediderunt, bene, ac graviter ab omni humanitate alienos eſſe cenſeamus. Num enim, quia aliunde doctrinas petere ipſi poſſint, idcirco hæc urbaniora contemnent? imo vero eo libentius ad

hæc

hæc confluent, ut unde ante ægritudinem animo contraxerant, inde humaniſſime recreentur. Quapropter quid eſt, quod illos a liberaliori hac jucunditate prohibeamus, niſi forte imitari velimus L. Lucilium; qui ea, quæ ſcriberet, a doctiſſimis legi recuſabat. Nam facete ille quidem, qui neque ab indoctis, quos omnino contemneret, neque a doctiſſimis ſua legi vellet, cum ea ſcriberet, in quibus ſumma profecto eſſet urbanitas, ſed doctrina mediocris. Sed ad hujuſmodi res ſi Muſarum elegantiam traducamus, quæ & graviſſimæ ſint, & ad Sapientium uſum aptiſſimæ, quid cauſæ eſt, cur pauciorum, id eſt doctiſſimorum hominum oculos, atque ora fugiamus? imo ſi nobis eorum, qui noſtra legant, eligendi detur optio, cur non eos præcipue quæramus, quorum judicio, atque auctoritate, quæ tradimus litteris, comprobentur? Malo enim præſtantiam, quam multitudinem legentium. Bene Euripides, qui in tragædiis recitandis Platonem concioni prætulit; quod multo etiam magis nobis eſt quærendum in rebus graviſſimis, atque a populi judicio, ac conſuetudine omnino abhorrentibus; philoſophia enim vulgi teſtimoniis minime ducitur, neque imperitorum conventus, ac plauſus conſectatur, ſed paucis contenta judicibus in ſapientiorum duntaxat comprobatione conquieſcit. Sapientes autem viros non modo libenter excepturos arbitror, ſed haud levem nobis etiam gratiam habituros, cum quæ ipſi cogitant, quæque in doctrinæ quaſi penetralibus deliteſcunt, aliena induſtria ornatiora, ac meliora in lucem proferri videant. Plurima hoc loco & veterum, & recentiorum Philoſophorum judicia colligere poſſem. Sed cum Leibnitium & ſcribendis verſibus dediſſe operam ſciam, & Philoſophiæ numeris explicandæ rationem, conſiliumque laudaſſe, alium neminem noſtræ ſententiæ auctorem, laudatoremque deſidero. Eſt illius ad Drieſchium epiſtola, in qua cum Polignacii elegantiſſimum Poema laudat plurimum, tum vehementer ſe cupere ait, ut Poetarum ſtudia magis, quam hactenus fieri ſolere, ad utilitatem convertantur. Sapienter ille quidem; ſed fortaſſe rationi philoſophandi ſuæ lenocinabatur.

Nos

Nos quidem tantum doctiſſimi viri de illuſtranda Philoſophia judicium ratum, probatumque habeamus; ſed in Philoſophiæ genere ſeligendo veritatis ipſius, atque omnium conſenſu, quam tacito unius ſuffragio moveamur. An erat nobis diu ambigendum, quem potiſſimum ſequeremur, cum Newtoni unius ſummam laudem, atque eorum, quæ ab illo ſunt inventa, incredibilem magnitudinem, ac præſtantiam coſideraremus? Quod Socrati accidiſſe accepimus, ut Græciæ univerſæ teſtimonio ſapientiſſimus judicaretur; idem profecto ſummo viro contigit, ut vivus etiam, ac videns prope Princeps, ac Parens Philoſophiæ merito ſit nuncupatus. Nonne enim in hac naturæ obſcuritate peregrinantes antea, erranteſque tanquam hoſpites diu, multumque pluribus in rebus verſabamur, dum præclara potiſſimum nos illius inſtituta ab erroris pravitate ad germanam, diuque intermiſſam veri quærendi viam reſtitutos quaſi in veritatis domicilium deduxerunt? Quare Ennianum illud Pythii Apollinis ipſi ſuo jure uſurpandum opinor, ut ſeſe eum eſſe profiteatur, unde qui naturæ inveſtigandæ ſtudio teneantur, conſilium expetant,

Rerum incerti, quos ego ex
Incertis certos, compoteſque conſili
Dimmitto, ut ne res temere tractent turbidas.

Magna ſane policebantur Veteres, & qui deinceps ſubſequuti ſunt, alii Philoſophi, cum rerum ſeſe omnium cauſas edituros reciperent, ſed & propter ingenii tenuitatem, & propter viarum aut ignorationem, aut immenſam longinquitatem, quæ magnifice policebantur, præſtare, eoque ipſi pertingere non poterant. Magna eſt enim naturæ amplitudo, infinitus pene rerum numerus, quorum aliæ ſui vaſtitate, atque immenſis ſpatiorum diſtantiis, aliæ parvitate ipſa ſeſe nobis abdiderunt; hujuſmodi autem tum ingentibus, tum exiguis corporibus ſuus eſt ordo ſingulis, ſua vis, motus unumquodque ſuos perficit, ſuis muneribus, officiiſque fungitur; quorum omnium nobis eſt comparanda cognitio, ſi naturæ cauſarumque ſcientiam comprehendere, complectique animo velimus. Sed ubi tantæ cognitionis comparandæ inſtrumenta

atque

atque præſidia ? ſunt corporis ſenſus , ſed breves illi quidem, atque anguſti,quibus ea tantummodo uſurpare poſſumus, quæ prope nos ſunt poſita, atque ad eorundem ſenſuum uſum perceptionemque accommodata. Ulla igitur ſpes erat,ut quiſpiam univerſam naturæ deſcriptionem abſolveret , quando & rei ipſius ſumma eſſet obſcuritas ; nobis autem adjumenta rerum cognoſcendarum omnino deeſſent ? Nam ſi ingenio , ac cognitione ea perſequi velimus, quæ ſub ſenſus minime cadunt commenta magis noſtra, quam res ipſas deſcribemus . Sed plerique vel ingenii æſtu , vel gloriæ cupiditate abrepti , cum omnem rerum formam,atque ordinem tenere ſeſe, ac perſpicere jactarent , ad illa , quæ omnino ignorarent , delabi maluerunt,quam ea quærere,quæ in ſenſus ipſos facile incurrerent . Illi igitur dum initia , primaſque cauſas æquo cupidius conſectabantur , a rebus ipſis , quæ cognoſci quidem poterant , ſi veri inquirendi viis inſtitiſſent , longe aberrabant : Tametſi enim imbecilia noſtra ſint, nimiſque anguſta ingenia, ut cauſas omnes continere poſſint,datus eſt tamen aliquis nobis permultis in rebus veri cognoſcendi locus . Antiquior enim eſt , quam fortaſſe verior querela illa Democriti, in profundo veritatem eſſe demerſam , atque omnia tenebris æque circumfuſa . Sed permagni intereſt , quem in cauſis inveſtigandis curſum inſtituamus, ut primum ſi gradum recte fecerimus , ad maximarum rerum cognitiones pervenire poſſimus , ſin minus, turpiter labamur . Præcipua eſt nobis in eorum , quibus inſtructi ſumus , ſenſuum uſu , atque experientia rerum percipiendarum ſita ratio , primus hic contemplandæ Naturæ quaſi patefactus eſt aditus , hinc ſuſcipiendus ; atque inchoandus eſt labor . Diu , multumque rerum eſt habitus , ac facies pervidenda , ſervandus ordo , converſiones , mutationeſque omnes inveſtigandæ , quid pro diverſo corporum , ac locorum ſitu oriatur , inſpiciendum , quid conſtans in rebus , quid varium ſit , inquirendum . Tum omnis animi contentio eo potiſſimum eſt convertenda , ut videamus , quid aptum inter ſe , convenienſque ſit , aut quid quamque rem rite conſequatur , ut eorum præſidio , quæ probe nobis explorata

ſint ,

ſint, ad eorum etiam, quæ ignorabamus, ſcientiam perveniamus. Quibus quaſi fundamentis poſitis, nequaquam nobis erit expectandum, ut & ſubito intelligamus, quibus e naturæ legibus rerum omnium effloreſcat ordo, ac ipſa rerum initia, ſummoſque ortus aperiamus. Præclare nobiſcum agetur, ſi tot, tantiſque adjumentis ad proximiores tantummodo aſſequendas cauſas inducamur. Eſt enim longiſſima quædam continuatio, cauſarumque ſeries, ut aliæ propius res ipſas attingant, ac gignant, eædem ex aliis ſuperioribus emanent, illæ autem ex iis, quæ proxime antecedunt, atque ita aliæ ex aliis, tanquam ramorum aliorum ex aliis erumpentium propagines, conſequantur, donec perventum ſit ad prima rerum initia, ſummaſque cauſas, velut altiſſimas ſtirpes, unde reliquarum omnium ſeries procreantur, ac fluunt. Quapropter nequaquam nobis continuo ad remotiſſima rerum principia deveniendum eſt, ut per inferiorum deinde, ac ſuccedentium cauſarum ordines ad ultimos rerum effectus perſpiciendos deſcendamus; ſed a rebus ipſis paulatim, pedetentimque ad propinquiores primo cauſas movendus eſt curſus, deinde ad alias, quæ propiores iis ſunt, gradus faciendus, atque ita ad remotiorum etiam ſeriem, colligationemque progrediendum, quoad ingenii noſtri imbecillitas admirabilem tanti ordinis magnitudinem ſuſtinere poſſit. Æquo enim animo conſiſtendum eſt, ubi ad reliqua perſequenda intercluſus eſt aditus inopia præſidiorum. Neque erit, cur noſtra ſpes infringatur, aut langueſcat induſtria, ſi minus omnem cauſarum colligationem perſpicere poſſimus, atque ad ipſa rerum capita, primoſque ortus pertingere, cum magis contentos nos eſſe oporteat, ut aliquantulum progrediamur, modo nulla in quærendo ſit temeritas, nullus error, quam ut longa aberratione defaticati nil proceſſiſſe animadvertamus. Atque utinam hujuſmodi veſtigiis inſtitiſſent, quicumque Philoſophiæ excolendæ operam hactenus dederunt: uberiorem ſane rerum pulcherrimarum ſcientiam haberemus: Nam ſi aliquando cognitus hic fuit optimus philoſophandi uſus, ſæpe tamen, ac diu intermiſſus fuit, aut omni-

omnino neglectus. Baconem a Verulamio doctrinarum omnium ducem, ac magiſtrum hujuſmodi artis, atque ineundæ viæ demonſtratorem quidem fuiſſe ſcimus, minime tamen hanc laudem rerum etiam inventarum gloria cumulaſſe. Eundem inveſtigandi modum Galileus, immortale illud Italiæ lumen cum tenuiſſet, præclariſſimis etiam inventis exornavit; adſcivit enim Geometriam Philoſophiæ præſidium alterum perneceſſarium. Sed fere interciderat aliquandiu præclara hæc Naturæ inquirendæ ratio iterum ad comminiſcendi delapſa licentiam, donec a Newtono reſtituta eſt, atque in ampliorem formam reddita, quam unquam antea obtinuiſſet. Incredibilem enim ille vim, ac præſtantiam addidit iſtiuſmodi inveſtigandi artibus, cum illam etiam adjunxiſſet, cujus ipſe fuiſſet auctor, atque inventor, Infinitorum diſciplinam, qua nihil humana mens majus habet, nihil præclarius, nihil ad res cognoſcendas opportunius. Quapropter mihi quidem non ille tantummodo exquirendæ naturæ commonſtrare viam cæteris, verum etiam expugnandæ quodammodo comparare inſtrumenta, atque admovere machinas videri ſolet. Hinc minime mirum, ſi eo uſque progreſſum vidimus, quo omnes ſimul omnium conatus nunquam antea pertinuerunt. Quamvis enim ille potius partem aliquam Naturæ attigerit, non univerſam perluſtrarit, tamen ab illo mirifice, ac ſingulariter auctam naturæ cognitionem, & noſtra, & quæcumque conſequetur ætas, ſentiet, atque lætabitur. Quanta enim ſubito lux, verique ſpecies enituit, cum eam corporum omnium conjunctionem eſſe declararet, qua ita ſeſe viciſſim omnia pertraherent, ut gravitatis viribus hæc Mundi univerſitas contineretur? Quam ingens inde, ac mirificus earum rerum ordo emanavit, cum errantium ſiderum motus, veris, atque autumni anteceſſiones, accedentis, ac recedentis Oceani æſtus, telluris ipſius figuram, ac conformationem ex una eademque cauſa proficiſci videremus? Quantam vero mentis vim, ingeniique aciem, quantam perſpiciendi eam eſſe celeritatem oportuit, quantam in geometria, atque illa infinitorum doctrina ſolertiam, quæ difficillimas hujuſ-

hujuſmodi, atque obſcuriſſimas corporum vires, quas abdiderat, ac tenebris Natura obduxerat, perſcrutari, ac proferre in lucem poſſet? Neque enim, quæ aliorum corporis cognoſcendorum munerum fuit ratio, eadem etiam indagandæ, ac eruendæ gravitatis par eſſe potuit. Quæ enim eximia excitanda animadverſio eſt, ut extenſa intelligamus eſſe corpora, dividi eadem, ac moveri, at minime penetrari poſſe, atque alia ejuſdem generis complura? Unjuſcujuſque mehercule corporis uſu, & quotidiana oculorum conſuetudine ad hæc cognoſcenda inducimur. Sed Gravitatem ut univerſis inſidere corporibus cognoſceremus, quantus erat rerum ordo perluſtrandus, quantus in ſuperandis, amovendiſque impedimentis ſuſtinendus labor? Permulta quidem exempla repeti poterant ab eorum corporum experimentis, quæ totius terræ ambitu continerentur; ſed illa minime quidem ſatis eſſe poterant, ut rem omnem conficerent. Aliæ erant perluſtrandæ regiones, ubi amplioribus ſpatiis corpora excurrerent, cæli converſiones, atque aſtrorum curſus diligentiſſime conſiderandi, ut ex tot ingentibus, variiſque motibus gravitatis mores perſpicerentur, tantique muneris fides elluceret. Quæ ille cum diu multumque intellexiſſet, cum conſtare omnia cerneret, ſingularumque rerum exemplis, ac teſtimoniis comprobari, tum vero ad cætera corporum officia gravitatis acceſſionem fieri oportere minime dubitavit, ejuſque legibus, tanquam vinculis teneri omnia, ac coaleſcere. Quantus vero hic ſubito rerum omnium conſenſus, confirmatioque extitit, cum tot ignoti antea cæli motus, Lunæ, ac Cometarum incerti omnino, ac varii curſus clariſſime patuiſſent, cumque eaſdem, quas ipſe præſcripſiſſet, germanas eſſe Naturæ leges declararent! Atque hoc quidem ille in converſionibus ſiderum, atque ingentibus hiſce mundi corporibus præſtitit. Quid autem? Num leviora illa, ac minora eſſe cenſemus, quæ in tenuiſſimis radiorum particulis perfecit? nam quid corpore illo, quæ lux dicitur, nobis erat obſcurius? num autem poſtea, quam hæc quoque eſt ab illo pertractata naturæ pars, quid nobis in

ea

ea penitus cognoſcenda claritatis omnino defuit? Subtiliſſimum, ac tenuiſſimum lucis radium dividimus, ac diſpertimur, ſingulis quibuſque partibus quæ ratio, quæ vis inſit, novimus, e quorum admixtione quæ colorum diſcrimina oriantur, quoque e corporum contextu qui redeat color, definimus. Quid denique eſt in minimis his rebus, atque a ſenſuum uſu remotiſſimis, quod non optime ſit nobis cognitum, atque perſpectum? Quibus in omnibus illud mihi mirabilius videri ſolet, haſce res tantas, quæ plurimarum ætatum, & hominum gloriam cumulare, atque exornare potuiſſent, ab uno eodemque Newtono & inventas, & perfectas eſſe. Nam illud quidem cum in omnibus, tum in præſtantioribus rebus quibuſque uſuvenire maxime videmus, ut paulatim ſuos quæque gradus faciant priuſquam abſolutam præſtantiam, maturitatemque conſequantur: atque hinc cum ab aliis primordia, incrementa ab aliis obtinuerint, vix a quopiam, aut ſero certe perficiantur. Sed incredibilis, atque inuſitata quædam ingenii magnitudo iiſdem, quibus cæteri, finibus minime contineri potuit. Quod quidem cum conſidero, ſic mecum ipſe exiſtimo: duos ab omni hominum memoria omnino ſingulares extitiſſe Viros, alterum hunc ipſum Newtonum, Poetarum principem Homerum alterum, quos quidem in diſſimillimis artibus ſimillima laude dignos arbitror. Ante Homerum ſi qui fuerunt poetæ, hujuſmodi certe fuerunt, quales ille in Phæacum, ac Procorum epulis adhibuit. Verum quæ Poematis vis eſſet, ac virtus, quod illuſtrium virorum res geſtas contineret, ornamentiſque omnibus illuſtraret, a nemine quidem antea erat intellectum. Exortus eſt ille, qui fabulam cum inveniſſet, idem ita perfecit, ut legitimi carminis tum primum ſit ars conſtituta. Cujus egregium exemplum cum omnes intuerentur, ſibique ad imitandum proponerent, is optimi Poetæ laudem eſt adeptus, qui propius ab illo abfuiſſet. Nam ſi quiſpiam peculiares aliquas Poematis partes expoliſſe accuratius, ac ulterius protuliſſe videri poteſt, quis tamen aut illum in præcipuis carminis laudibus ſuperavit, aut hanc

ipſam expoliendi, ac exornandi Poematis gloriam ſiquis eſt aſſequutus, non ab illo repetat, aut accerſat? Quid hoc ſimilius eſſe poteſt, atque ad exprimenda Newtoni in Philoſophiam merita aptius? Cujuſnam enim ea laus eſſe poteſt, ut eorum, quæ ab illo ſunt prodita, aut inveniendi laudem occuparit, aut perficiendi gloriam ſibi vindicet? Nam ſi qui gravitatis vires, aut colorum cauſas ab aliis quoque ſaltem conjectura indicatas velint, iis ego, ut multum tribuam, hujuſmodi conjiciendi operam Phæacum carminibus comparo. Quid autem aut in rerum ordine ſtatuendo, aut in cognoſcendis viribus, aut in legibus confirmandis inchoavit quiſpiam, aut vel conjecit quidem? Cum vero præclare inventa ab uno eodemque Nevvtono perfecta, atque abſoluta dicam, nequaquam aliorum gloriæ detractum velim. Quamquam enim plerique etiam, qui illum ſubſequuti ſunt, eas Philoſophiæ partes præclare excoluerint, ornarint, auxerint, tamen quidnam eſt tam eximie ab his adjectum, cujus non ipſe antea quodamodo ſemina jecerit, aut veſtigia apertiſſime commonſtrarit? Is enim in Philoſophia architectus, molitor, effector dicendus eſt, qui, quæ ſumma, ac præcipua erant, invenit, atque abſolvit, cætera item, quæ tenuiora eſſent, adumbravit, ac aliis excolenda reliquit, atque ita idem omnia & inchoaſſe, & perfeciſſe videri poſſit. Atque utinam ab his, qui deinde ad has diſciplinas excolendas ſeſe conferunt, ampla quædam, atque inſignia rebus hiſce, ac rationibus incrementa adjungantur! Sed neſcio, quo pacto accidit in artibus fere omnibus, ac doctrinis, ut cum aliquem excellentem gradum attigerint, eo loci conſiſtant, & non modo non ulterius proferantur, ſed retro plerumque referri ſoleant. Ita fit, ut quemadmodum Homero bene conſtitutæ fabulæ laudem tot ſæculorum comprobatione confirmatam tribuimus, ſic proſpiciamus animo fortaſſe omnium conſequentium ætatum judicio gloriam perfectæ, atque abſolutæ Philoſophiæ Nevvtono tribuendam. Et mihi quidem præſtantior videtur hominis commendatio, qui non leviora quædam ornamenta, ſed Naturæ ipſius vim, atque artificium

per-

perpexerit, nobiſque declararit. Qua quidem in re, illud nobis præcipue propoſitum debet eſſe, ut ex hac magnificentia, ac pulcherrimarum rerum cognitione facile intelligamus tanti operis effectorem, ac moderatorem Deum. Nam bene, ac ſapienter eſt a Bacone de Verulamio traditum, eum, qui minime hunc rerum ordinem intelligeret, ignorare fortaſſe poſſe Rectorem, ac Mundi Gubernatorem Deum eſſe; qui vero in rerum contemplatione omnino eſſet verſatus, qui hunc ornatum præclare noſceret, ac perſpiceret, qui tantam in rebus omnibus convenientiam, conſenſionemque videret, eum præeſſe mundo Dominum dubitare non poſſe. Atque hinc quidem accepimus Nevvtonum, qui unus omnium naturæ opificium eximie, ac ſingulariter pervidiſſet, tantam animo imbibiſſe ſummi Artificis ſpeciem, ut commoveri ſe illius præſenti numine, eumque colere, ac vereri palam præſeferret: felicior quidem, ſi, ut vim religionis, ita etiam illius caſtitatem intellexiſſet. Hoc quidem certum exploratumque eſt naturæ contemplationem religionis, pietatiſque magiſtram, ac ducem ſemper fuiſſe habitam. Quî enim poſſumus cogitatione complecti præcellentem illam, ac præſtantem naturam, cujus dominatu teneri omnia, ac rebus humanis provideri videmus, quin caſte, pieque colendam, atque officiis omnibus demerendam arbitremur; ut hinc (qui præſtantiſſimus eſt Philoſophiæ fructus) virtutum omnium origo repetenda ſit, unde excitamur ad conſtantiam, ad animi magnitudinem, atque omnem vitæ laudem, honeſtatemque perſequendam? Sed rerum pulchritudo jam longius me abripuit, quam provideram. Ea enim eſt hujuſmodi admirabilis Philoſophiæ ratio, ut, cum in ea expendenda ſemel animum defixeris, modum tenere non poſſis; poſteaquam vero eadem a te latinis verſibus eſt reddita, neſcio quomodo jucundior eſt, atque gratior; domeſticam enim quandam laudem continere videtur. Vale.

ARGUMENTUM.

LIBRI PRIMI.

TOtius operis de natura rerum argumentum proponit, mundique Conditorem, & Moderatorem Deum invocat: orat pro incolumitate Silvii Cardinalis Valentii, cui hæc nuncupat; tum eundem alloquitur, ait, ſe philoſophiæ inhæſurum Newtoni, quem laudat, demum faventem, intentumque his perlegendis animum expoſcit. A verſ. 79 Initium facit a rerum in mentes, & corpora diviſione, cum, an alia quæpiam natura exiſtat, ignoremus. A verſ. 95 ad verſ. 114 Inter mentes, vel ſummam Mentem, nempe Deum, vel mentes creatas eſſe, ait; nobis primo veſtigandam eſſe naturam noſtræ mentis, & corporum, inde ad Dei naturam cognoſcendam gradum faciendum. Nos mentis noſtræ exiſtentiam cognoſcere, ejus tamen naturam ignorare, cogitationem non eſſe, niſi unam ex ejus proprietatibus. A verſu 158 non eſſe innatas in animis noſtris ullarum rerum ideas, at rationis vi nos vera a falſis plerumque diſtinguere poſſe ad verſ. 250. Nos a ſingularum rerum ideis univerſales efformare; illas vero acquiri vel per ſenſus, vel per reflexionem ad verſ. 318. Tum agit de conjunctione mentis cum corpore, de libertate hominis, de ſufficienti Leibnitii ratione, quam refellit. A verſ. 379 nos animæ, præter paucas proprietates, innumerabiles alias, naturamque ipſam, cui innitantur, neſcire affirmat; item & corporis; ſenſus enim, quibus corporum notitias haurimus, ad naturam non pertingunt, & pauci ſunt, & imbecilles ad verſ. 480. In corporibus eſſe vim quandam excitandi in nobis ideas ut caloris, frigoris &c. quæ rebus ipſis ſimiles non ſunt, eſſe alias item eorumdem proprietates, quas eſſentiales dicimus, ſed harum perpaucas a nobis cognoſci, quæ hic enumerantur. Ad verſ. 548. Quamvis corporis Naturam cognoſcere non poſſimus, inveſtigationem tamen earum, proprietatum nobis non omittendam. Tum a verſ. 607. de tempore & ſpatio agit; utrumque dividit in abſolutum & relativum: primo ſpatium abſolutum conſiderat, deinde tempus abſolutum, tum ſpatium relativum, poſtremo tempus item relativum. A verſ. 783 ad motum tranſit, pariter tam abſolutum, quam relativum; abſolutum, quem & verum appellat, æſtimari per vires impreſſas, ait ad verſ. 896. Motus diſtinguit in æquabiles, acceleratos, & retardatos, & explicat. Diſtinguit item motum corporis a motu puncti. Numerus punctorum maſſam corporis, ſeu quantitatem materiæ conſtituit, at moles eſt ſpatium externa ſuperficie concluſum. Ex idea maſſæ, & molis oritur denſitatis idea. A verſ. 952 nos quantitatem motus puncti metiri per ſpatium percurſum, quantitatem vero motus corporis per maſſam multiplicatam in ſpatium, ſeu in velocitatem, & tempus, vel demum, poſito eodem, vel æquali tempore, in ſolam velocitatem ad verſ. 972. Qua ratione, & quibus regulis proprietates corporum, & naturæ leges, ſint inquirendæ, quidque ab aliis Philoſophis peccatum ſit in cauſis rerum inveſtigandis. Quia a nobis primæ rerum cauſæ cognoſci non poſſunt, ab effectibus & Phænomenis naturæ ejus leges eſſe inquirendas; tum quonam pacto ex Phænomenis illæ cognoſcantur, & qua ratione Inductio adhibenda, quantoque hæc in hujuſmodi rebus uſui ſit; præcipue tamen tres in naturæ inveſtigatione regulas præ oculis habendas,

das: primam eſſe; eas qualitates corporum univerſales eſſe, quas omnibus convenire experimur: ſecundam; cauſas rerum non plures ponendas eſſe, quam quæ Naturæ phænomenis explicandis ſufficiant; tertiam; effectuum ejuſdem generis eaſdem cauſas eſſe. His rite ſervatis, quamvis certi in ſtatuendis cauſis eſſe non poſſimus, ab errandi tamen periculo plurimum nos abeſſe; hæc omnia ad verſum 1260 exponit. Tum ad proprietates corporum delabitur, eaſque inductione probat, nempe, impenetrabilia, extenſa eſſe, ad figuras omnes, motuſque recipiendos idonea, atque in immenſum diviſibilia. Deinde a verſ. 1425 proprietatem a Recentioribus detectam explicat, nimirum vim inertiæ, quæ corpus conſervat in eodem ſtatu quietis, vel motus uniformis in directum, niſi aliqua vis externa cogat eum ſtatum immutare; exponit hujuſmodi vires ſtatum immutantes, quæ & agentes vocantur, dividit, ac metitur, ad verſum 1515. Tum virium, ac motuum compoſitionem aggreditur tam directam, quam obliquam, ac eorundem reſolutionem. Porro a verſ. 1628 curvilineorum motuum geneſim, & varias proprietates exponit. A verſ. 1690 de viribus centralibus agit, per quas deſcripta curva linea jacet ſemper in eodem plano, quod tranſit per rectam, per quam corpus projicitur, & per centrum virium; & fiunt areæ, ſeu ſectores illius curvæ temporibus proportionales. A verſ. 1828 ſignificationes quarundam vocum, quæ huc pertinent, declarantur; in quo vis tangentialis differat a vi inertiæ, & a vi, quam centripetam appellamus, unde vis centrifugæ nomen, & quid ſit. Nullam eſſe pugnam inter centripetas & centrifugas vires, ait, ut quidam opinantur, eoſque refellit, ad verſ. 1932. Corpus, quod a vi activa ad centrum ſemper urgetur, in eadem curva, quam deſcribit, ſemper perſeverat, neque tum poterit ob continuos impulſus in centrum cadere, in eoque ſiſti. Demum a verſ. 2050 ad verſ. 2069 animadvertendum hoc eſſe ait, ſi corpus vi repellente impulſum a centro fugiat, figuram, quæ deſcribetur, convexitatem centro obverſuram. Concludit poſtremo, ut corporibus, ſic mentibus ſuam videri eſſe vim quandam inertiæ, qua eundem in quo ſunt ſtatum animi conſervare nituntur, niſi extrinſecis quibuſdam viribus dimoveantur, velut variis motibus, ac affectibus, qui tranquilitati noſtræ obſunt plurimum, ac pacatam vitæ rationem perturbare conſueverunt, eoque idcirco, quo maxime nobis opus eſt, ad ſummas nimirum, perenneſque res aſſidua meditatione dirigendi.

LIBRI SECUNDI.

A *Studiorum in Europa præſertim mutationibus incipiens, noſtram ætatem cæteris præfert, & quid in poſterum futurum ſit, conjicit. A verſ. 118 actioni contrariam ſemper, & æqualem eſſe reactionem demonſtrat inductione ad verſ. 208. Nulla re melius hanc legem evinci ait, quam colliſione corporum, de qua hic agit: primo diſtinguit tria corporum genera, dura, mollia, & elaſtica. Nullum corpus perfecte durum, aut molle, aut elaſticum exiſtit. Tum quid debeat accidere in colliſione corporum perfecte mollium, quid in perfecte elaſticorum, conſiderat, demum ad imperfecte elaſtica, qualia revera ſunt corpora, devenit, ad verſum 679. Tum refellit quædam, quæ æqualitati actionis, & reactionis repugnare videri poſſint. A verſ. 727 poſtremam*

ſtremam generalem materiæ proprietatem aggreditur, mutuam nimirum gravitatem, a Newtono primum detectam. In gravitate generali continetur & hæc noſtra terreſtris gravitas, cujus a Galileo leges proditæ; ad verſ. 816. Gravitas continuis impulſibus corpora deorſum pellit, unde tempori proportionalem velocitatem ea cadendo acquirunt; & ſpatium, quod dato tempore percurrunt, eſt dimidium ſpatii, quod conficerent cum velocitate conſtanti in fine deſcenſus acquiſita. A verſ. 879, ſpatia labendo æqualibus temporibus percurſa creſcunt, ut numeri impares, unde deducit, ea eſſe in ratione duplicata temporum, vel velocitatum quibus percurruntur ad v. 981. Si corpus ſurſum projiciatur, ejus motus continuo retardari debet, & ſpatia percurſa uſque ad finem ſunt item ut quadrata temporum, vel celeritatum. Hic occaſionem arripit de viribus vivis agendi, quas multi poſt Leibnizium putant proportionales eſſe maſſæ corporis in velocitatis quadratum ductæ, multi contra negant, æſtimantque maſſa, & velocitate ſimplici conjunctim. Litem hanc penitus tolli debere ait, ut inutilem, cum omnia phænomena a ſola vi inertiæ, & actionibus potentiarum pendeant. A verſ. 1232 corpus ab aliqua vi oblique projiciente, & ſimul a gravitate impulſum curvam lineam deſcripturum eſſe, ait, quam Parabolam dicimus, quæ eſt una e conicis Sectionibus, qua occaſione coni originem, & conicas Sectiones explicat a verſ. 1252, Ellipſim nempe, Parabolam, & Hyperbolam, varioſque uſus earum commemorat ad verſ. 1509, inter quos & eum refert, nempe corpora oblique projecta Parabolam ſuo curſu deſignare, ex quo artem emittendi globos e tormentis bellicis breviter deducit. Hæc omnia vera ſunt, ſi motus fiat in ſpatio non reſiſtente; at offenſio aeris impedimento eſt, ne projectum corpus deſcribat parabolam, ſed potius ad hyperbolam accedat. A verſ. 1523 tranſit ad motum per plana inclinata: hic ſtatim reſolvit vim gravitatis in duas, alteram perpendicularem plano, alteram parallelam; illa ellidi-tur; hæc conſtans corpus deorſum fert cum iis eiſdem legibus, quæ in libero deſcenſu expoſita; hoc tantum diſcrimen hic agnoſcendum, quod ea vis deſcenſum obliquum ſollicitans eſt ad totam gravitatem, ut eſt altitudo plani ad longitudinem; unde duo infert, primum pertinet ad altitudines variatas data longitudine, alterum ad longitudines data altitudine. Infert item a verſ. 1571, quod ubi altitudo planorum inæqualium fuerit æqualis, velocitas in fine erit ſemper eadem, tempus autem, ut longitudo ipſa plani. Effert porro illud Galilei theorema temporis æqualis in deſcenſu per diametrum verticalem globi, & per chordam ejus quamcumque ductam vel ab infima, vel a ſumma diametri ipſius extremitate, ad verſ. 1617. Jam ut ſibi viam ſternat ad oſcillationes pendulorum, in deſcenſum per lineas curvas inquirit, quam ad rem conſiderandam Galileus olim caſu inciderat. A verſ. 1668 igitur demonſtrat, deſcenſum per arcus exiguos circuli, ſed inæquales, non eſſe accurate æquidiuturnum, ut falſo multi crediderunt, atque hujus erroris originem aperit, & quid animadvertendum ſit, docet ad verſum 1731. Ut vero exponat, quæ ratio ſit temporum deſcenſus per chordas & per arcus, incipit a deſcenſu gravium per plura plana inclinata, & inde ad deſcenſum per arcus tranſit, in quas illa plana infinitè minuta deſinere concipiuntur; unde demonſtrat in deſcenſu obliquo per curvam corpus in fine acquirere eandem velocitatem, quam acquireret in libero deſcenſu ex eadem al-

altitudine. Porro a verſ. 1851 duas methodos attingit determinandi leges motus curvilinei; & deducit, in exiguis arcubus vim corpora oblique deſcerentem eſſe proportionalem arcubus reſiduis uſque ad infimum punctum, in quo caſu deſcenſus eodem tempore omnes conficiuntur ad verſ. 1978. Jam ipſum tempus metitur, quo per exiguum arcum ſit deſcenſus, & probat eſſe tempus deſcenſus hujuſmodi ad tempus deſcenſus per chordam, ut eſt quadrans circumferentiæ ad diametrum, quod de majoribus arcubus verum non eſt, in quibus diſcrimen iſtud minuitur, ad verſ. 2041. Demum impares eſſe verſus, imo & ipſam prope veterum Geometriam ad hæc determinanda, & analyſi infinitorum opus eſſe, ait, quam in calculum differentialem, & integralem dividit, earumque rationem quam breviſſime exponit, quantumque per eas profectum ſit, quæque cavere debeamus, ne in errorem inducamur, innuit.

LIBRI TERTII.

Mundi Gubernationem, ac certiſſimas Naturæ leges humanis legibus, & variis rerum publicarum conſtitutionibus, quas deſcribit, longe anteponit, in iiſque veſtigandis unice conquieſcendum nobis eſſe affirmat ad verſ. 171. Hactenus lineam rectam, circulum, Parabolam, in motu gravium inſpexit; nunc infinita, ait, eſſe alia curvarum genera, eas in claſſes diſtribuit; alia Geometrica ſunt, alia Tranſcendentes; ex his unam eligit, quam conſideret, Cycloidem, his nimirum rebus perneceſſariam. Igitur a verſ. 266 Cycloidis geneſim explicat, quæ deſcribitur motu puncti in circumferentia circuli revoluti ſuper rectam lineam. Tum paulum ad ea, quæ ad Cycloidis hiſtoriam pertinent, delabitur, & ad aliquas ejus proprietates ad verſ. 313. Hæ tamen inter alias præcipue ejus proprietates ſunt, ſcilicet grave corpus per eam cadens, quantumvis arcus inæquales ſint, eodem ſemper deſcendit tempore, quod ipſum tempus hic determinatur; & per eam ſit corporis deſcenſus breviſſimus. Tum addit & hoc, corpus ſcilicet per ipſam deſcendens æqualiter ubique ejus arcum premit. Quæ omnia vera ſunt in hypotheſi gravitatis conſtantis, & ſecluſa quavis reſiſtentia. A verſu 420 ad verſum 454 ſi, ut dictum in aſcenſu rectilineo, corpus cum acquiſita in fine arcus velocitate per eundem arcum impellatur, ad eandem aſcendet altitudinem, a qua deſcenderat, & ſi continuetur ille arcus ex alia parte, idem prorſus accidet. His expoſitis tranſit ad oſcillationes pendulorum, in quarum ſingulis vix ulla reſiſtentiæ percipiuntur. Tempus unius oſcillationis in arcu minimo eſt ad caſum per duplam fili altitudinem, ut circuli ſemicircumferentia ad diametrum, & bina inter ſe pendula comparando, quadrata temporum ſunt, ut longitudines pendulorum: at velocitas pendet ab altitudine initii arcus ſupra imum punctum. A verſu 542, quæ ad centrum oſcillationis pertinent, attingit, quo centro præſertim opus eſt, ubi quantum ſpatii corpora libere deſcendendo dato tempore percurrant, inquiritur, & ubi tranſmittenda ad poſteros menſura longitudinum ſunt ad verſ. 626. Inquirit porro, quo artificio pondus filo appenſum oſcillare poſſit in quavis curva propoſita, ut in cycloide, quod obtinetur per curvarum evolutiones, quas breviſſime explicat. Cycloidem ſe ipſam in evolutione generare, docet; unde facilis conſtructio pendulorum in cycloide oſcillationes ſuas, proinde æquidiuturnas,

ab-

Digitized by Google

abſolventium manavit, & eorumdem ad horologia applicatio ad temporis æqualitatem habendam ad verſum 775. Per hujuſmodi pendula ingentem ſpem conceptam fuiſſe, ait, inveniendi longitudines locorum in quarum varias rationes digreditur, ad verſ. 893; ſed ſucceſſus non reſpondit propter agitationem penduli in navi, & propter mutationes longitudinis penduli, ob caloris, & frigoris vices; cui rei tamen non ſimplex adhiberi remedium potuit. Deinde ad gravitatem redit, & quærit, an ipſa in omnibus corporibus æqualis ubique ſit a verſ. 934; eam revera eſſe in omnibus materiæ particulis æqualem probat ex eo, quod corpora omnia in medio non reſiſtente æque velociter deſcendant ad verſ. 1089. Hæc tamen æqualitas in aere ob ejus reſiſtentiam turbatur, ubi de fluidorum differit reſiſtentia, quæ pendet a ſuperficie corporis, ab ejus celeritate, a fluidi denſitate, & tenacitate: ſed difficile eſt tot cauſarum effectus accurate definire. Corpora per fluidum translata, quo denſiora ſunt, hoc minus retardantur a verſ. 1172. Cur lapis in aqua citiſſime fundum petat, idem in pulverem comminutus vix longo tempore deſcendat ad verſ. 1222. Nunc reſiſtentiam medii ob ipſius medii gravitatem conſiderat, ubi de gravitate ſpecifica breviter agendi occaſionem arripit, attingitque quæſtionem de corporis figuræ, utrum ea ad innatationem quidquam conferre poſſit, an ſola partium fluidi tenacitas in cauſa ſit. Tum a verſ. 1335 redit ad corpora inæqualiter per aerem deſcendentia, & inde maſſas, & denſitates æſtimat, & inter ſe comparat ad verſ. 1387. Definit porro, quid ſit centrum gravitatis, & æquilibrii leges exponit, ac ad ſimplicium machinarum genera delabitur, vectem nempe, & ſtateram, cuneum, cochleam, axem in peritrochio, trochleas, & rotas dentatas. Turbari tamen eas æquilibrii leges a funium reſiſtentia, & ab attritu docet a verſu 1500 ad verſum 1582. Jam perſequitur præcipuas centri gravitatis proprietates, quomodo inveniri poſſit hujuſmodi centrum pluribus corporibus commune; tum quædam utiliſſima de eodem theoremata proponit, & demonſtrat. Nunc a verſ. 1727 comparat inter ſe gravitates, quæ ſunt in diverſis terræ locis; earum directionem non eſſe ubique parallelam ait; ubi terræ figuram ad globi formam accedere demonſtrat, & cur difficile ſit invenire, an gravitas inæqualis conſtet in diverſis terræ locis. Qua id ratione per pendulorum vibrationes obſervatum ſit, quæque porro difficultates objectæ, & quomodo ſublatæ ad verſum 1962. Inæqualitatem gravitatis Hugenius & Newtonus non ex obſervationibus, ſed ex theoria ipſa determinarunt. Ille hanc inæqualitatem a vi centrifuga ob diurnum Terræ motum deduxit; Newtonus vero ad eam accuratius determinandam gravitatis generalis mutuæ vires præterea conſideravit. Demum a verſ. 2064 digreditur uſque ad finem ad varias humanarum mentium inæqualitates, atque inclinationes, quæ ortum ducunt a diverſis morum, exemplorum, judiciorum, affectuum conditionibus, iis tamen, ait, Sapientem non moveri, ſed naturæ vi dumtaxat duci, ac rectæ rationi obtemperare.

IN-

INDEX SUPPLEMENTORUM

AD LIBRUM PRIMUM.

§. I.	De corporis, & ſpiritus definitione.	pag. 275
§. II.	De motu materiæ neceſſario.	278
§. III.	De harmonia præſtabilita.	279
§. IV.	De ratione ſufficienti.	*ibid.*
§. V.	De numero ſubſtantiarum ſupra, & infra nos.	284
§. VI.	De ſpatio, ac tempore.	285
§. VII.	De ſpatio, & tempore, ut a nobis cognoſcuntur.	291
§. VIII.	De motu abſoluto, an poſſit a relativo diſtingui.	294
§. IX.	De formulis motus æquabilis.	296
§. X.	De maſſa, mole, & denſitate.	297
§. XI.	De principio inductionis.	301
§. XII.	De diviſibilitate in infinitum.	303
§. XIII.	De vi inertiæ.	307
§. XIV.	De variis virium activarum generibus, & earum effectu.	314
§. XV.	De compoſitione motuum, ac virium agentium ſecundum eandem rectam.	318
§. XVI.	De obliqua motuum, & virium compoſitione, ac reſolutione.	324
§. XVII.	De motibus curvilineis ortis a vi inertiæ conjuncta cum viribus agentibus.	328
§. XVIII.	De motibus curvilineis ortis a vi inertiæ, & viribus activis tendentibus ad datum centrum.	333
§. XIX.	De problemate directo, & inverſo virium centralium.	336
§. XX.	De vi centrifuga.	344
§. XXI.	Cur viribus centripetis perpetuo agentibus, prima projectionis velocitas demum non extinguatur, nec deveniatur ad centrum.	347

AD LIBRUM SECUNDUM,

§. I.	De geometrico quodam vaticinio.	352
§. II.	De corporum colliſionibus directis.	353
§. III.	De motu reflexo.	367
§. IV.	De gravium niſu, & libero deſcenſu.	370
§. V.	De viribus vivis.	373
§. VI.	De conicarum ſectionum natura.	382
§. VII.	De motu gravium oblique projectorum.	386
§. VIII.	De deſcenſu per plana inclinata, & curvas.	390
§. IX.	De infiniteſimalibus Recentiorum methodis.	398

AD LIBRUM TERTIUM.

§. I.	De recta, & variis curvarum generibus.	404
§. II.	De geometricis, & mechanicis proprietatibus cycloidis.	407
§. III.	De pendulorum oſcillationibus, & de curvarum evolutione.	412
§. IV.	De centro æquilibrii, gravitatis, & oſcillationis.	415
§. V.	De dierum inæqualitate, & æquatione temporis.	427
§. VI.	De polaris ſtellæ altitudine pro quavis hora.	429
§. VII.	De remedio dilatationis virgæ in pendulis horologiorum.	430
§. VIII.	De reliquis ad librum III. ſpectantibus, quæ in pluribus notis promiſſa ſunt.	432

POTERIT IMPRIMI

Si iis ita videbitur, ad quos pertinet.

Nicolaus M. de Vecchis Archig. Rom. Rector Dep.

APPROBATIONES

Reverendiſſimi P. M. S. Palatii juſſu legi librum, cui titulus: *Philoſophiæ Recentioris &c.* nec quidquam in eo reperi, quo vel orthodoxa fides imminui, vel boni poſſint mores labefactari. Quem librum dum legerem, veriſſimum illud comperi, quod ait Sophocleus ille Ajax: longum, & immenſum tempus multa promere ignota, ac nihil quidquam eſſe, quod ſperare non poſſis. Quis enim unquam ſuſpicatus eſſet, profundioris philoſophiæ placita, Geometricis difficillimiſque demonſtrationibus præſertim innixa, potuiſſe verſibus comprehendi, tantamque materiæ ſeveritatem tanto muſarum lepore, & venuſtate perfundi. Id cum Clariſſimus Poeta feliciſſime præſtiterit, eam jam nunc illi gratulor gloriam, quam ex tam præclaro opere maximam arbitror poſſe ſibi jure optimo polliceri. Supplementa vero, & Adnotationes, quibus univerſum opus perpetuo illuſtratur, eamdem ſapiunt doctrinam, qua maximus Geometra, ac Philoſophus tam multis apud omnes gentes inclaruit ingenii ſui monumentis. Datum poſtridie Kal. Maii cIↃIↃCCLV.

Michael Angelus Giacomellus SS. D. N. Cappellanus Secretus.

Quod juſſus a Reverendiſſimo S. P. A. Magiſtro, legi Philoſophicum opus Cl. Viri Benedicti Stay, nec meo judicio habet aliquid, quod ſive Religionis ſinceritati, ſive morum ſanctitati adverſetur; tantumque habet elegantiæ, atque doctrinæ, ut quod fieri nunquam poſſe arbitrabar, factum nunc plane videam; ut difficillimæ res ad explicandum, dilucide, pure, latine, ſuaviſſimis verſibus traderentur; & in ſumma vel ſermonis ubertate, & copia, vel carminis nitore, & Poeticæ artis deliciis, doctrinæ rigor, veritas enuntiationum, collectionum ſubtilitas, partium diſciplinæ illius omnium comprehenſio retineretur: quod item de adjunctis illi operi animadverſionibus, & ſcholiis cenſeo alterius viri docti, quibus Phyſicæ inſtitutiones complexus eſt.

Ex Coll. Rom. Prid. Kal. Maii 1755.

Petrus Lazeri Soc. Jeſu.

IMPRIMATUR

Si videbitur Reverendiſſimo Patri Sacri Palatii Apoſt. Mag.

F. M. de Rubeis Patriarch. Conſt. Viceſg.

IMPRIMATUR

Fr. Vincentius Elena Reverendiſſimi P. Mag. S. Pal. Ap. Socius O.P.

PHI-

PHILOSOPHIÆ
LIBER PRIMVS
AD SILVIUM VALENTIUM
CARDINALEM AMPLISSIMUM.

UNDE [a] per immenſos regionum didita tractus
Fulgeat hæc ſpecies vaſti pulcherrima Mundi,
Disjunctæque locis variæ quo fœdere partes
Conveniant, quæ ſint vires per corpora fuſæ,
Et quam multiplici ſe volvant omnia motu,
Aggredior ſuavi diffundens pandere cantu,
Difficilique novas inventa labore per artes,
Hactenus atque adytis doctrinæ incluſa ſeveræ
Primus [b] ad ingenuos Muſarum educere cultus:

[a] Mundi totius machinam expoſiturus, prima hic pulcherrimæ compoſitionis elementa commemorat, materiam per immenſum ſpatium diffuſam, vires, qua variæ ejus partes aguntur, & motus, qui inde proveniunt. Id quidem analogum eſt veterum illorum ſententiæ, qui rerum principia ponebant inane, atomos, & gravitatem atomorum; ſed eam corrigit. Primum enim principium Deum O. M. agnoſcit, & atomorum gravitati vim quandam generaliorem, qua omnes materiæ particulæ in ſe invicem agant, in decimo totius operis libro ſubſtituit.

[b] Profitetur ſe primum hæc carminibus prodere; primus enim omnino univerſam Philoſophiam, ex Newtono potiſſimum depromptam, verſibus latinis tradit, ea etiam complectens omnia, quæ huc uſque ſeverioris doctrinæ incluſa adytis, Geometriæ nimirum

Quippe quid humanas præſtantius, utiliuſque
Illiciat mentes, quam Veri nectare paſci
Largius æterni, cauſas dum viſere, & ortus
Conamur rerum, & toto diſcurrimus Orbe?
Quidve magis ſacro Vatum ſermone feratur
Per gentes hominum varias, memoreſque per annos,
Ingens quam quod opus dia ratione peractum eſt?
[a] O Qui ſtelliferi flammas ſuccendis Olympi,
Qui mare ſubſtratum cælo diffundis, & auras
Mobilitas, terramque ſua compage revincis,
Dum memoranda tuæ monumenta revolvimus artis,
Infer legiferas nos protinus in Rationes,
Per quas & magni jamprimum exordia mundi
Ponebas, cuncta invicto & nunc ordine flectis;
Da Verum effari, æterna quod Mente latebat
Ante ortus rerum, quod deinde per omnia fuſum eſt,
Immiſſumque, vigent per Te quæcumque creata;
Da decus, & ſacros muſarum inferre lepores,
Quos petit ipſa tuis Majeſtas indita geſtis.
Effice at interea, longos ut SILVIUS annos
Floreat egregius fama, & præſtantibus orſis,
Cui vigili hæc nitens inſtauro munera cura:
Hunc licet ILLE [b] ſibi moderando adjunxerit Orbi,
Quo nihil in terris uſquam divinius extat
Legibus, imperio, doctrina, exundat in omnes
Pectore quæ ſacro populos, lumenque profundit;
Ipſe tamen ſæpe ad muſas deducit ab altis
Conſiliis animum, monumentaque docta revolvit,
Rerum etiam arcanas gaudens inviſere cauſas;
Ut poſt naturæ, mundique exempla revertat
Protinus ad proprias magis uſque induſtrius artes,
Atque ita noſtra diu communia commoda condat
Certius, æternis tranſmittens nomina faſtis.
Tuque [c] adeo decus Auſoniæ, quo pulchra vigere

Soſ-

mirum, atque Algebræ myſteriis obducta tradebantur; Geometricas enim ipſas aliquando demonſtrationes perſequitur, curvarum linearum naturam exponit, calculos inſtituit, latino ſemper ſermone puriſſimo uſus, & lepore poetico aſperitatem, atque duritiem emolliens.

a Mundi conditorem, & moderatorem Deum invocat: tum orat pro incolumitate Silvii Cardinalis Valentii, cui totum opus inſcribit.

b BENEDICTUM XIV. P. M. hic innuit, cujus laudes brevi quidem, ſed cumulatiſſimo elogio complectitur.

c Ipſum alloquitur Cardinalem Va-

len-

Soſpite gaudemus ſtudia, ingenuoſque labores,
Excipe, largiri quæ maxima poſſumus ipſi,
Dona diu vigilata tuis hæc, Inclite, juſſis;
Cumque vacat, feſſæque licet brevia otia menti
Reddere, te facilem rationibus adjice veris,
In rerum latebras, & in intima Naturai
Queis adyta irrumpam, longe veſtigia ſervans
Magna Viri [a], cujus vis ignea diſcutit omnes,
Ignea vis animi, qua ſe cumque inſerat, umbras;
Scilicet immenſas per quem diffuſa per oras
Omnem corpoream Gravitas agit undique molem,
Mutuaque in vacuos late ſunt edita tractus
Pondera, quæ terram, mare, ſolem, ſidera verſant;
Per quem etiam vario lux compta colore refulget
Clarior aſſueto, & patitur ſua dia retexi
Lumina. Quid tantis majus, meliuſque repertis?
Quid genus humanum propius Dis admovet ipſis?
Ergo parta ſuo qui talia pectore nobis
Edidit, illuſtrans præclaro munere vitam,
Sectari ſi rite aveo, ſi maxima rerum
Inventa in longos ætatum immittere curſus,
Huc ades, atque tuum ſine ſaltem haud mollibus auſis
Poſſe tenere animum, qui ſemper grandia geſtit
Moliri rerum, & præſtantes volvere curas.
Præſertim cum Te noſter labor auſpice primùm
Creverit, auctifico veluti Jovis imbre rigatus,
Et nunc auſpice Te claram auſit viſere lucem,
Si tua jucundi non olli gratia deſit
Præſidii, tum ſe terris ad ſidera tollet,
Tum mea Cirrhæa decorabit tempora lauro.
Quapropter vigiles ſenſus, vacuamque [b] repoſco,

A 2 Quan-

lentium, qui eum pertimeſcentem tantam argumenti aſperitatem ad hoc ſuſcipiendum opus non modo hortatus eſt, ſed & impulit demum, in quo quam egregie de Rep. litteraria meritus ſit, videbit ſane, qui perleget.

a Newtonum hic innuit, quem ſane indicat, dum exprimit, duo illa præclariſſima ejus inventa, quæ inter omnia ad naturæ inveſtigationem pertinentia ab Orbe condito producta longiſſime excellunt, gravitatem nimirum generalem, qua omnes materiæ partes in ſe invicem tendunt certa lege, ex qua una pendent omnia cæli phænomena, ac luminis naturam infinitis numero diverſorum colorum radiis conſtitutam, quorum utrumque fuſe Noſter perſequitur, ac luculenter exponit.

b Jure quidem vacuam, atque attentiſſimam expoſcit mentem, quam le-

Quantum ferre queant at commoda publica, mentem;
Non me difficiles cogent nam abſiſtere cœpto,
Implexæque viæ, quin omnia diſpiciamus,
Altaque ſubtili ſcrutemur viſcera lapſu.
Principio [a] quicumque ſolent inquirere rerum
Naturam, duplici res ipſas nomine ſignant
Tantum, & ſub geminum late genus omnia cogunt;
Namque aut corpora ſunt, noſtros impellere poſſunt
Quæ ſenſus, ducunt aut unde exordia ſenſus,
Vitaque, quodcumque eſt, quod mens, & ſpiritus audit.
At [b] quod nec corpus, nec mens ſit, cum nequeamus
Scire, quid eſſe queat, multi nihil eſſe fatentur;
Hic veluti quiddam prohiberet, tertia conſtet
Ne natura etiam, aut vario ſors ordine plures;
Quin præſto nobis ſiſtant ſe, & nomina poſcant:
Sed quoniam, anne aliqua in rebus natura ſit ultra,
Prorſus in incerto eſt, quærendique irritus omnis
Eſt labor, idcirco potius neſcire fateri
Par erat, in nihilo quam merſam dicere inani,
Atque inter res, quæ nequeant extare, referre.
Et jam [c], quæ nobis geminarum eſt altera rerum,
Spi-

lector etiam æquus præſtare debet, ſi velit, quæ traduntur, percipere. Illud ſecum reputet: ejuſmodi argumentum verſari, quod ſoluta etiam oratione, & Geometria, atque Analyſi in ſubſidium vocatis, admodum difficulter arripitur. Adhuc tamen & ipſa incredibili Auctoris noſtri perſpicuitate, & mea etiam opella hac, confido fore, ut animum intendenti omnia aſſequi liceat.

a Rerum diviſionem proponit, quas Philoſophi diſtinguunt in duo genera *corpus*, & *ſpiritum*.

Porro rei nomine intelligit ea, quæ poſſunt per ſe ſubſiſtere, ac appellantur ſubſtantiæ completæ. Sunt quædam, quæ nec corpus ſunt, nec ſpiritus, ut per Philoſophos pleroſque Brutorum animæ, quæ a corpore ita pendent, ut cum eo intereant, & ſine ipſo vivere, ac agere non poſſint, & ut ea, quæ ſubſtantiæ accidunt, ac idcirco dicuntur accidentia, ſed de iis in ea diviſione non agit.

b Affirmat nos ignorare, an alia ſubſtantiarum genera habeantur. Jure quidem. Si enim dicatur corpus id, quod noſtros ſenſus afficit, ſpiritus vero vitæ rationalis principium illud, quod poteſt cogitare, & velle, quis affirmare poſſit, non eſſe alia ſubſtantiarum genera, quæ nec cogitare, nec ſenſus noſtros poſſint percellere? Etiam ſi exiſterent, nulla ſane ſe nobis ratione cognoſcenda objicerent.

c Mentem ſummam agnoſcit, quam Deum dicimus, & mentes creatas, quæ aliquando eſſe cœperint.

Porro attingit non omnia quidem, ſed tamen præcipua e divinis attributis ad Dei notionem neceſſariis, quod ſit

Spiritus, aut aliquid ſummum eſt, primumque, quod uno
A ſe habet omne, quod eſt, finiſque & originis expers;
Aut quæ finito productæ tempore mentes
Principium tenuere ſui, vitæque fruuntur
Munere: nos illud Numenque, Deumque vocamus,
Rem ſummam utroque hoc dicentes nomine, & unam.
At [a], quoniam noſtros animos impellere primùm
In vita incipiunt res, quæ ſunt cumque creatæ,
Notitiamque ſui facilem procudere certant
Ante alias, ratio paulatim ſcandere noſtra
Debet ab his ſummam ad Naturam, unde omnia pendent,
Et, veluti vaſti luſtratis undique regni
Finibus, ad magni ſolium nos ſiſtere Regis.
Quapropter noſmet nobis, & corpora circum
Veſtiganda prius: pretium, finiſque laboris
Illud erit, propius Naturæ accedere ſummæ,
Et, quantum fas eſt mortali, agnoſcere Numen,
Aut admirari potius, Dominumque vereri.
At [b] nullam, conſtare queant quæcumque creatæ,
In rebus mentes, niſi noſtram ex omnibus ipſi
Percipimus, quia nos intra ſentimus eandem,
Corpore quæ juncta eſt cum noſtro, animamque vocamus:
Et ſentimus item, quid in interiore receſſu
Rerum agat: ipſa intus nimirum & cogitat, & vult:
At, quia percipimus peragentem hæc intus, an omnem
Perluſtrare datum eſt, & ab omni parte tueri?
An penitus, mentis quæ ſit natura, videmus?
Inde poteſtates etiam, vireſque quot extent,

Qua-

ſit a ſe ipſo, æternus, ac immortalis. An creatæ mentes potuerint eſſe ab æterno, quæſtio eſt apud Philoſophos. Puto non potuiſſe. Quidquid tamen ſit de potentia, novimus eas, quæ creatæ ſunt, aliquando eſſe cœpiſſe. Quare ſatis exprimuntur per id ipſum, & per illud *vitæque fruuntur munere*, quam nimirum non a ſe habent, ſed ab alio acceperunt.

a Cum priorem, & faciliorem creatarum rerum ideam acquiramus (negat enim Noſter innatas ideas, adeoque & Dei ideam ingenitam), jure hìc harum naturam prius inveſtigandam affirmat, ut inde ad cognitionem Dei aſſurgamus.

b Solam inter creatas mentes noſtram a nobis, affirmat, intimo ſenſu percipi, ejus tamen naturam ignorari. Ignoratur ſane potiſſimum, qua ratione in ſe ipſam, qua in corpus agat. Ideas ipſius tantummodo immediate intuemur, & per ideas cætera, e quibus ipſæ ortum ducunt. Quo oriantur pacto, quid ſit, quod eas gignat, immediate intueri non poſſumus, longa, & obſcura ratiocinatione exquirimus.

Quaque ſuos ſolers ratione feratur ad actus,
Qua moveat corpus, quo fœdere juncta ligetur?
Non [a] res ulla quidem præſentior, & tamen ulla
Nota minus non eſt: oculo licèt omnia late
Luſtremus, cælum, terras, pelaguſque profundum,
Tot varias rerum ſpecies, varioſque colores,
Tot mutata locis, variis & corpora formis;
Attamen illum ipſum præſentem haud cernere quimus,
Namque ſuos in ſe obtutus convertere nunquam
Ipſe poteſt, ſibique ex adverſo occurrere, clara
E ſpeculo niſi forte ſui referatur imago.
Anne opus at ſpeculo eſt, poſſit mens unde tueri
Effigiem reflexa ſuam? Reflectitur in ſe
Scilicet, in ſeſeque ſibi redit obvia ſemper,
Nec minus obſcura ſibi ſe in caligine condit.
Hinc [b] qui nil, niſi rem, quæ cogitat, eſſe, putavit,
Mentem, atque ex iſto manare huic omnia fonte,
Prorſus id ille mihi temere arripuiſſe videtur;
Namque ea ſi res eſt, quæ cogitat, uſque neceſſe eſt
Naturam ſervare ſuam; proin cogitat omni
Tempore, quo perſtat revera in rebus; at iſtud
Quis ratione queat nobis oſtendere certa?
Cum laſſata virum ſopor altus membra reſolvit,
Atque papavereo conſperſit lumina rore,
Dulcia non etiam captare oblivia mentem,
Quis vincat, nunquam & requiem, ſuaque otia habere?
Quis neget hoc ipſum proin, quod mens cogitat, ejus
Eſſe facultatem de multis ſcilicet unam,
Propterea ut poſſit facile hoc abſiſtere ab uſu

Inco-

a Oculum comparat cum mente. Is ſe ſine ſpeculo non videt, in ſpeculo videt, ut reliqua omnia: mens ſe ſine ullo ſpeculo per ſenſum intimum videt, adhuc tamen ſibi ignotiſſima eſt,

b Carteſianorum ſententiam, qui mentis naturam in cogitatione ponunt, impugnat, tum quia non conſtat, nos ſemper cogitare, ut in ſomno, tum quia etiam, ſi id conſtaret, poſſet determinari mens ad cogitationem a facultate quadam ſibi adjuncta. Licebit addere & illud. Cogitatio perpetuo mutatur, at eſſentia eſt conſtans, & ſemper eadem. Hæc igitur in illa non conſiſtit.

Utitur Noſter exemplo corporis, quod ſæpe videmus moveri; nec tamen naturam mutare debeat, ſi quieſcat. Et quidem ego omnino arbitror, nullum eſſe materiæ punctum, quod perfectè quieſcat, ut facile probari poſſe cenſeo. Nec tamen determinatio ad motum in quovis materiæ puncto habetur ita, ut ad eſſentiam pertineat,

Incolumis? veluti quoque corpora ſæpe moveri
Cernimus, & propriam naturam immota tueri.
At, vel ſi ſemper mens cogitet, exteriuſne
Non ea vis menti queat adveniſſe, ſed iſta
Lege, ut naturam ſemper comitetur eandem?
Præterea [a] impreſſas multarum ab origine prima
Rerum notitias in noſtris mentibus altè,
Atque una genitas, non hauſtas rebus ab ipſis,
Exceptaſque, animo ſed in interiore repertas
Dicere uti poſſis, ratio non ulla videtur.
Qui dicunt, illas ſoli meruere tueri,
Plus aliis animæ felices; ſic fuit olim
Quidam de numero ſapientum, qui meminiſſet,
In quot preteritis migrarit corpora ſæclis,
Quondam & qui fuerit Trojani tempore belli.
Aſt [b] hoc, quod vocitant in noſtris mentibus altè
Imprimere, & ſignare, quid eſt, niſi forſitan illud
Efficere, ut res ſe manifeſto lumine ſiſtant
Mentibus, & varias hæ vertant evigilantes
Se ſubito ad veri formas, viſaſque revolvant?
Quod facerent utero clauſi, nova germina matris,
Artubus infantes teneris, multaque venirent
Doctrina imbuti ad vitales aeris auras.
Sin nihil eſſe velint has formas, notitiaſque,
Primitus inſculptas quas dicunt mente, niſi ipſam
Vimque, poteſtatemque videndi plurima rerum;
At cur non etiam ſic omnia, ſcilicet omni
Novimus in vita quæcumque, aut noſſe queamus
Mortales? certè eſt nobiſcum hæc nata facultas,
Interior noſtris nimirum in mentibus alma eſt
Hæc ratio, cujus paulatim poſſumus uſu
Omnia percipere, & veri cognoſcere formas,

Re-

a Innatas ideas rejicit. Ironicè comparat Carteſianos ipſarum propugnatores, qui eas in ſe ſoli videant, cum Pythagora, qui, ut ſuam confirmaret Metempſychoſim, ſolus ajebat ſe meminiſſe, quid ſibi contigiſſet Trojani belli tempore Euphorbi corpus incolenti.

b Vel, ait, habere ideam innatam cujuſpiam rei, eſt illam rem actu cognoſcere, & contemplari; & infantes ipſi doctiſſimi naſcerentur, ac in continua æternarum veritatum contemplatione defigerentur; vel eſt habere facultatem, ſeu poteſtatem acquirendi aliquando ejus rei cognitionem; & cum ea vis ſit ipſa ratio, ipſa mentis natura nobis ingenita; eorum omnium, quæ aliquando demum utcumque cognoſcimus, innatam ideam habere mus; quod ipſi Carteſiani nolunt, qui multas per ſenſus etiam, ac per reflexionem acquiri ideas concedunt.

Rerum notitiis per ſenſus omnibus hauſtis;
Quod tibi poſt paulo quo fiat dicere pacto
Conabor, mens omnigena ut diteſcat opum vi.
  Perſpicua [a] in nobis at quædam notitiarum
Semina forte velis; verba intellecta, notæque
Nam ſi ſint rerum primarum, victa repente
Mens ſe dedit, & aſſenſu ſe flectit ad illas
Non cunctante, velut tum notas non ſibi primum,
Sed quas ante diù quoque noverit, & meminiſſet
Quas nunquam didiciſſe; velut cum dicimus, eſſe
Majus parte, quod eſt totum, vel tempore eodem
Non itidem poſſe in rebus non eſſe, quod extat,
Et, genus hoc, alia, obtutu non vera fateri
Mens ipſo quæ non poſſit, manifeſtaque clament
Vel pueri, nunquam quos nutrix blanda, nec ipſi,
Talia uti ſubito noſcant, docuere parentes.
Verum, quandoquidem nos claro in lumine quædam
Aſpicimus, ſubitoque eadem percepta probamus,
Cur erit, ut nulla fieri id ratione reamur
Poſſe, niſi illa eadem nobiſcum nata feramus,
Atque inſcripta animo ſint, atque inſculpta potenti
Naturæ artificis digito, velut ærea conſtet,
Aut adamantina mens, quæ ſic ea ſigna receptet?
Cur potius non eſt referendum rebus id ipſis,
Quarum percepta eſt bene cum natura novarum,
Intellectaque ſunt verborum ſigna, repente
Iam ſit opus mentem, quod tum videt, eſſe fateri?
Sic etiam tenebras a claro lumine ſolis,
Sic imis montes a vallibus, albaque nigris,
Dura quoque a liquidis, & amara a dulcibus ætas
Infantum tenero vix matris ab ubere rapta

Quit

[a] Exponit, quo pacto ſine innatis ideis principia quædam, ut *totum eſt majus ſua parte: non poteſt idem ſimul eſſe, & non eſſe*, ubi primo audiuntur, rapiant ad aſſenſum. Id non provenire ab ideis innatis, ſed a vi ſibi ingenita, quam habet mens diſtinguendi diverſas ideas, & noſcendi, quæ per affirmationem conjungendæ ſint, quæ per negationem disjungendæ nutu quodam interno.

Id aptiſſimo ſane exemplo confirmat idearum, quas per ſenſus excipimus. Semel viſo homine, ſi deinde videatur equus, dicimus, non eſſe hominem, cujus idea per viſum habita ab idea equi ita differt, ut ſtatim diſcernatur. Aliud eſt ideas eſſe ingenitas menti, aliud ubi advenerint, cognoſci diſcrimen, vel congruentiam. Si vis, qua id diſtinguimus, eſt ad rem ſatis; ſuperfluæ ſunt, adeoque falſæ ideæ innatæ, quæ adduntur.

Quit facile, & ſubito dignoſcere; quodque videbit
Eſſe homines, eſſe illud equos, pecudeſque negabit.
Non animo idcirco ſimulacra inſcripta ferarum,
Atque hominum in noſtro ſunt, & cum luce tenebræ,
Monteſque, valleſque, & dulcia, duraque rerum,
Inſinuant quæ ſe per noſtros omnia ſenſus.
Cætera ſic itidem ſimili ratione putandum
Sciri, atque a nobis pernoſci poſſe ſine ullis
Rerum notitiis, quæ præceſſiſſe ferantur,
Et latuiſſe diu; ratio ſatis una profecto
Si pernoſcendis eſt omnibus, altera porro
Quid faciet? rere hic ſubito, quod inutile, falſum.
Indita [a] quapropter rerum quia nulla fatemur
Principia in nobis, non eſt, ut multa videri
Certa minus poſſint, verumque haud rebus in ullis
Prodat ſe, cæcaque ideo ſe in nocte recondat:
Fulgurat illud enim, & perfundit lumine claro
Quædam, cum primum noſtræ ſunt obvia menti,
Ut rata ſint ſubito, & prorſus conſtante probentur
Judicio, ut nequeant ulla ratione refelli.
Præterea [b] ingenitum ſi quid fiet, illud, oportet,
Clarius aſpiciant pecora inter inertia vitam
Silveſtres homines herbis, & glande trahentes,
Imbecillaque ſunt quibus, & torpentia corda.
Nam, quoniam paucis extra, levibuſque moventur
Rerum notitiis, neque ſe mens moribus ullis
Imbuit, aut variis populorum judiciis eſt
Corrupta, atque virum doctrinis obſita multis;
Quod fixum interius, debet magis ipſa tueri:
Cernit notitias idcirco, & plurima veri
Principia, illa diu pariter, noctuque revolvit,
Percenſetque videns, longumque moratur in illis.
Talia qui fieri vere putat, ille profecto
Deſipit, atque omni procul a ratione recedit.

a Concludit ſolam mentis vim, & rationis uſum ſatis eſſe ad habendam evidentiam, quod manifeſto patet ex iis, quæ adduxerat.

b Alio jam argumento utitur contra innatas ideas; quod nimirum homines ſilveſtres, & rudes, doctiores eſſent, & ſublimiora meditarentur, quam ii, quos educationis præjudicia, & urbani ſtrepitus, ab aſſidua idearum innatarum contemplatione avertunt; quod quidem qui affirmet, omnino deſipiat.

Haud [a] equidem ante animis genera ipſa, & nomina
Pluribus aptari quæ poſſint rebus, habemus, (quædam,
Quam ſingillatim multas res, unde neceſſe eſt,
Notitiæ quædam communes exoriantur:
Scilicet in rebus cum noſtri plurima ſenſus
Exempla oſtendant, quæ conſtent ordine quodam
Inter ſe certo, facile hinc ſe tollit ab ipſis
Mens ſurſum exemplis, rebuſque abducta, locisque
Ordinis illius naturam, vimque recenſet,
Ingenitamque putat, quoniam, quo cognita primum
Tempore ſit, neſcit, minimo nam parta labore:
Sic [b] palmas primum æquales cum junximus ambas,
Parve pari folium, nummorum aut orbibus orbes,
Aut pedibuſque pedes, & paſſus paſſibus æquos,
Congruere inter ſe quia vidimus, inde recepit
Notitiam hanc animus; quæ ſunt hoc ordine cunque,
Congruere ut poſſint, opus eſſe, æqualia conſtent.
Ergo [c] per ſenſus in noſtra mente genuntur

Effi-

a Solvit præcipuum argumentum petitum ab ideis, & propoſitionibus univerſalibus, quæ videntur acquiri non poſſe per ſenſus ſingularia tantummodo exhibentes. Affirmat igitur, generales ideas, & propoſitiones oriri a ſingularibus repetitis ſæpiſſimè, in quibus eum mens certos ordines, & certas relationes perſpiciat, vi ſibi innata eas generales ideas, vel propoſitiones efformat ſibi, quas cum ab ipſa infantia ſine ulla difficultate cœperit efformare, ipſius primæ efformationis jam immemor habeat pro innatis.

b Rem illuſtrat exemplo ejus principii, *quæ congruunt, ſunt æqualia*, quod affirmat, acquiri viſa plurium æqualium congruentia.

Sed aliquando generales etiam propoſitiones habemus in mente, ante ſingulares, ut quotieſcumque in ſyllogiſmo ex binis univerſalibus propoſitionibus novam univerſalem itidem inferimus, quam antea non noveramus, nec ſingulares ipſi reſpondentes habueramus. Generales ideas, ubi eidem generali conjunctas deprehendimus, inter ſe conjungi perſpicimus, licet ſingularium conjunctiones nunquam ante viderimus.

c Oſtendit jam, quo pacto generales ideæ efformentur. Per ſenſus oriri in mente ideas ſingulares, quas primo acquirimus: eas eſſe quamplurimas, & quamplurima earum diſcrimina: non poſſe pro tanta multitudine parem adhiberi multitudinem nominum: adeoque iis, quæ minus differunt inter ſe, idem adjungi nomen, quod aptetur ſingulis, quæ exprimuntur iis ideis ſimilibus: ſic rerum ab ideis expreſſarum componi claſſes quaſdam alias magis, alias minus late patentes.

Adhibet exemplum exercitus, in quo plures milites manipulum, manipuli cohortem, cohortes legionem, legiones exercitum ipſum componunt. Eſt tamen hoc diſcrimen inter nomen *exercitus*, & univerſale nomen quodpiam ex. gr. *Animal*, *Homo*, quod de ſin-

Effigies rerum, veluti quæ dulcia, dura,
Et varie fucata, ſonora, & odora vocamus,
Atque alia è genere hoc, quorum ſunt nomina mille,
Non tamen ut poſſint pene infinita notari
Vocibus, & verbis totidem diſcrimina quæque.
Propterea, ſimili queis nos ratione ciemur,
Sunt eadem ſortita vocabula; cogimus illa
Nam quaſdam in ſpecies, & ſub communia ſigna:
Haud ſecus ac ſumptis miles Romanus in armis,
Undique cum ſeſe ſua ſub vexilla recepit,
Pluribus e junctis fulgentes ære manipli
Principio exſurgunt, ex iſtis deinde cohortes,
E multis prodit legio unà cohortibus; uni
Si jungas aliam, atque aliam bis, terve, quaterve,
Fit Pœnum auſurus tentare exercitus hoſtem.
Haud fruſtra vocum hæc compendia repperit uſus,
Innumerabilibus ne mens oppreſſa labaſcat
Tot rerum ſignis, quot ſunt res undique privæ,
Et ſit opus nova quæque novis dare nomina rebus.

 Com-

ſingulis hominibus dicitur *eſt Animal*, *eſt Homo*, de ſingulis militibus non dicitur, *eſt Exercitus*, *eſt Legio*.

Addit demum, id vocum compendium eſſe utiliſſimum generi humano, ne immenſa vocum copia memoriam obruat. Hic autem notandum illud, aliquando majus etiam adhiberi compendium, cum nimirum e pluribus ſpeciebus ſub eodem genere contentis, aliqua nomine ſuo careat, & ſolum generale illud retineat. Sic nomen *triangulum* ſub ſe continet triangulum *ſcalenum*, quod habet omnia latera inæqualia, & *iſoſceles*, quod ſaltem duo æqualia habet. Sub eo continetur & id, quod habet omnia latera æqualia, & id quod habet duo tantum. Illud habet ſuum nomen *æquilaterum*, hoc nullum peculiare habet, ſed retinet generale *iſoſceles*.

Notandum itidem, hoc pacto rem ſe habere in generalibus ideis efformandis, ubi homines primo in unum cogregati novum idioma conſtituant. Nobis mirum quantum prodeſt idioma jam conſtitutum. Dum ab ipſa infantia idem nomen pluribus rebus tribui videmus, quæ partim inter ſe conveniunt, partim diſcrepant, uſum acquirimus adnotandi, in quo conveniant, in quo diſcrepent. Fruimur obſervationibus alienis, & nominis ejuſdem repetitione ab aliis inſtituta res a noſtris ideis nobis exhibitas conjungimus, vel diſjungimus. Hinc tam hebetes, qui ſoli in ſilvis deprehenſi ſunt, & qui ſurdi, ac muti. Ut in Aſtronomia nos, qui præteritorum Aſtronomorum obſervationibus fruimur, & curſum aſtrorum facile novimus ab ipſis longo labore digeſtum, ſine illis per ſolas noſtras obſervationes parum admodum in ea ſcientia proficeremus; ſic qui nominum uſurpatione ab aliis adhibita caruit, cum per ſe ſolum ſuas ideas in ordinem redigere debeat, & ſimiles conjungere, disjungere diſſimiles, plurimum hæret, & parum proficit,

Communes [a] tamen hinc naturas credere pronum eſt,
Ac veluti in numero rerum ſint, unde creatæ
Naturam res quæque ſuam decerpere poſſint;
Protinus errorum ſeges unde uberrima manat.
Ac [b] mens dum rerum formas a ſenſibus ortas
Intra ſe recipit, variaque a parte revolvit
Contemplans, & ſe varia ratione figurans,
Ipſa ſibi occurrit ſæpe, in ſe verſaque motus
Percipit ipſa ſuos; atque hac ab origine mille
Exſurgunt etiam ſpecies, & nomina mille,
Noſcere uti, dubitare, & credere, velle, probare,
Spes, & amor, dolor, atq; odium, timor, ira, voluptas;
Dicere quæque foret longum, vel queis data nondum
Nomina ſunt, vel quæ communi voce fruuntur.
His [c] ergo geminis tantum de fontibus omnes
Notitiæ menti, quotquot ſunt, ſuppeditantur;
Scilicet aut ipſis venere a ſenſibus extra,
Aut poſt a variis animai motibus intus:
Tertia nulla via eſt, qua poſſint inſinuari
In noſtros animos, nec ab ulla parte meare.
At quæ ſic duplici fiunt ope, ſemper eadem
Non perſtant ratione, ſuis nec finibus hærent.
Mens formarum opifex nectit, disjungit, & auget,

Ex-

a Concludit, hunc eſſe fontem erroris illius, quo univerſales naturas aliqui admiſerunt, ut Plato, quod hanc generalium idearum derivationem nequaquam conſideraverint.

b Ad eas ideas gradum facit, quæ per reflexionem acquiruntur, dum anima ſuos ipſius motus ſentit, & conſiderat. Earum multæ habent ſua nomina, ſive ad intellectum pertineant, ut *cognoſcere*, *dubitare*, *credere*, ſive ad voluntatem, ut *velle*, *ſperare*, atque alia, quæ Noſter commemorat.

Innuit autem, eſſe plures alios animi motus, qui nomine careant, quos quidem ſæpe exprimimus per illa *quoddam*, *veluti*, *quaſi* & alia ejuſmodi.

c Concludit, nullas alias haberi ideas, niſi quas vel per ſenſus acquirit mens, vel per reflexionem ſupra ſuos ipſius motus. De naturalibus hic ideis agit, quas habemus, dum corpus incolimus. Deus enim aliquando immittit ideas, quæ nec ex reflexione oriuntur, nec fortaſſe ullo ſenſuum miniſterio inſinuantur. Anima vero poſt mortem ſine ſenſibus, & corpore adhuc ideas excipiet rerum etiam extra ſe poſitarum ratione aliqua nobis ignota.

Porro ideas ex illis fontibus hauſtas mens vi quadam ſibi ingenita pluribus modis verſat, ac transformat in alias, quas ſibi comparat. Aliquæ efformantur per præciſionem, ut ajunt, & abſtractionem, ut idea infiniti, quæ oritur abſtrahendo a finibus, immenſi a menſuris, poſtquam finium, & menſurarum ideas per ſenſus hauſimus.

Aliæ

Extendit, minuit, transformat, & undique verſat
Omnimodis, certo ſine fine, ſine ordine certo,
Olli ut collibitum eſt nimirum, aut fors tulit ipſa.
Non tot monſtra parit nutrix inviſa ferarum
Inter arenoſos montes, exuſtaque ſaxa
Africa, quot noſtro portenta informia ſurgunt
Sæpe animo; pugnant contra, & ſtabulantur ibidem,
Diſcordeſque novant alieno ſemine fœtus.
Et [a] quoniam, per quos introrſum infertur imago,
Senſus, nempe oculis, atque auribus, atque palato
Qui reſident, totiſque cientur in artubus extra,
Prorſus corporei conſtant; fateare, neceſſe eſt,
Corpus id, in ſeſe quod ſenſus continet ipſos,
Nexu, neſcio quo, junctum cum mente teneri;
Quo nexu fit, uti varios illius ad ictus
Evigilata modis moveatur, percipiatque
Hæc variis; contra certis reſpondeat ipſum
Motibus arbitrio mentis, capiantque, ferantque
Auxilia inter ſe pariter, veniatque quietis

Al-

Aliæ per conjunctionem eorum, quæ nondum conjuncta vidimus, quæ vel conjungi poſſunt, ut plerumque, ubi aliena legimus ſcripta, audimus narrata, vel ſcribenda, & narranda imaginamur, vel conjungi nequeunt, ut ideæ omnes impoſſibilium, ac monſtrorum plurimorum, quæ ſibi confingit ea facultas mentis, quam appellamus *Phantaſiam*.

Ex illis præciſionibus ſæpe & errores naſcuntur plurimi, ac præjudicia, quæ diu retinemus. Eorum præcipuus fons eſt is, quod ea, quæ nec ſenſu immediate percipimus, nec adhuc meditatione aſſecuti ſumus, habeamus pro nullis. Sic erraret ſane, quicumque terræ quietem idcirco crederet, quod motum ejus non deprehendat, quem non deprehenderet, licet adeſſet. Errat, qui vitrum continuum purat, quod poros non videat, quos quidem argumenta plurima evincunt adeſſe. Quin immo, ut ſuo loco videbimus, continua materiæ extenſio eſt unum e præjudiciis ortum ex eo, quod intervalla, quæ haberi arbitror inter bina quævis materiæ puncta, ſub ſenſus noſtros non cadant.

a Ex ea idearum origine delabitur ad conjunctionem corporis, & animæ, quæ motus quoſdam utriuſq; ita conjungit, ut alter alterum neceſſario conſequatur. Adhibet autem vocem illam *Nexu neſcio quo*, ut indicet obſcuriſſimam eſſe rationem conjunctionis ipſius. Alii phyſicam alterius in alterum actionem admittunt, alii negant. Inter hos Leibnitius *Harmoniam* ſuam *Præſtabilitam* in ſcholas invexit. Animam ſuas Ideas, & ſuos motus evolvere per ſeſe, corpus itidem per ſeſe motus ſuos. Deum vidiſſe motus ipſos, & animam in eo corpore collocaſſe, cujus motus ejus animæ motibus reſponderent. Ego quidem ab ea ſententia mirum quantum abhorreo. Rationes, quæ ab ea me removent, indicabo in ſupplemento.

Alterum in alterius partem, partemque laboris:
Alterum ab alterius proin motu pendet, & inde
Excipit impulſus varios, redditque viciſſim,
Scilicet hoc animi nobis mens conſcia monſtrat.
Præterea [a] hanc animi vim noſtri in corporis artus
Partim exerceri ſponte, ingratiſve neceſſe eſt,
Non id agi ut nequeat, quod agendum: libera partim
Eſt eadem. Internos quoque ſæpe extenditur ipſos
In motus animi vis libera; quiſque quod intra
Percipit expertus, claraque in luce tuetur.
Nec [b] mihi ſe contra Ratio hic, quæ ſufficit, ipſa
Efferat, & mentis moderandæ fræna receptet.
Multi illam cunctis ponunt fundamina rebus;
Unde etiam Veri in mentem fons defluat almus;
Hac ſine quandoquidem nil prorſum exiſtere poſſe,
Nil fieri a nobis, Divina aut mente, fatentur.
Nonne, ubi Libertas dominatur, multa neceſſe eſt
Arbitrio fiant ut noſtro, nullaque conſtet
Multarum ratio rerum, niſi ſola Voluntas?
Ipſa movet ſe mens, contraque moventibus ire
Quit cauſis, cauſis nec quoquam impellitur ullis
Interdum: quid Numen enim, cum conderet orbem,
Impulit, ut ſpatii ſolem in regione locaret
Hac ipſa, non qua fulget Cynoſura, vel ardens
Sirius, aut in corde furit qua flamma Leonis,
Perſtarent tamen hoc tunc ordine ut omnia eodem?
Cur neque, ab exortu rerum numerentur ut anni

Tum

a Motus corporis alios eſſe, ait, neceſſarios, ut eſt motus ſanguinis, ut pallor ex ſubito metu, alios liberos, ut ſpontanei manuum, ac pedum motus. Liberi autem motus corporis eſſe non poſſunt, niſi etiam animi imperantis motus ſit liber. Hinc & animi liberos motus Noſter commemorat.

Ut libertatem ipſam evincat, ad intimum cujuſque ſenſum, & experientiam provocat. Haud ignoro, quid reponi ſoleat: nos eundem habituros ſenſum, ſi ad motus eoſdem ipſa nos mentis natura, ac præcedentium motuum ſeries determinaret. At ſi ejuſmodi meditationibus plus æquo indulgemus, nimiæ nos litteræ ad inſaniam perducent. Nihil uſquam certi erit, ſi in tam perſpicuo ſenſu noſtro intimo decipimur. Sapientiſſimus naturæ Conditor ei malo occurrere omnino debuit, & mentem, cujus pabulum veritas eſt, ad veritatem inclinare, non ad errorem.

b Præcipuum Leibnitianorum principium impugnare hic incipit, quod *Rationis ſufficientis principium* appellant, in eo ſitum, ut debeat ſemper haberi ratio ſufficiens, cur aliquid potius ſit, quam non ſit.

Porro

Tum plures, voluit, vel contra? quidve coegit,
Ut faceret non pulchra magis, melioraque multo,
Quæ fecit? tantis faciundis ſumma Poteſtas
Rebus an exhauſta eſt? majus, meliuſque nec ultra eſt?
At [a] neque ſe egregiam commendat ob utilitatem
Hæc Ratio: facilis non ſe via, nec nova pandit
Propterea ad verum. Vel, ſi libet, indita cunctis
Sit rebus Ratio, quæ ſufficit, illa videri
Idcircone queat nobis, præſtoque repente
Eſſe tenebroſæ ſubeuntibus abdita regna
Naturæ, velut Ænean excita Sibylla
Tænariæ duxit per opaca ſilentia noctis?
Scilicet illam ipſam veſtigarunt rationem,
Qui cauſas rerum veſtigavere latentes.
Infinita tamen cauſarum ſumma profecto eſt
Haud minus idcirco, quas ignoramus, & ullo
Conatu, aut ullis opibus pertingere non eſt:
Ipſa latet quoniam rerum Natura tenebris
Obſita, nec, tenuem nobis niſi, protulit, umbram.

Qua-

Porro hoc principium, ut a Leibnitianis aſſumitur, libertatem arbitrii profecto penitus evertit, & humanam, & Divinam; requirit enim, ut ſemper ſit aliqua ratio, propter quam voluntas ab eadem determinata potius velit, quam nolit. Contra ipſum principium affirmat Noſter, aliquando nullam aliam rationem eſſe, cur voluntas determinetur potius ad unum, quam ad aliud, niſi ipſum arbitrium. *Stat pro ratione voluntas.* Adeſt ſemper ratio, cur velit, non cur potius velit, quam nolit.

Argumentum deſumit Noſter a Dei libertate, quæ in mundi libera creatione ſe prodit, a loco nimirum, quo mundum poſuit, a tempore, quo creavit, a finita creatarum rerum perfectione, quam ſelegit perfectioribus omiſſis. Quid ad hæc reſpondeant Leibnitiani, & quomodo impugnandi ſint, dicam in ſupplemento.

a Hoc principium non falſum tantummodo eſſe, ait, ſed etiam inutile, quod quidem Leibnitiani habent pro præcipuo ad veritates deprehendendas inſtrumento. Inutilitatem probat, quia licet concedatur, haberi debere rationem ſufficientem, cur aliquid potius ſit, quam non ſit, cum nos rerum naturam ignoremus, & cauſas, quæ quamplurimæ poſſunt eſſe, videre non poſſumus, an aliqua ratio ſufficiens habeatur, & quæ ſit in ſingulis caſibus.

Profecto cum Leibnitiani fateantur, eſſe aliqua mala in mundo, ſed ea tolerari propter alia bona, cum quibus connectuntur, dum in aliquid inquirimus, dubitare ſemper poterimus, an in eo Deus bonum aliquod quæſierit, in cujus gratiam malum aliquod permiſerit, an in eo permiſerit malum in alterius majoris boni gratiam. Incertum igitur ducem ſequimur, ſi ei principio fidimus.

Digitized by Google

Quapropter [a] noſtra eſt, ut dixi, libera prorſus
Mens animi; ratio neque ſufficit ulla profecto,
Qualem nos intus ſentimus, libera ne ſit,
Arbitrioque ſuo ſe, quo libet, undique flectat.
Quod [b] ſupereſt, quoniam, qua mens ratione receptet
Notitias, quid & intus agat, quæ corpus, & inter
Ipſam, fœdera ſint, quid de ſe conſcia noſcat,
Diximus; idcirco num te cognoſcere mentem,
Jactes, qualis ea eſt? Ignotum num tibi temet
Proin non eſſe putes? paucis e viribus illis,
Quas docui, ſperes deprendere funditus omnem
Naturam interius, quænam ſit, quidve ſit illud,
Quod facit in nobis, quod noſtros ſuſtinet actus,
Eductiſque ex ſe veluti ſubſternitur orſis?
Quod tibi ſi clara poſſit ratione patere,
Cur omnes etiam vires, cur munera cuncta
Ignores, quæcumque illo de fonte capaci
Effluxiſſe queant, penitus ſunt innumerali
Quæ numero? cur ſic nequeas manifeſta tueri,
Mens alio faceret quid tempore, reque, locoque,
Corpore proque alio, atque aliis quoque ſenſibus ejus,
Qualis morte obita, quid agat ſine corpore ſola?
Omnia quæ quoniam nos ignorare fatemur,
Ignotam nobis etiam fateamur, oportet,
Multo plus mentis naturam, vimque animaí.
Altera [c] præterea in rebus quæ corporis extat
Na-

[a] Concludit, liberam prorſus eſſe voluntatem noſtram, & ſuo arbitrio uti ita, ut alia ſufficienti ratione, qua determinetur, nequaquam indigeat.

[b] Licet nonnulla, quæ pertinent ad noſtram mentem, & ejus agendi modum, cognoſcamus, docet, non idcirco nos cognoſcere mentis naturam. Si enim eam cognoſceremus, non ignoraremus profecto alia tam multa, quæ ad ipſam pertinent, quæ hic Noſter ſatis clare & eleganter perſequitur, quæ quidem penitus ignoramus.

[c] Ab animo ad corpus gradum facit, cujus naturam æquè nobis ignotam eſſe, affirmat. Corpus enim non niſi per ſenſus cognoſcimus, ſenſus autem ipſi ad ſubſtantiam non pertingunt, pauci numero ſunt, & imbecilles. Iis tribus argumentis utitur Noſter, & hic quidem primum ſtatim proponit. Senſus nimirum referunt quemdam externum veluti corticem, proprietates nimirum quaſdam, & quidem eas ſolas, quæ pertinent ad communicandum motum in noſtris ſenſibus, adeoque non pertingunt ad intimam ſubſtantiam, quæ ſubeſt & iis proprietatibus, & aliis adhuc ignotis, & quæ olim fortaſſe detegentur, & habebuntur pro novis. Porro proprietates ipſas appellat *officia*, & *munera*.

Natura, an pariter quoque non ignota lateſcat,
Et penitus cæca ſeſe in caligine verſet?
Hujus notitiis per ſenſus nam via ſolos
In mentem patefit: prima ergo fronte videtur
Tantum: & nil aliud, niſi quæ ſunt extima, monſtrant
Senſus: non etenim penetrant in viſcera rerum,
Propterea tantum pauca, & vix nota profecto
Corporis apparent, quæ dicere propria ſuemus,
Aſt hic officia, aut vires, aut munera dicam.
Atque hæc unde fluunt, quidque his ſubſternitur intus,
Quæque alia exſurgunt fors infinita, queuntque
Pro rebus prodire novis, noviſſe negatum eſt.
Præterea [a] noſtro ſenſus in corpore quini
Cum vigeant, totidem nos percipiamus, oportet,
Multa modis; at ſi notis ſuperadditur unus,
Tum ſpecies quædam nova corporis, atque poteſtas
Exoritur; ſi deinde decem, aut adjungere centum
Pergas, aut decies diverſos denique centum
Senſus, quàm variæ vires, diverſaque noſtras
Afficient quovis e corpore munera mentes!
Proin plus nota forent generatim corpora quæque
Nempe modis totidem: ſed adhuc natura lateret

[a] Subſtantiam corporis a nobis ignorari probat hic ſecundo loco ab exiguo numero ſenſuum, qui ſunt quinque tantummodo. Plurimi omnino alii poſſunt exiſtere, quorum nos nullam habemus ideam, & fortaſſe inter ipſius terræ incolas, multo autem probabilius inter incolas Planetarum, vel ad ſolare, vel ad Fixæ cujuſpiam ſyſtema pertinentium habebunt aliqui plures ejuſmodi ſenſus a noſtris admodum diverſos, quibus idcirco natura corporis videbitur admodum diverſa ab ea, quæ nobis videtur, ob admodum diverſas proprietates iis ſenſibus detectas.

Jam vero ſi nos haberemus ejuſmodi ſenſus, profecto alias plurimas corporum proprietates detegeremus, quas nunc ignoramus. Adhuc tamen ipſam naturam earum proprietatum fontem ignoraremus.

Exemplum Noſter adhibet cujuſpiam, qui ab ipſo exortu ſit cæcus, tum repente lumen recipiat, cujuſmodi exempla non deſunt. Dum oculis caret; non habet colorum ideam, nec multum dolet, quod iis careat, quæ ipſi ignota ſunt. Ubi videre cœperit, tum repente agnoſcit, quanto bono caruerit, quam multæ ipſi notitiæ defuerint. Idem, inquit, & nobis accideret, ſi alios illos repente ſenſus reciperemus. Verum nobis quidem multo etiam magis inexpectatæ novæ illæ ideæ advenirent. Nam is cæcus ab aliis audire poſſet multa, quæ ipſi deſiderium excitarent eorum, quorum claras quidem ideas non haberet, haberet tamen confuſas, & relatas utcumque ad reliquas, quas habet. Nos nullam prorſum habemus eorum, quæ per illos alios ſenſus cognoſcerentur.

Intima, & officiis ſupereſſent plura retectis
Infinitaque, quæ fluere illa ab origine poſſunt,
Quorum notities in mentem nulla veniret.
Haud aliter quàm quos oculorum lumine caſſos
Ex utero miſerans mater profudit in auras,
Illi non lucem, perfuſaque corpora luce
Agnoſcunt; datur haud ullas formare colorum
Effigies animo; nec res ſuccendere poſſunt
Ignotæ deſiderium; haud ſe proinde carentes
Credunt, nec nimium, ſi credant forte, moleſtum eſt.
Sed ſi oculis ars deinde Medentum acceſſerit ægris,
Suffuſaſque acies purgaverit; ecce repente
Cum ſenſu nova cuncta novo, nova corpora circum
Mirantur, circumque novas cum luce figuras,
Et cum Sole diem, & cum multo ſidere noctem,
Et mare diffuſum late, terraſque patentes,
Urbes, conventus hominum, ſpectacula, pompas,
Tranſlatoſque novum ſubito ſe rentur in orbem.
Poſt rebus caruiſſe bonis, cæcoſque fuiſſe
Agnoſcunt, & quàm fuerit tum parva ſupellex
Notitiarum animi detracto non magis uno
Quàm ſenſu: quid erit, ſi centum, aut mille repente
Auxilium menti tota cum merce venirent?
Forſitan & multis tam vaſti in partibus orbis,
Tanta ubi viventum ſæclis ſpectacula præbet
Tot variis uber rebus natura, modiſque,
Multiplex genus eſt animantum, quod potiatur
Aut aliis longe, quàm noſmet, ſenſibus, ipſis
Pluribus aut multo, diverſoque ordine nexis;
Atque hi non rerum, quæ nos, ſimulacra receptant
Corporearum animo, ſed nulla fors ratione
Conveniant noſtris quæ prorſus, at undique diſtent,
Debeat ut diverſa eadem natura videri.
Adde [a], quod hi, queis nos pollemus ſenſibus, aucti

Si

[a] Tertium jam argumentum profert petitum ab imbecillitate noſtrorum ſenſuum, quorum vis ſi augeretur, poſſent alias prorſus corporum formas menti exhibere, quemadmodum pulvis admodum tenuis ſatis potenti microſcopio inſpectus apparet, ut quædam ingentium ſaxorum, ac pene montium congeries.

Limites nimirum quidam noſtris ſenſibus conſtituti ſunt, qui ad vitam tuendam maxime conducebant. Si eorum vis augeretur, poſſent illi quidem plurimum nobis incommodare. Lux diurna oculos præſtingueret nobis, ut noctuis, levis zephyrus aures obtunderet, ut apud Nili catara-

ctas-

Si qua ter creſcant, decieſve, vel amplius arte,
Oſtendant aliis circumdata corpora formis;
Ut cum tranſpicimus vitro pertenue tumenti
Corpus ad apricam ſole illabente feneſtram;
Quæ fuſci fuit ante coloris, opacaque viſa,
Jam tum parte nitens omni pellucet arena,
Parvaque proceris ſurgit ſe montibus æquans,
Ut velut impoſitum mireris Pelio Oſſam,
Frondoſumque etiam ſuper Oſſam inſurgere Olympum.
Poſſe datum nempe eſt noſtris nil ſenſibus ultra,
Quàm quod conveniat ſervandæ ad commoda vitæ;
Ut ſi vividior decies, iterumque, iterumque
Sit decies, gemina qui ſenſus in aure locatur,
Æſtivæ lenis Zephyrorum ſibilus auræ,
Aut per ſaxa ſtrepens muſcoſo margine rivus,
Aut rari tenuis rumor per compita vulgi,
Obruat immani ſtrepitu aures haud minus, ac ſi
A gelido Boreas truculentas ſidere pennas
Concutiat, qualis, cum ſuſtulit Orithyam,
Aut ſi Nilus aquas ſpumoſo gurgite labens
Protinus Æthiopum de verticibus præruptis
Omnes præcipitet deorſum, aut tonitralia cæli
Atra ruant iracundo Jove templa ſuperne.
Ergo [a] iterum atq; iterum ſenſus non poſſe fatendum eſt
Corpoream nobis naturam oſtendere rerum.
Plurima quin etiam, quovis quæ in corpore ineſſe
Monſtrant, frigus uti nivis eſt, aut eſt calor ignis,

 Aut

ctas immani fragore fere ſurdi fiunt incolæ; ſi multo delicatiores oculorum, vel aurium fibrillas haberemus.

a Concludit ſenſus ineptos eſſe, ex tribus nimirum expoſitis capitibus, ad naturam corporis demonſtrandam: tum aliud argumentum aggreditur, quo evincat eandem nobis ignotam eſſe, quod nimirum in corporibus, quæ noſtros ſenſus afficiunt, nihil eſt aliud, niſi vis, & motus, quo nervos noſtros agitant: ex quorum motu deinde in mente noſtra ideæ diverſæ excitantur caloris, coloris, ſaporis, & aliæ ejuſmodi, quæ plurimum diſcrepant a motibus, a quibus ortum ducunt, & multo magis a natura corporis eoſdem motus excitantis.

Et quidem ii motus excitati in organis noſtris ita connectuntur cum illis ideis, ut nec illæ ideæ excitari poſſint ſine illis motibus, nec, excitatis illis motibus, liberum ſit nobis eas ideas impedire. Hinc nimirum nullam cæco propriam coloris ideam excitare poſſumus, nec affectionem in animo alterius movere, quam nunquam habuit; ſed ad ſummum per alias ſimiles ideas, vel affectiones, quas aliquando habuit, illius vicem utcunque ſupplemus.

Aut odor, aut verni florum per prata colores,
Aut rerum varius ſapor eſt per texta palati,
Lanæ mollities, ferri rigor, aſperitaſque,
Atque alia e genere hoc, in nullo corpore conſtant
Revera, ſed ſunt ſpecies in mente coortæ
Per ſenſus, agitant variis quos corpora plagis.
Vis in materia proin tantùm eſt, atque poteſtas
Harum, quas memoro, vel de genere hoc aliarum
Rerum notitias in noſtra mente ciendi;
Quas mens ipſa quidem per ſeſe, experta niſi eſſet,
Efficere haud ullo pacto, & formare valeret;
Nam neque cyanei qui ſint, ruſique colores,
Et veneti, ſeu yecta procul quo mala ſapore,
Novimus, aut ullo mentis pertingere quimus
Conatu, niſi viderimus, quæ corpora fucis
Illita ſint illis, vel noſtro admota palato
Mala prius fuerint: tum nullis talia quimus
Exprimere, ut poſſint alii cognoſcere, ſignis,
Ni per res, ſimilis queis ſenſus ineſſe videtur.
Has neque notitias non intus habere valemus,
Cum res poſcit, uti cum ſenſus afficiuntur,
Aut mutare aliis; nec, cum dolor urget, eundem eſt
Non ſentire potis mens, aut lætarier inde.
Quare in [a] materia ſenſus, animumque movendi
Vires eſſe quidem has cognoſcimus; at quid eædem
Sint, aut unde fluant, prorſum ignorare fatendum eſt.
Hos igitur ſenſus ſi non largita fuiſſet
Natura, an vires iſtas conſtare putares,
Tantùm reſpiciunt quæ ſenſus? proinde queamus
Corporis officia hæc cujuſque, eventa vocare.

Alte-

[a] Quoniam ſolum cognoſcimus in corpore eſſe vires quaſdam, quæ poſſunt noſtros ſenſus ita afficere, & ſi ſenſibus careremus, harum ipſarum virium notitia deeſſet, ac idcirco deeſſet is effectus, quem in nobis gignunt, hæc omnia, inquit, ad corporis naturam non pertinent, ſed ſunt quædam, quæ corpori accidunt, vel eveniunt, unde vulgo dicantur *accidentia*, quæ Noſter latinè *eventa* vocat; cumque noſtros tantummodò ſenſus reſpiciant, non abſolutæ quædam, ſed reſpectivæ ſunt corporum proprietates. Si nulli adeſſent ſenſus, corpora ſuam eamdem naturam haberent, nec tamen ullus haberetur ſonus, aut ſapor, vel color, niſi horum nomine intelligatur ſola diſpoſitio, quam habent corpora ad excitandos in noſtris organis motus quoſdam.

Altera [a] præterea quoque ſunt, quæ munera dicas
Conjuncta; hæc etenim junguntur ſemper, & hærent
Corporibus; proin & ſejungi, ſeque gregari
Materiæ ſine diſcidio non poſſe putantur.
Pauca tamen nobis ea demum cognita conſtant
E numero ingenti: plura, at non cuncta daretur
Noſſe eadem porro, ſi vis pollentior eſſet
Noſtra animi; norunt &, queis ſublimior, atque
Mentibus eſt aliis potior natura, vigorque;
Namque alias ultra nos mentes eſſe, iterumque
Atque alias iterum; & ſic ſemper creſcere longo
Ordine, queis tanto plura ac majora pateſcant,
Haud dubitem; ut contra deſcendere ſæcla animantum
Cernimus, & parvo inter ſe diſcrimine tantùm
Deficere, ut tenuem vix ſervent ultima vitam.
Corporibus [b] proprium ſcimus quapropter ineſſe
Mu-

a Ad alias jam tranſit corporis proprietates, quæ nullam ad noſtros ſenſus relationem neceſſariam habent. Eas Noſter, vocat *conjuncta*, alij *abſolutas*, & *eſſentiales* dicunt, quæ nimirum a natura cenſentur ſeparari non poſſe. Admodum paucas a nobis agnoſci affirmat; multo plures revera haberi; & eſſe alias mentes multo noſtris ſublimiores, quæ multo plures agnoſcant.

Hic vero occaſione arrepta illam innuit veluti continuitatem quandam in mentium diverſarum ſerie, quam libro 3, cap. 6, § 12. exponit Lockius, ex quo plurima eorum, quæ ad Metaphyſicam pertinentia huc Noſter congeſſit, mutuatus eſt. Ut nimirum ſeriem quandam videmus infra nos conſtitutam, in qua per admodum inſenſibiles gradus a Brutis deſcenditur ad vegetabiles ſubſtantias, ac demum ad maxime inertes maſſas, ita & ſupra nos ſimilem in mentibus ſeriem exiſtere. Admodum autem cautè loquitur binas ejuſmodi ſeries proponendo, ne a ſpiritu quoque ad materiam per inſenſibiles gradus tranſitum proponat, aut admittat. Sed de tota hac re plura in ſupplemento.

b Proponit ejuſmodi proprietates eſſentiales eo ordine, quo de iis acturus eſt: Extenſionem: Impenetrabilitatem: Mobilitatem: Figurabilitatem. His binas addit recentius detectas Gravitatem, & Vim Inertiæ, de quarum poſteriore paucis aget prius, tum de priore pluribus libris. Has etiam *abſolutas* dicunt, non quod nulla ex iis relationem importet, nam impenetrabilitas relationem quandam habet particularum materiæ ad ſe invicem, ut conſtat, & gravitas, ut infra videbimus, ſed quod ad noſtros ſenſus non referantur.

Porro nihil aliud adhuc detectum eſſe, affirmat, quod ad eſſentiales corporum proprietates pertineat; unde iterum concludit, plurimum nos a cognoſcenda corporum natura diſtare. Ego autem & illud omnino a nobis ignorari arbitror, an eæ, quas

Munus, uti multas extendant undique partes
Per loca multa, queant ut eædem ne penetrari
Partes, & plures una in ſtatione teneri,
Motibus omnigenis etiam eſſe, atque apta figuris;
Inquires porro quæ tutemet omnia mecum;
Adde his præterea grav ia eſſe, & inertia cuncta
Corpora; quod nuper certa ratione repertum eſt,
Et quod perſpicuum tibi poſt faciemus, ubi ante
Conſtiterit, quæ vis hoc nomine ſubſit utroque.
Nec jam ultra prodire datum eſt: quis prendere poſſit
Corpoream quantum ad naturam percipiendam
Reſtet adhuc? quantum in medio quantumque relictum?
Nempe hic immenſo diſtenditur æquore pontus,
Et non tranando denſantur gurgite fluctus.
Nos levibus cimbis ſat erit, ſi littora propter
Currimus, & tutis legimus conchilia ripis;
Ne nimium avectos pelago nox occupet horrens
Nimborum, & magnum mare fluctibus obruat atris.
Non * eſt propterea tamen, ut natura ſagaci

Ve-

quas nominavi, ad eſſentiam materiæ pertineant, an proprietates illius ſint ab ea ſeparabiles, an etiam a pura pendeant Conditoris ſupremi lege. Nos ſane eaſdem de ipſa ideas haberemus, quocumque ex iis modis ſe res haberet.

* Quamvis intrinſecam corporum naturam intueri non liceat, non eſſe abiiciendum affirmat Naturæ inveſtigandæ ſtudium: poſſe ex externis illis proprietatibus plures detegi in dies: id ipſum ſummæ laudi eſſe. Ideam ſane, quam habemus confuſam ſubſtantiæ eas habentis proprietates, proprietatibus ipſis auctis, extendimus.

Rem illuſtrat aptiſſimo exemplo ejus ſubſtantiæ, quam aurum appellamus, ac ſeriem proprietatum eo ordine proponit, quo ipſas detectas eſſe veroſimile arbitratur; colorem fulvum, pondus graviſſimum, ductilitatem, fuſilitatem, quod in fuſione nihil amittat, quod rubiginem non contrahat. Diu his tantummodo proprietatibus auri ſubſtantiam contineri eſt creditum. Sero additum, ſolvi per illam, quam dicunt aquam regiam, & præcipitari immiſſo ſale.

Porro & aliæ ſupererunt plurimæ ejuſmodi proprietates olim fortaſſe detegendæ: quo plures detegimus, eo plus ad confuſam illam naturæ auri cognitionem accedimus; a clara, atque intima ipſius naturæ contemplatione adhuc abſumus. Idem, quod in hoc vidimus peculiari corpore, de corporis in genere natura dicendum, affirmat. Inveſtigandas proprietates, quibus detectis, illum intimum proprietatum fontem attingi nunquam poſſe: nil niſi inania proferri vocabula, ubi intimæ proprietates inveſtigantur.

Quid autem, ſi partim obſervatione, partim ratiocinatione adhibita con-

ſtaret

Veſtigari oculo non debeat, ingenioque;
Quamquam etenim illius ſecretos viſere lucos,
Abductamque domum, fontes & adire repoſtos
Non datur, Heſperidum poma ut ſervata dracone
Pervigili; huc illuc obeundo, qua datur, atque
Omnia tentando eſt aliquid decerpere ſemper.
Ille decus, nomenque refert, ille anteit omnes,
Jam notis aliquid qui adjecit, pluraque vidit
Officia, & vires, quæ cunctis rebus inhærent,
Atque ita majorem convexit mentis opum vim,
Amplior ut cumulus, numeruſque ſit auctior ejus
Notitiis: age ſis exemplo hæc percipe vero.
Cum fuit inventum primò mortalibus aurum,
Fulva putabatur tantùm, rutilique coloris
Res, ſiquidem prius eſt oculis, quàm cognita tactu.
Quæ deinde manibus tractata, graviſſima multo eſt
Deprenſa ante alias, ſed non ita dura; ſub ictu
Nam potuit valido ferri in quaſcumque figuras
Deduci facile, & flexu quocumque plicari:
Tempore poſt aliquo paulatim his addita quædam:
Nam labefactari, validiſque liqueſcere flammis
Conſpectum eſt aurum, ſi quando incendia longa
Ferret, & in flavas corruptum ſolvier undas:
Quin etiam, flammis cum fuſum eſt, atque liqueſcens,
Ipſum in particulas tenues, fumoſque vaporum
A ſe nulla vi divelli, ut plurima, poſſe,
Poſt flammas & idem pondus ſervare rapaces,
Quin etiam nulla purum rubigine tingi,
Sordibus & nullis nativam offundere lucem.

Præ-

ſtaret demum materiam homogeneam eſſe, ac omne diſcrimen inter corpora provenire a forma, nexu, viribus, & motibus particularum, quæ ſint intima origo ſenſibilium omnium proprietatum? Ea noſtros ſenſus non alia effugiunt ratione, niſi ob nimis exiguam particularum molem, nec noſtræ mentis vim, niſi ob ingentem ipſarum multitudinem, & ſublimiſſimam licet communem virium legem, quibus fit, ut ad infimam ſingularum ſpecierum compoſitionem cognoſcendam adſpirare non poſſimus. At generalium corporis proprietatum, & generalium diſcriminum explicationem in libro 10. ex intimis iis principiis petitam exhibebimus, fortaſſe non infeliciter; particularium corporum textum olim cognoſci difficillimum quidem eſſe arbitror; prorſus impoſſibile affirmare non auſim.

Interea ſpecificas naturas æſtimamus, & diſtinguimus a collectione illa externarum proprietatum, in quo plurimum confert ordo, quo dete-

gun-

Præterea, quoniam his inventis tempore longo
Nil fuit adjectum, nihil addi poſſe putatum eſt.
Tot variis auri tentata per omnia demum
Cum fuerit natura modis (ut ſcilicet omnes
Semper erant avidi mortales divitiarum)
Extudit hoc tum fera dies, candente receptum
Ut limpha, Regis quam pulchro nomine dicunt,
Aurum ſolvatur paulatim, oculiſque, manuque
Mixtum ab ea nequeat ſecerni; immiſeris at ſi
Forte ſalem, magno ſe pulveris agmine deorſum
Præcipitat ſubito, vincliſque tenacibus exit.
Ergo quandoquidem naturæ nunc mage multo,
Quàm quondam, fulvi noſcendæ accedimus auri,
Et mage fors aliis detectis progrediemur
Poſt labente die, atque aliis ditabimur uſque
Officiis, ejus licèt in penetralia nunquam
Admiſſi; ſic & generatim corporis ipſam
Naturam per certa ſequi nos munera? vireſque
Eſt opus, & præſto quæ ſunt, ſubjectaque noſtris
Senſibus, aut quæ ſe vario diſcrimine produnt,
Scrutari, & ſemper majores ducere prædas,
Quæque juvent animum, ſpoliis diteſcere captis
Paulatim, & fines impune accedere ad ipſos;
Non inferre gradus intro, regnoque potiri
Audendum tamen; eſt nulli expugnabile regnum:
Illudunt variæ ſpecies, ſimulacraque rerum
Pro rebus captantur inania, fictaque monſtra,
Fictæ arces, vani referuntur deinde triumphi,
Structaque Theſalico veluti ſtant omnia cantu.

Jam

guntur. Si quædam collectio, quæ ſola innotuerat, in aliis inveniatur ſimul cum nova quadam proprietate conjuncta, in aliis fere æquali numero cum alia diverſa; eam, quam pro ſpecie infima habebamus, pro genere quodam habemus illas ſub ſe ſpecies continente, & nomen, quod prius habuerant, pro utraque retinemus. Si diu invenimus conjunctam ubique cum aliqua nova, deinde vero alicubi multo poſterius inveniatur ſine illa nova; tum, nova illa jam in naturæ ideam admiſſa, hanc ſubſtantiam ea carentem ab ejuſdem natura arcemus, nec ipſi id nomen tribuimus. Si nunc inveniretur maſſa, quæ ceteras omnes enumeratas auri proprietates haberet, ſed ab aqua regia non ſolveretur, eam non eſſe aurum diceremus. Si initio compertum eſſet, alias ejuſmodi maſſas ſolvi, alias non ſolvi per aquam regiam, ſed per alium liquorem, & utrumque in æquali fere earum maſſarum numero notatum eſſet, putatum fuiſſet binas eſſe auri ſpecies, quum altera alterius liquoris ope ſolveretur.

Jam [a] præter, ſupera quæ corporis enumeravi
Conjuncta (huic ſiquidem junguntur ſemper, & hærent)
Munera; ſunt itidem, ſimili ratione vocare
Quæ conjuncta queas, natura ut Temporis, atque
Eſt Spatii; quoniam corpus conſtare profecto
Non queat ullius ſpatii, vel temporis expers.
Quare operæ pretium eſt naturam inquirere utramque
Corporis, & ſpatii, atque aliis conjungere rebus.
Atque ea quiſque ſibi quamquam manifeſta reatur
Eſſe; at ſi verbis aliis rem pandere tentet,
Hæret in ambiguo, & fraudum videt omnia plena;
Temporis, & ſpatii donec ratione reſolvat
Notitiam gemina, & diſtinguat nomina rerum;
Quippe recenſeri natura hæc utraque partim
A nobis poterit, velut in ſe eſt, veraque, rebus
Scilicet a cunctis ſecreta, abductaque: partim
Ipſa eadem poſcit ſpectari, in rebus ut extat,
Afficit & noſtros ſenſus, & credita vulgo eſt.
[b] Et primò veram, velut in ſe eſt, ſi tueare
Naturam ſpatii, diſtare a corpore noſcas;

 Non

a Difficillimam omnium metaphyſicarum quæſtionem aggreditur de ſpatio ac tempore. Exponam hìc, quæ ipſe, ex Newtono potiſſimum, & Lockio decerpta, profert; in ſupplemento autem meam de re tota ſententiam aperiam. Ea corporis proprietatibus abſolutis præmittit, tum quod corpus quodlibet, ut cætera omnia, quæ exiſtunt, alicubi eſſe debet, & aliquando, tum quod ad ipſas proprietates intelligendas neceſſario requiruntur.

Porro in ipſo exordio ſatis eleganter exprimit illud *Auguſtini* de ſpatio & tempore, *ſi me interrogas, neſcio, ſi non interrogas, ſcio*. Confundi autem affirmat omnia, niſi diſtinguatur ſpatium abſolutum, ut eſt in ſe, a relativo, ut a nobis cognoſcitur.

b Spatio abſoluto ſuam tribuit naturam a corporis natura diverſam, ac exponit, in quo conveniant, in quo diſcrepent. Non eſt impenetrabile, ut corpus; partes habet, ut corpus; ſed illæ partes non poſſunt a ſe invicem avelli, & hiatum relinquere, ut in corpore. Hinc eſt ubique ſui ſimile, eſt immobile, eſt continuum: eſt extenſum, ut corpus, ſed limites non habet, ut ipſum, ac quoquo verſus infinitum eſt.

Concludit videri ejus naturam per ſe ſubſiſtere, cum a corpore diſtinguatur, & vel ſine ipſo ſubſiſtat. At graviſſima occurrit difficultas; quod facile inde etiam fiat tranſitus, ut æternum ſit, & increatum. Sunt qui creatum eſſe velint, & eſſe capacitatem quandam recipiendorum corporum, quid tamen ibi, ubi eſt ſpatium, haberetur, ſi ipſum ſpatium creatum non fuiſſet? ſi ſpatii locus ipſo ſublato nullus supereſt, nullus itidem ſupererit corporis locus ipſo ſublato.

Alii

Non etenim ſolidum eſt, & non penetrabile; namque
Rem prohibere nequit per ſe tranſire meantem;
Aſt, ut corpus, habet partes, ſed tempore nullo
Mutua quæ poſſint a ſe disjungi, & abire
Diverſùm, & ſeriem diſrumpere continuatam;
Proinde ſui ſimile eſt, immobile, continuumque,
Quodcumque eſt ſpatium, pariter quoque, corpus ut omne,
Extenſum eſt, uſquam at nullo ſe limite finit,
Immenſumque plagas ſeſe protendit in omnes.
Per ſe igitur ſpatium quadam ratione videri
Eſſe queat nobis, nam vel ſine corpore conſtat.
Tempus * item per ſe quadam ratione videri
Cur non eſſe queat? non velox, atque remiſſum eſt,
Sed ſibi par ſemper, ſemper pede labitur æquo.
Propterea nullis unquam eſt variabile rebus.
Et quamvis nequeant partes ſimul eſſe, ſed uni
Altera perpetua ſerie ſuccedat, earum
Omnis uti conſtet ſumma infinita; neceſſe eſt,
Infinitum, & perpetuum, æternumque ſit illud;
Et partes habeat pars quælibet infinitas
Ejus, ut & ſpatii, ſemper ſine fine minores.

Et

* Alii ſpatium dicunt eſſe Divinam immenſitatem. Sed ea partes non habet, quæ neceſſariæ ſunt, ut alia alibi ſint, non omnia eodem loco.

Alii dicunt ſpatium non eſſe rem, ſed medium quid inter rem, & nihil, ut Auguſtinus videtur innuere confeſſionum l.7.c.1. ubi ait *nihil mihi videbatur, ſed prorſus nihil, ne inane quidem*; ac apud Seneeam memini me legiſſe *ſextum genus eorum eſt, quæ quaſi ſunt, tanquam inane, tanquam tempus*, quibus conſonant, qui dicunt eſſe *ſpatioſum nihil*. At ii mihi quidem videntur in verbis ludere. ſi idem ſit *nonnihil*, *ac res*, res erunt profecto in eorum ſententia; ſi aliud nomine *rei* intelligatur, aſſumatur vox aliqua, quæcumque ſit, quæ generaliter exprimat *nonnihil*; & ea adhibeatur. Mihi quidem ſummam ſemper difficultatem præſeferet *nonnihil æternum*, *neceſſarium immenſum* a Deo diſtinctum, potiſſimum cum, ut in ſupplemento oſtendam, ſine ſpatio abſoluto, continuo, æterno, infinito, quod ſublatis corporibus ſubſiſtat, omnia commode explicari poſſint.

a Conformem de tempore abſoluto ſententiam profert, quod ſuam habeat naturam, quam exponit. Quod uniformiter fluat, immutabile ſit, partes habeat infinitas numero, & eſſentia ſua ſibi mutuo ſuccedentes, ſit infinitum, perpetuum, æternum, & partes habeat in infinitum diviſibiles.

Concludit eleganti relatione temporis, & ſpatii; ut nimirum partes finitæ infiniti ſpatii ſunt loca corporum, a quibus occupantur, ita & partes finitæ infiniti temporis ſint quædam temporaria veluti loca rerum, quæ exiſtunt.

Et velut immenſi ſpatii cum quaslibet ipſi
Concipimus partes finitas, quid loca conſtent,
Corpora queis ſita ſint, vel poſſint eſſe, videmus;
Temporis immenſi finitas ſic quoque partes
Haud mile cunctarum dicemus nos loca quædam,
Quæ durant, rerum, vel queis durare daretur.
At quoniam [a] hæ partes, niſi tantùm mente, videri
Temporis, & ſpatii nequeunt, neque ſenſibus ullis
Diſcerni inter ſe, & noſtris non ſenſibus uti
Difficile eſt nobis, & non impellier inde;
Propterea a veris longe confingimus ipſi
Diverſas partes, & quas ſentire queamus.
Et primo ſpatium vulgo, ſpatiique vocamus
Partem aliquam, ejuſdem certam, quæ mobilis extat,
Menſuram, certoſque ſitus quæ ſervat ad ipſa
Corpora, queis noſtros per ſenſus jungitur apta:
Hac, quantùm geminæ diſtaut, inquirimus, urbes,
Quantum & terrai patet intra viſcera hiatus,
Nubilaque ipſa ſuper tolluntur, & ardua cæli
Sidera, & a lævis quid partibus, oppoſitiſque,

 Quid

a Cum abſolutum ſpatium ſub ſenſus non cadat, & nos ideis per ſenſus habitis plerumque utamur, idcirco, ait, nos abſoluto ſpatio ſubſtituere aliud quidpiam, nempe menſuram ſenſibilem, & mobilem ejuſdem ſpatii, quæ menſura habet certam relationem tum magnitudinis, tum poſitionis ad corpora, quibus aptatur, ut ſunt palmi, pedes, paſſus, decempedæ, milliaria, quibus metimur intervalla, ſeu partes ſpatii abſoluti interiacentes inter partes eas ejuſdem ſpatii, quæ hic & nunc a binis corporibus occupantur, ac poſitione ſuperficiei terræ reſpectu interiorum ipſius viſcerum, vel reſpectu aeris & cæli, quod ſuſpicimus, vel poſitione naturali capitis reſpectu pedum definimus, quid ſit eſſe ſupra, quid infra, & poſitione noſtrorum brachiorum, quid ſit lævum, quid dexterum.

Porro licet hæc ſenſibilis menſura ſpatii congruat cum ipſo ſpatio, tamen non ſunt unum, & idem. Tranſlata enim tellure, mutatur ſpatium, quod campus aliquis occupat, menſura autem ipſius non mutatur, eodem enim eadem decempeda vicium numero eidem campo applicabitur. Hæc ipſe in hac ſententia, quod alii in aliis aliter explicant.

De his omnibus plura in ſupplemento: interea hìc illud omnino notandum; ſpatium, & tempus continuum non conſtare punctis, & momentis indiviſibilibus, ſed ſpatiolis, & tempuſculis continuis itidem diviſibilibus in infinitum. Puncta autem, & momenta prorſus indiviſibilia quidam termini ſunt inter bina continua ſpatia, vel tempora ſe immediate excipientia, quæ non puncti, vel momenti repetitione, ſed fluxu continuo generari intelliguntur, & quidem in ſpatio, puncti fluxu lineam, lineæ fluxu ſuperficiem, ſuperficiei fluxu ſolidum.

Quid ſuper, atque infra, quid & ante, retroque locari eſt.
Quantumvis ſpatio ſpatii menſura, locique
Congruat; at non eſt eadem res ſemper utrumque:
Quandoquidem, tellus cælo ſi noſtra vagatur,
Aeris hoc lati ſpatium, quo cingimur omnes,
Nunquam perſtat idem; ſed parte ipſius ab una
Inque aliam, inque aliam cum terra, & tenuibus auris
Commigramus; at eſt nihilo minus una, eademque
Menſura; & quæ ſe late per jugera centum
Ante extendebant, vel paſſus mille, pedeſve
Æquabant totidem, aut lapidis, jactumve ſagittæ,
Poſt eadem ſervant etiam intervalla, ſituſque,
Finibus atque iſdem perſtant, & limite eodem.
Hinc [a] facile eſt, quoniam menſura refertur, & hæret
Corporibus, ſpatii naturam, & corporis unam
Credere, & unam rem ſignari hoc nomine utroque:
Illuſitque virum hic doctis quoque mentibus error
Sæpe, etiam qui nil tribuebant ſenſibus ipſis,
Ferre & notitias veri rebantur ab ortu;
Non minus ad ſenſus referebant ſe tamen ipſos,
Ad ſuſpecta ſibi & loca fraudum plena relapſi.
Uſque adeo rarum eſt noſtris non ſenſibus uti
Rerum in judiciis, mentemque haud inde moveri.
Percipimus [b] porro Tempus, ſentimus ubi intus

Noti-

a Hinc autem, nimirum ex eo, quod animadverſum non ſit diſerimen inter diverſam naturam ſpatii abſoluti, & menſuræ mobilis, quæ ipſi ſpatio congruit, factum, affirmat, ut præjudicio a ſenſuum uſu derivato hæc cum illo confuſa ſit, etiam ab iis (ut a Carteſianis, qui ſolum ſpatium relativum agnoſcunt) qui omnium maxime prædicant cavendum diligenter a præjudiciis ſenſuum.

b Explicata ratione, qua ſpatium cognoſcimus, aliam exponit, qua cognoſcimus tempus, cum itidem temporis abſoluti ideam immediatam habere non poſſimus. Affirmat igitur, ſucceſſione idearum noſtrarum nos tempus cognoſcere. Nos perpetuo fluxu percipimus in nobis idearum ſucceſſionem multiplicem: Dum eas reflexa mentis acie intuemur, cognoſcimus nos exiſtere, ac per eas directè novimus exiſtere multas res alias extra nos; tempuſcula vero, quibus ſingulæ ideæ durant, habemus, ut ſupra monuimus, pro momentis. Sentimus intimo ſenſu intervallum temporarium inter ideas disjunctas, ut oculis intuemur intervallum locale inter bina extrema decempedæ. Illud intervallum æſtimamus a multitudine potiſſimum intermediarum idearum, & id ipſum intervallum applicamus rebus per ideas cognitis, quarum duratio in eo ipſo nobis eſt ſita.

Ubi abrumpitur hæc idearum ſucceſſio, vel potius ubi deeſt reflexa intuitio idearum intermediarum, ſive

id

Notitias aliis alias ſuccedere ſemper
Mentis notitiis, ſeque inter nectier omnes
Continua ſerie, & conſtanti denique fluxu.
Propterea quid erit nobis durare, niſi ipſa
Noſtrarum inter ſe diſtantia notitiarum,
Nimirum ſibi quæ ſuccedunt ordine quodam?
Significatur ab hoc nobis exiſtere noſmet
Continuò, res & nobiſcum exiſtere multas,
Notitiis quas cum noſtris ſimul eſſe tuemur,
Aera nimirum, terras, atque æquora ponti,
Et nemora, & montes, & flumina multa, lacuſque,
Urbes, & late populis florentia regna.
Si quando tamen hæc ſpecierum abrumpitur ipſa
Mentibus in noſtris ſeries, ut nulla priorem
Excipiat demum; quod fit plerumque, ſopore
Cum laſſata jacent alto, reſolutaque membra,
Nec mentem vanis illudunt ſomnia formis:
Tum ſubitò nobis tempus ceſſare videtur,
Ut noſmet durare nec ipſos percipiamus;
Nox neque momento longiſſima longior uno eſt,
Horaque ſopitis citius non præterit anno;
Temporis & punctum, quo primùm humentibus alis
Incubuit ſomnus, cum tempore continuatur,

Quo

id fiat, quod ex ceſſent, ut fortaſſe aliquando in profundiori ſomno, ſive quod ipſæ directæ ideæ nimis debiles ſint, & languidæ, ut in ſumno graviori nonnulli arbitrantur, ſive quod ipſæ ideæ directæ nimis e contrario vividæ ſint, & totam occupent mentem, ut in profundiſſima meditatione, intermedium illud omne tempus habetur inſtar puncti. Hiatus hic idearum, quæ vel non adſunt, vel mentis aciem reflexè non impellunt, non cadit ſub ſenſum mentis, ut ſub oculos cadit hiatus inter extremas decempedæ partes, ſi forte medium nigerrimum ſit, vel etiam penitus ablatum concipiatur, cum nimirum extremorum imago pingatur in partibus oculi habentibus partes alias intermedias: quamquam in oculo etiam intermediorum defectus intervalli apparentis magnitudinem minuit.

Porro hiatus hic idearum reflexè perceptarum fit in exemplis omnibus a Noſtro adductis, in ſomno carente ſomniis, in profunda ejuſdem rei meditatione, ubi rerum ideas habemus, quæ nobis plurimum placeant, potiſſimum ſi continua variatio, ut in ſpectaculis, & ludis, aciem mentis directè defigat, nequid effugiat. Sic oratores quidam, quidam libri, picturæ quædam ita defigunt animum in re, quam per verba, vel colores obiiciunt animo, ut actionem, elegantiam ſermonis, picturæ artificium non advertamus.

Contra vero in iis, quæ plurimum diſplicent, quæ torquent, mens ab obiecto ideæ avertitur, quantum poteſt, ad ideam ipſam, & idcirco tempus apparet diuturnum. Unum

Quo demum ſe mens expergefacta recepit.
Tum quoque qui obtutus animi re fixit in una,
Ad ſuccedentum ſæpe adventumque, fugamque
Formarum intra ſe ut nequeat convertere eoſdem,
Ire putat ſolito citiorem horamque, diemque, &
Solis equos breviore viam cum carpere gyro
Per cælum, aut ſtimulis queritur flagrantibus ictos.
Otia ſic multi naturæ indagine fallunt,
Aut aliis rerum ſtudiis, quæ ſponte ſequuntur:
Et cui fœmineo eſt adſtrictum cor in amore,
Nocte ſedens, carique adſpectans oris honorem,
Auroræ ſubitas nimium indignatur habenas;
At placuere quibus ludi, ſpectacula, plauſus,
Omnia prætereunt celeri hæc ſublapſa volatu:
Nam cum res aliqua pectus dulcedine tangunt,
Interea ſpecies multo quanquam agmine denſæ
Prætereant animo, numerus perceptus earum
Non erit; afficiet, ſed inobſervata latebit
Vis ea; nam retinet mentem, abducitque voluptas.
Qui contra morbo lateris tentantur acuto,
Curarum aut ſævis ægreſcunt morſibus intus
Inſomnes, triſtique agitantur pectora fluctu,
Illis tarda dies, ſol cælo figitur alto
Torpens, vixque mora evolvuntur tempora multa,
Nam tum quoſque vigil crebros mens percipit ictus.
Jam[a] non ipſa diu mens unam continet unquam
No-

Unum addo, ad hoc, ut tempus nobis diuturnum appareat, requiritur, ut eo momento temporis, quo id apparet, habeatur vi memoriæ omnium ſimul illarum præteritarum idearum aliqua imago. Quid ſi in parte aliqua cerebri certo ordine impreſſiones fiant aliæ poſt alias ad memoriam neceſſariæ, & localis earum ordo, ac diſtantia ſimul perſpecta durationis excitet ideam?

a Ideam quamlibet, affirmat, non diu perdurare, ſed alias aliis ſuccedere continuo, licet nos non ſemper intueamur reflexè ſingulas. Tempuſculum, quo unica idea duret, videri nobis punctum temporis indiviſibile, quod momentum dicitur. Adhuc tamen eſſe non indiviſibile momentum, ſed tempuſculum diviſibile in infinitum, quod particulas habeat minores, ac minores in infinitum ſine ulla ultima; non eſſe autem, ſaltem dum vigilamus, in diverſarum idearum duratione magnum diſcrimen.

Hæc hypotheſis commode explicat, quo pacto animantibus, quorum breviſſima eſt vita, vita ipſa æquè diuturna videri poſſit, ac noſtra nobis. Addi poſſet & illud, breviore in pueris ideas durare tempore, quam in viris,
vel

Notitiam intra ſe, quin protinus altera ſurgat,
Protinus atque animo vigili dein exoriatur
Altera perpetuis vicibus (licet ille profecto
Obtutum non ſæpe vices convertat ad iſtas
Unam rem verſans aliquam); nos dicimus illud
Momentum, ſpecies quo ſcilicet una videtur
Tantum animo, nec adhuc deceſſerit advenienti,
Momentum, quo non pars temporis ulla videri
Eſſe minor queat, & breviori tranſvolet ictu;
Apparet mora nulla, & puncto ſiſtit in uno:
Quamvis revera minimas has temporis infra
Particulas aliæ quoque ſint ſine fine minores,
Atque aliæ, non ut minima ulla, vel ultima conſtet.
Succedunt igitur ſibi certo tempore mentis
Notitiæ, quo non multo mora poſſit earum
Tardior, aut citior nobis vigilantibus eſſe.
At [a] varios rerum quia motus cernimus extra,
Atque ex hoc opus eſt ſpecierum continuatam
Prodire in nobis ſeriem (quæ temporis ipſa
Notitia eſt), fit, uti referamus motibus illam,
Et tantum a rebus motis haurire putemus:
Acſi nos, ſtarent ſi res, non temporis ullam
Intus haberemus ſpeciem; cum tempora nobis

At-

vel ſenibus, quibus ætas celerius effugit. At mihi quidem pura videtur hypotheſis, & ideas paulatim advenire per gradus omnes intermedios, ac in alias transformari, potius crediderim, nec niſi unico indiviſibili momento temporis eſſe ejuſdem formæ: moram vero ſenſibilem oriri a numero ſtatuum, in quibus ad ſummam quandam claritatem deveniunt, & advertuntur.

a Hinc ad menſuram temporis ſenſibilem gradum facit, quam deſumimus a motu corporum. Cum continua mutatio loci fiat in motu, mutatio continua idearum ſuccedit. Illa idcirco, quæ ſub ſenſum cadit, & huic reſpondet, pro tempore aſſumitur a nobis, tanquam ſi immotis corporibus nullum ſit tempus; Cum tamen ideæ ſolæ temporis ſenſibilem durationem referant, quod æque excurrat corporibus immotis, ac motis.

Pro menſura temporis aſſumi ſolet motus ſolis, motus indicis in horologio, & alii ejuſmodi motus. Ut ii accuratè referrent tempus, deberent eſſe æquabiles. At ipſe ſolis motus inæqualis omnino eſt. Sive aſſumantur intervalla temporum inter occaſum, & occaſum, quæ ſunt nobis in Italia dies, ſive a meridie ad meridiem, quæ ſunt dies Aſtronomis, & univerſæ Europæ, habetur inæqualitas quædam ibi major, hic minor, ſed ſemper aliqua, ob inæqualitatem motus proprii ipſius ſolis in Ecliptica, & diverſam diverſis anni temporibus ejus inclinationem ad motum diurnum, qui cenſetur æquabilis.

Ho-

Significent ipſæ ſpecies, rerumque figuræ,
Et parili duret res mota, quietaque pacto.
Ducimur huc etiam noſtris a ſenſibus, atque hinc
Conjungi haud aliis niſi motis tempora rebus
Credimus: atque ideo metimur tempora motu:
Inde diem ſolis curſu finimus, & annum,
Temporis atque alios ſtellis labentibus orbes.
At non eſt tibi tuta vel ipſa hæc ſemita Phœbi,
Qui non æquales nobis annoſque, dieſque
Partitur; modo nam citior, modo ſegnior idem eſt.
Jam quid erit, ſi ſolis iter, ſi ſemita cæli
Illa ingens curſu certe haud contunditur æquo,
Ullis, jam quid erit, quod nos in motibus uſquam
Ducier æquali noſcamus denique lapſu,
Prendere poſſimus menſura ut tempora certa?
Tardior eſſe poteſt nam motus, & ocyor omnis,
Temporis aſt eadem eſt ſemper fuga; nec mage durant,
Nec minus omnes res, at perſtant eſſe profecto,
Seu nulli exiſtant motus, tardive, citive.
Rebus [a] ab his, ſpatium quibus hactenus, eque volutum
Tem-

Horologia inæqualitatem itidem habent aliquam, cui Hugenius pendulo adhibito, & adjecta Cycloide remedium attulit ejuſmodi, ut adſcribere non dubitarit *Solem audet dicere falſum*; at etiam iis calor, ac frigus obeſt; retardantur enim productâ penduli virgâ per calorem, accelerantur eâdem contractâ per frigus. Alia ſubinde diverſorum metallorum combinatione remedia parata ſunt; ſed motum ita accuratè æquabilem, ut diu temporis fluxum accuratè referat, ego quidem ſperare non auſim.

a A ſpatio, & tempore pronum eſt tranſire ad motum; is enim requirit tempus, & ſpatium, cujus ſingulæ partes a corpore percurrantur ſingulis partibus illius. Porro motus alius eſt abſolutus, quo corpus mutat partes ſpatii abſoluti, alius relativus, quo mutat diſtantiam, & poſitionem ad alia corpora. Ille ſub ſenſum non cadit, cum ſpatium abſolutum non cadat ſub ſenſum, cadit hic unus, cujus exemplum vulgatiſſimum profert Noſter e navi deprompturn. Gubernator ad clavum ſedens, quieſcit reſpectu navis, & ſedentium in navi; licet cum navi abſolutè moveatur: Nautæ curſitantes per tranſtra moventur ſimul & motu abſoluto cum navi, & relativo reſpectu navis. Si quis e prora in puppim tenderet ea velocitate, qua navis progreditur, is, terra quieſcente quiete abſoluta, quieſceret, & e littore ſpectantibus per tubum appareret immotus, ac conatum exerceret non ad motum abſolutum in ſe gignendum, ſed ad impediendam abſolutam tranſlationem cum navi.

Porro plurimi etiam motus poſſunt ſimul componi, ut ſi terra cum mari transferatur circa ſolem, navis moveatur per mare, nauta excurrat per navim, horologii index moveatur in nau-
tæ

Tempus item eſt nobis, faciliſque breviſque propinquam
Tranſitus ad motus naturam perſpiciendam eſt.
Quare age, per ſenſus itidem cognoſcere veros,
Non erit, ut poſſis motus, & prendere mente;
Nam quoniam motus fit, ubi tranſmigrat ab uno
Corpus quodque loco, atque alia ſe parte receptat
Immenſi ſpatii; has ipſas cum cernere partes,
Aut loca non poſſint oculi, quod diximus ante;
Eſt opus, ut nequeant quoque motus, hoc genus, omnes,
Mutatos regione ſitus & cernere inani.
Vulgò at corporibus motum perhibemus ineſſe,
Mutari inter ſe cum cernimus ipſa viciſſim;
In ſumma contra ſed credimus eſſe quiete,
Cum ſervare ſitus tuimur ſeſe inter eoſdem.
Haud ſecus ac abies cum fertur adunca lacunas
Lapſa per æquoreas remis, velove tumente,
Dum ſedet ad clavum vigilans in puppe magiſter,
Creditur a nautis per tranſtra vagantibus una
In regione loci ſtare, immotuſque manere;
Qui loca cum navi permutat non minus ipſa,
Vel quoque cum terra, tellus ſi noſtra movetur,
Et circa ſolem ſeſe, & terreſtria transfert.
Proinde ſedens Tiphys puppi, aut Palinurus in alta
Motu corripitur gemino, & quo rapta per æquor
It ratis, & tellus quo ſeſe immota volutat
Per ſpatia; at nautis quoque tertius additur, illi
Dum peragunt juſſa, & nigra per tabulata vagantur.
Cunctis verus ab his oritur tum denique motus
Motibus, atque aliis, ſi in ſumma hac forſitan extant,
Quos neque nos oculis, nec noſcere mente queamus.
Ergo gubernaclum qui torquet, dicere poſſis
Expertem motus ſimul, expertemque quietis:

tæ pera, formica per indicem excurrat, & ita porro; motus formicæ componitur e motibus quinque, indicis e quatuor, nautæ e tribus, navis e binis. Idem etiam corpus dici poteſt ſimul & quieſcens, & motum, illud quidem abſolutè, hoc vero reſpectivè, vel utrumq; reſpectivè reſpectu diverſorum corporum, ut Gubernator ille quieſcit reſpectu navis, movetur reſpectu terræ.

Præterea notandum illud, poſſe corpus reſpectivè moveri reſpectu alterius vel per motum abſolutum ſuum, vel per motum abſolutum illius, vel per abſolutum utriuſque: poteſt utrumque moveri abſolute ſine ullo motu reſpectivo, ut ſi bini ſedeant in navi. Motus autem reſpectivus ſine aliquo motu abſoluto haberi non poteſt.

Ipſum ſi puppis referas ad ligna cavatæ,
Et ſimul ad terram, ſpatiumque immobile quod ſit.
Fallitur [a] idcirco, ſi ſolo talia ſenſu
Æſtimat, & motus ab eo mens colligit omnes.
Propterea valeas certa contendere contra
Num ratione, ea revera, quæ corpora conſers
Corporibus, viſiſve locis, immotaque cernis,
Eſſe immota, & prorſus ab omni parte quieta?
Quandoquidem immoti ſpatii quoque tum loca poſſunt
Mutari vera: ante oculos aut illa moveri,
Iſta quieſcere cum cernis, quis ſpondeat auctor,
Accidere hæc prorſus non contra, hæc nempe moveri,
Illa quieſcere, & immoti ſtatione tenere
Una ſe ſpatii? Quapropter ne tibi motum
Tum fieri tantum ſtatuas, cum a corpore corpus
Vicino, quod forte quietum fingis, abire
Aſpicies, aliique accedere deinde, quietum
Quod pariter ſpectes: neque enim ſpectare quieta
Illa ſat eſt, at prorſus uti, penituſque quieſcant.
Sic igitur quaſvis cum noſtro corpore partes,
Sic moto nucleum cum cortice, cum rate malum,
Aera cum tellure, opus eſt, fateare moveri.
At, veri [b] qui ſunt motus, exiſtere primum

Unde

a Iis omnibus perpenſis ſatis patet, jure Noſtrum concludere, ſenſus ineptos eſſe ad motum abſolutum æſtimandum; eum fieri poſſit, ut id, quod ab altero videmus recedere, immotum maneat motu abſoluto, quo moveatur illud aliud, quod idcirco nobis videtur manere immotum, quia reliqua omnia circum, & nos ipſi æquali motu tranſferimur. Sic & nobis, ut Virgiliano Æneæ, ſi *provehimur portu, terraqua urbeſque recedunt*.

Vocat autem ubiq; Noſter cum Newtono, & aliis pleriſque motum abſolutum tantummodo *verum motum*. Mihi quidem videtur vox *motus* in proprio ſenſu accepta reſpectivum potius motum, quam abſolutum ſignificare. Nomina ab Inſtitutoribus linguarum ſunt impoſita rebus, ut cognoſcuntur: Motus autem abſolutus vulgo ignotus eſt, & ſolus reſpectivus ſub ſenſum cadit: abſolutum motum Philoſophi ſoli, a ſenſibus mentem abſtrahentes, conſiderant. Idem dicendum de voce *quies*. Hinc nimirum propriiſſime loquitur, qui dicit, ſe immotum quieviſſe in puppi, licet cum navi excurreret motu abſoluto celerrimo.

b Viam ſibi ſternit ad oſtendendum, poſſe aliquando diſtingui motum abſolutum a relativo ratione, quam Newtonus propoſuit, in ipſo ſuorum Principiorom exordio, per vires nimirum, a quibus motus oriuntur, vel quæ oriuntur a motibus.

Orditur igitur ab hoc principio: motus abſolutos corporis, & motuum

muta-

Unde queant, porro mutarier unde, niſi ipſas
Per vires, quæ tum præſentes corpora turbant.
Deque ſui ratione ſtatus decedere cogunt?
Ergo qui motus nullis ſunt viribus orti,
Apparent tantum, nec re, ſed nomine conſtant.
Scilicet impreſſæ vires in corpora multa
Interdum efficiunt, aliud referatur ad illa
Si tum corpus, uti queat apparere moveri,
Stet licet, ut nautis monteſque, urbeſque recedunt,
Aut tardove, citove magis tranſire meatu.
Non igitur veros referendo noſcere motus,
Nam non apparent, qua ſunt ratione, valemus.
  Pluribus exemplis manifeſtum reddere poſſim
Hoc tibi, quæ conſtant quoque non incognita vulgo;
Certius at reliquis unum tamen accipe, quodque
Clarius ipſam rem, quam conor vincere, firmet.
E longo patulum vas pendeat, effice filo,
Contortum validis quod viribus uſque rigeſcat,
Quodque relaxari revolutos ante per orbes
Ne ſine, quam medium, vel ſi libet amplius, unda
Vas ſuper infuſa puer impleat; ilicet illud
Oppoſitos age per motus, ſpiraſque revolve:
Quæ faciant aliquo cieatur tempore labrum.

 Prin-

mutationes generari a viribus in id ipſum impreſſis: relativos nullam vim in eo corpore, quod relativè movetur, conjunctam requirere. Id quidem verum erit, ſi in corporibus admittatur vis inertiæ, ſive indifferentia ad motum, & quietem, de qua agemus infra.

Tum proponit experimentum a Newtono expoſitum Principiorum lib. 1. in Schol. poſt defin. 8. hiſce verbis. *Si pendeat ſitula a filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum a contorſione admodum rigeſcat, dehinc impleatur aqua, & una cum aqua quieſcat, tum vi aliqua ſubitanea agatur motu contrario in orbem, & filo ſe relaxante diutius perſeveret in hoc motu, ſuperficies aquæ ſub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis, at poſtquam vi in aquam paulatim impreſſa, efficit vas, ut hæc quoque paulatim moveri incipiat, recedet ipſa paulatim a medio, aſcendetque ad latera vaſis figuram concavam induens, & incitatiore ſemper motu aſcendet magis, & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo quieſcat reſpectivè.*

Hoc experimento poſito, ſic Noſter cum Newtono ratiocinatur. Aqua initio abſolutè quieſcens, nondum enim a vaſe motum communicatum acceperat, licet reſpectu vaſis motu abſoluto vehementi in gyrum acti, reſpective gyraret, nullam concipiebat ex hoc reſpectivo motu vim centrifugam, quæ, ut infra videbimus, ex rotatione oritur. Ubi autem & ipſa abſolutum cir-

Principio, velut ante, manebit plana ſuperne
Undai facies, licet & latera ærea propter
Raptentur, circumque ruant, immota quieſcet:
Labri circuitu ſed porro continuato
Paulatim incipient in gyrum vertier undæ;
Donec converſis cum labri deproperare
Parjetibus poſſint hærentes ſemper ibidem.
Tum ratione ſitùs æris latera omnia eadem
Reſpectant circum, motu omni proinde videri
Expertes poſſint, ea ſi referantur ad æra;
Et tamen e medio fugientes undique limphæ
In cumulum aſſurgent latera ad retinentia circum,
Quandoquidem in gyrum correpta recedere longe
Corpora nituntur, quod poſt tibi pluribus edam.
Primum at cum vires nondum unda receperat ullaŝ,
Tum neque non laterum diverſas tangere partes
Perpetuo, neque non diverſas æris & oras
Reſpicere, in veraque ſitus mutare quiete.
Quapropter non hic conatus pendet ab undæ
Reſpectu vario ad circumſita corpora, non hac
Propterea verus manavit origine motus.
Unicus hic certe eſt in moto corpore quovis,
At diverſa ſitus ratio extat corpora ſemper
Ad varia, & varii proin uno in corpore motus
Apparent, tamen effœti & ſine viribus ullis.
Quare [a] quæ varia poſſunt ratione referri,

Non

circularem motum accepit, vim centrifugam ſtatim contraxit, quæ cum cogeret niti a medio ad circumferentiam, induxit aſcenſum illum, & figuram cavam, quam retinuit, ubi jam reſpectu vaſis nullum habebat motum. Igitur non reſpectivus, ſed abſolutus motus cum vi conjungitur.

Hæc illi. At hoc argumentum nullum habet pondus, niſi vis ipſa inertiæ abſoluta ſtatuatur, de qua dicemus infra; neque enim vis centrifuga oritur ex motu curvilineo, niſi corpora natura ſua ad rectilineum determinentur. Deinde ſi terra abſolute moveatur, ille non erit circularis motus abſolutus, ſed admodum diverſus, & circularis erit ſolum reſpectu ipſius terræ. Et quidem ſi forte terra moveretur mota contrario, & æquali motui vaſis, aqua initio potius fuiſſet abſolutè mota, in fine abſolutè quieviſſet; quod ſi terra motum habuiſſee deorſum reſpectu noſtri, & ſitulæ; aqua in vaſe non aſcendiſſet, ſed deſcendiſſet minus, quam vas. Experimentum igitur multo plura requirit jam nota, quam ut in ipſo Mechanicæ exordio poſſit evincere, vim aliquam cum motu abſoluto, non cum reſpectivo conjungi.

a Concludit iterum, vulgum uti menſuris rerum ſenſibilibus, pro rebus veris, motibus nimirum reſpectivis pro abſolutis; difficile admodum eſſe diſtin-

Non ipſæ, quarum præmonſtrant nomina, res ſunt,
At quædam, ſenſu quæ percipiuntur, earum
Menſuræ rerum, veræ, erranteſve, ſed uſum
Ob longum in populo firmatæ; ſcilicet ille
Veris ſæpe quidem rebus permutat inanes.
 Propterea veros rerum cognoſcere nobis
Difficile eſt, atque a viſis dignoſcere motus;
At non Naturæ variam callentibus artem
Ingeniis id ſemper ab omni parte negatum eſt,
Partim per motus, quos poſſis ſubdere ſenſu,
Partim & per cauſas, effectaque, ſcilicet ipſas
Per vires, veros ad motus progrediuntur,
Atque ita, quos nequeant unquam ſentire, docentur.
 Verum, [a] quod ſupereſt, varios diſtinguere motus
Non tam difficile eſt generatim mutua, ſeque
Inter conferre, & metiri, & cernere ſeorſum.
Et primò motus quidam ſunt, qui ſibi conſtant
Æquales, properantque pari lapſuque, fugaque;
Lenti at ſunt alii magis uſque, magiſve citati.
Æquales tum ſunt illi, ſpatia æqua locorum
Æquis temporibus cum prorſus corripiuntur.
Protinus exoritur menſura hinc mobilitatis;

Si

ſtinguere motus abſolutos a reſpectivis, & id quidem vulgi captum ſuperare. Philoſophos autem rem obtinere aliquando per vires, quæ ſunt cauſæ, vel per vires alias, quæ ſunt abſolutorum motuum effectus.

Innuit in his methodum quandam, quam ibidem Newtonus proponit virium impreſſarum in alterum e binis globis reſpectivè gyrantibus, & filo connexis, ut ex fili tenſione innoteſcat quantitas motus adiecti, & comperto, qua parte vis eadem maximam tenſionem pariat, cognoſcatur, quæ partes in motu progrediantur, quæ conſequantur. Verum mihi quidem plurima occurrunt, quæ methodum ſuſpectam reddunt, & rei conficiendæ nequaquam idoneam; ac omnino arbitror, nullam eſſe artem, qua ſine hypotheſibus, immediatè per obſervationes diſcerni poſſit abſolutus motus a relativo.

a Jam varia motuum genera diſtinguit. Primo quidem motum æquabilem, acceleratum, & retardatum. Æquabilis eſt, cum æqualibus temporibus æqualia percurrunrur ſpatia. Æquabilis motus ideam celeritatis exhibet, quam etiam velocitatem dicimus, Noſter autem cum Lucretio *mobilitatem* appellat, quod probe notandum, ne confundatur cum ea facultate, quam habet corpus, ut moveri poſſit. Semper *mobilitatis* nomen pro *velocitate* uſurpat Noſter.

Porro velocitas eſt relatio in motu æquabili ſpatii percurſi ad tempus, quo percurritur, talis, ut eo major cenſeatur, quo majus eſt ſpatium, & minus eſt tempus. Hanc ego ſcholaſticorum vocabulo, barbaro quidem, ſed

ad

Si loca nimirum referas ad tempora, ſic ut
Quo fuerit ſpatium productius, & vice tempus
Mutata fuerit contractius, hoc tibi conſtet
Major mobilitas; producto a tempore contra
Illa remiſſior exiſtat, ſpatioque minuto.
Propterea breviore viam qui tempore eandem,
Aut, mage quæ longa eſt, in eodem tempore carpunt,
Præ reliquis laudantur equi, palmamque reportant
Curſores: animos ſpectantum a plauſibus acres
Exacuunt, quatiuntque jubam, inſultantque ſuperbi,
Dum per Olympiacos reſonat victoria campos.
  Ocyor at motus fiet, ſeu tardior idem,
Cum tibi perpetuo majora, minorave ſemper
Tranantur ſpatia æquali pro tempore; proinde
Mobilitas creſcat, vel diminuatur, oportet.
At metimur eam minimo tum in tempore quovis
Correpto ſpatio, minimo nam tempore lapſum
Augeri nihil, aut minui finxiſſe licebit;
Temporis ad primum minimi ſi ſcilicet ortum,
Auctum quidquid erit, referamus, quidquid ademptum.
  Denique ſe celerans æqualiter, atque retardans
Motus erit, paria æquali ſi tempore quovis
Incrementa fugæ, vel decrementa noventur;
Imparia aſt eadem ſi ſint, erit ille profecto
Motus inæquali celerans ſe, vel pede tardans.

Hic

ad res diſtinguendas apto, appellare ſoleo velocitatem *in actu ſecundo*, ſive *actualem*, quæ non habetur, niſi in motu æquabili, & requirit tempus continuum, nec in unico temporis momento haberi poteſt. Velocitatem autem *in actu primo*, ſive *potentialem* appello determinationem, quam habet corpus, percurrendi tantum ſpatium tanto tempore motu æquabili, niſi quid obſtet. Hæc vero in unico etiam momento haberi poteſt. Hæc diſtinctio binarum ſignificationum vocabuli *velocitas* omnino neceſſaria eſt ad evitanda plura errorum, & æquivocationum pericula.

Velocitatis menſura eſt ſpatium diviſum per tempus: de ipſa, & formulis inde ortis, ac theorematis ad eam pertinentibus in ſupplemento.

Motus acceleratus eſt, cum velocitas perpetuo creſcit; retardatus cum perpetuo decreſcit. In eo caſu actualis velocitatis menſura accurata immediate haberi non poteſt. Ut ea utcumque habeatur, concipitur ſingulis tempuſculis perquam exiguis motus, ut uniformis, tanquam ſi incrementa, vel decrementa velocitatis illius potentialis, quæ toto tempuſculo paulatim adveniunt, ſimul in ipſius initio advenirent tota, & ſpatiolum illud diviſum per tempuſculum aſſumitur pro menſura velocitatis actualis.

Quod ſi incrementa, vel decrementa celeritatis temporibus æqualibus æqua-

Hìc opus [a] eſt puncti nobis diſtinguere motum
(Puncti, quod pars eſt, vel fingier ultima poſſit
Corporis) a motu totius corporis ipſo.
Excipe ſed prius hoc animo memor, omnibus una
Materiæ e punctis, quæ ſunt conjuncta viciſſim
Inter ſe, quodvis unum coaleſcere corpus;
Proin quo punctorum numerus majorve, minorve eſt,
Hoc ſit corpus item quodvis majuſve, minuſve.
Corporis at moles & puncta receptat, & inter
Quantum puncta patet, quod inane eſt, quodve repletum
Eſt alienigenis rebus, quod denique cumque
Corporis externam faciem concluditur intra.
Protinus a numero punctorum, & corporis auctu
Percipies, quid ſit denſum: quod debet haberi,
Omnia ſi moli confers in corpore puncta;
Denſior illa tibi nimirum materies eſt,
Cui mage punctorum, contra minus augminis inſit.
Ergo [b] viæ ſpatio puncti cujuſque peracto

Me-

qualia adveniant, motus dicitur uniformiter acceleratus, vel retardatus, ſi inæqualia, difformiter.

Porro exemplum motus uniformis habemus facile in motu corporis admodum lævigati protruſi per planum horizontale, pariter lævigatum; motus uniformiter accelerati, vel retardati in aſcenſu, vel deſcenſu libero corporum gravium, difformiter accelerati, vel retardati, in aſcenſu, vel deſcenſu per canales curvilineos, ſi nimirum abſtrahamus animum ab omni telluris motu.

a Diſtinguit præterea motum corporis a motu puncti. Punctum dicit partem, quæ ſit, vel fingatur eſſe pars ultima corporis, in quam nimirum corpus ultimo reſolvitur, vel reſolvi concipitur. Ego quidem arbitror, corpus conſtare punctis prorſus inextenſis, a ſe diſtantibus, quemadmodum in pluribus jam diſſertationibus expoſui fuſius, & in 10 hujus operis libro diligentius exponam. Hinc mihi eſt pars ultima. In communi ſententia extenſionis continuæ concipiendæ ſunt particulæ quædam perquam exiguæ, & æquales, quæ hic pro punctis habeantur.

Horum punctorum, ad determinati corporis conſtitutionem pertinentium, numerus eam conſtituit, quam dicimus ipſius *maſſam*, ſive materiæ quantitatem. *Moles*, ut etiam *Volumen*, dicitur totum ſpatium extima corporis ſuperficie comprehenſum, ut includit ſpatiola vacua, vel etherogeneas etiam ſubſtantias intra poros incluſas. Ex idea maſſæ, & molis, oritur idea denſitatis, prorſus ut e ſpatio, & tempore, idea celeritatis. Denſitas dicitur eo major, quo major eſt maſſa, & minor moles, ac eam metitur maſſa diviſa per molem. De his pariter in ſupplemento, ut de pluribus etiam, quæ conſequuntur, formulis pariter, ac theorematis.

b Puncti motum definiri docet per ſolum ſpatium ab eo percurſum, quod

ha-

Metimur motum; quoniam ſed pendet ab ipſa
Temporis id ſpatium menſura, & mobilitatis;
Tempore metimur proin motum, & mobilitate,
Si tamen hæc eadem conſtet ſibi. Tum quia conſit
Pluribus e punctis corpus; jam motus in ipſo
Corpore tantus erit, quantus de motibus exit
(Sed ſibi qui conſtent æquales ſcilicet) ejus,
Queis ſe puncta cient nimirum, corporis unam
Omnibus in ſummam conjunctis: proinde movetur
Cum corpus; genus hoc, motus menſura profecto eſt,
Si toties repetas, quot ſunt in corpore puncta,
Temporis illius menſuram, & mobilitatis.
Demum ad tempus idem quoniam plerumque, vel æquum
Reſpicimus, motus cum motibus æquiparamus;
Propterea non hìc tempus plerumque putamus;
Dicimus atque illum prodire in corpore motum,
Quem gignat toties repetita, in corpore puncta
Quot ſunt, mobilitas; nimirum tantus is extat,
Quanto mobilitas reſpondet, materieſque.
Has [1] tibi dum rerum primas mea muſa recenſet
Notitias, quales nos intus habere neceſſe eſt,
Nequæ per ſenſus noſtros, per nomina rerum
Irrepant fraudes animo, verumque recondant;
Præſertim tibi, quid conſtent, quibus omnia fiunt,
Dum memoro, quæcumque cluent, loca, tempora, motus,
Ne nimium noſtris in verſibus eſſe querare
Aſperitatis, & illecebris, cultuque carere
Carmina, non aliis niſi mentibus apta ſeveris.
Nam ſi non vernæ rident per amæna vireta
Hìc florum ſpecies, ſi non & flumina currunt
Lactea, nec teneræ ludunt per prata puellæ:

Aſt

habetur multiplicando velocitatem per tempus: motus corporis totius, cum ſit ſumma motuum omnium punctorum, habebitur, ſi omnia æqualibus velocitatibus moveantur, multiplicatis invicem velocitate, tempore, ac ipſa maſſa.

Sæpe cum corporum motus conſideramus, abſtrahimus animum a tempore, quo durare debeant, quod quidem præſtamus, cum dicimus motum in corpore a viribus augeri, vel minui: tum vero tempus illud, quo motus duraret, nequaquam conſideramus, & motum æſtimamus a ſola maſſa in velocitatem ducta. Multiplicationem ejuſmodi ſatis explicat per illud *toties repetita .... quot.*

1 Animum ad ſeveriora præparat, & aſperiora, in quibus habendum præ oculis Manilianum illud *ornari res ipſa vetat, contenta doceri.*

Aſt aliquis tamen & rebus decor eſſe ſeveris
Creditur, & proprii manet ingens gloria cultus;
Primùm vera tibi ſi pandimus, atque ea porro
Ordine quæque ſuo manifeſta in luce locamus.
Haud etenim hæc nimio poſcunt perfuſa videri
Ornatu, qui vim rerum, & nativa retundit
Lumina: ſunt proprii nempe, ingenuique lepores,
Quod canimus, Veri, verbiſque his addere magnum
Pondus, & his poſſunt numeris decus: ipſe ſeveris
Proin aſſueſce modis, qui te per nubila raptent,
Aſtraque, ſub terras etiam, pelaguſque profundum
Omnia rimantem naturæ clauſtra latentis
Suavius, ac melius, quam ſi contingere tentes
Mollia Pegaſeis Permeſſi culmina pennis.
Quod [a] ſupereſt, exin ad cætera deveniendum eſt
Munera materiæ nobis, quæcùmque valemus
Detegere in rebus, ratio inviſendaque legum
Naturæ, queis cuncta vigent: ſed ne tua rebus
Arripiat quid in his mens, quo male tuta labaſcat,
Ante erit hìc nobis, quærendi quæ via veri,
Firmandum; quippe hoc vertuntur cardine cuncta:
Errandi vites hac ſcilicet arte pericla,
Quæ non effugere Viri, ſcrutarier iſta
Tempore qui a veteri tentarunt; proinde ruinam
Fecere in rebus naturæ perſpiciendis.
Nam multi [b] prius ad cauſas, & ſemina, & ortus
Prolapſi, quam vidiſſent, quid conſtet; id ipſi
Seu facerent tum decepti, ſeu ſæpe volentes
Decipere (interdum ut vana ſublimia corda
Ambitione rapi, & faſtu turbare videmus
Doctrinam); tantùm velabant omnia doctis,
Queis ignara ſolent captari pectora, verbis.
Has [c] alii fraudes pertæſi, & nomina vana.

a Ad propoſitas materiæ proprietates facturus gradum, monet in primis, philoſophandi methodum ſtabiliendam ante omnia, ne in errorem incidamus, ut alii plerique.

b Primos nominat veteres illos, qui ſine ulla phænomenorum obſervatione, ſine ullis experimentis Naturam explicare aggreſſi, ac inanibus quibuſdam nominibus contenti ſermonem quemdam Philoſophicum, non Philoſophiam ipſam tradiderunt.

c His addit Recentiores alios, Carteſianos in primis, qui veteri Philoſophiæ abjectæ novam ſuam fere prorſus hypotheticam ſubſtituerunt. Obſervationes quidem inſtituerant pleraſque, ſed non eas, quæ ſatis eſ-

Totque educentes latitantia monſtra ſub auras
(Herculea veluti conſtrictus colla catena
Cerberus ad ſuperos, exoſæ & clara diei
Lumina cum venit; facies tres, oraque terna
Ante timor, porro fuerant ludibria vulgi,
Auſus & ex illo eſt latratus edere nullos)
Tentavere novos in rerum indagine curſus;
Scilicet in rebus ſervantes multa, tamen quæ
Tantæ haud ſufficerent noſcendæ denique moli,
Multaque propterea rerum temere arripientes,
Mente ſua magnum ſubito procudere mundum
Ardebant, & opus naturæ educere fictum;
Sæpe recudebant quod porro, fictaque fictis
Addebant nova, cum pugnantia prima viderent
Rebus, quæ cæli fiunt terræque per oras;
Nequidquam, quoniam veris conficta valebant
Aptari nulla ratione, ut cuncta neceſſe
Tum fuerit cadere, & ſubverti victa ruina,
Tantaque diſſolvi facili molimina caſu.
Non fortuna poteſt, ut dites, ſic ſapientes
Efficere, & clauſi theſauros pandere veri.
Nimirum cauſas rerum cum noſcere primas
Non ſit opis noſtræ, varios ſed cernere tantum
Motus, qui valeant diverſis pluribus omnes
A cauſis, quarum numerum comprendere non eſt,
Idem prodire, atque eadem facere omnia vulgo,
Quæ fiunt: quis erit tam ſidere cretus amico,
Ut quæ prima ſuæ menti forte incidat, & quæ
Conveniat tantùm perpaucis, nec bene, rebus,
Illa

ſent ad cognoſcendas generales leges, quas natura obſervat. Hinc hypotheſes confinxerunt prorſus arbitrarias, ad quas nulla eos obſervatio directè deduceret, nulla indicium præberet. Hujuſmodi ſane fuit diviſio materiæ in partes, quæ motu continuo in tria elementa fractis angulis redigeretur, tot vorticum congeries illa, ac alia ejus generis, quæ quidem, ut in infinitis vorticulorum ſeriebus, in multiplici majorum vorticum per ſe invicem trajectorum, vel alia in aliis diſtantiis arbitraria denſitate præditorum complicatione, itidem pro arbitrio iterum, atque iterum corrigere, & mutare coacti ſunt, donec tota moles labefactata corruerit.

Hujuſmodi hypotheſes prorſus arbitrarias Noſter hic damnat. Cum enim innumeræ cauſæ eorundem effectuum confingi poſſint, eo minus probabile eſt, te in veram incidiſſe, quo plures ſunt reliquæ omnes, quas ignoras, quam unica illa tua, quam tibi confingis.

Con-

Illa ſit e cunctis una, & certiſſima cauſis,
Cum valeant hoc Omne capaci prendere gyro
Hæ melius, quam cui præferrier obtigit uni.
Non igitur fas eſt noſmet contendere primas
Ad rerum cauſas mortales, atque minutis
Ingeniis natos, neque menti fidere tantum
Infirmæ, tenebris quæ, ut cæco in carcere, ſepta eſt.
Scilicet [a] hoc regnum Naturæ grande potentis
Haud male poſſimus regnis componere noſtris,
Omnis res hominum queis rectè publica conſtat;
Præ multis veterum fuit olim quale Laconum,
Quale tuum, ſeu Roma, Numa regnante, vel Anco,
Expulſiſve recens quoque Regibus, ante ſubactus
Quàm Dominam te ſervitio corruperit orbis;
Ergo ſi quis in has longe trans æquora, monteſque
Adveniat terras hoſpes, longùmque morari
Deſtinet; extemplo ſanctas ibi diſcere leges
Ipſe velit, ſciat ut communi vivere jure,
Si non e tabulis, quas non percurrere cuique eſt,
At populi a certo vivendi more, ratiſque
Uſibus, in variis ſervari quos probe rebus
Aſpicit, illatis toties dum crimina pœnis
Comparat, & pulchræ noſcit data præmia laudi;
Nec nimium, ſi non, quis legum, noverit, auctor,
Quæque ferendarum ratio, & quæ tempora, refert,
Dum liceat multas deprendere præcipuaſque,

Concludit, non eſſe inveſtigandas primas cauſas, ut illas trium elementorum formas, ad quas nobis aſpirare non liceat. Id autem ita intelligi debet, ut ad eas inveſtigandas non accedamus, antequam Naturæ indolem, ac leges obſervando deprehenderimus, ac inter ſe meditando contulerimus. Nam in decimo libro ipſe etiam primum cum Newtono, tum etiam mecum in prima corporum principia inquiret.

a Naturam comparat benè ordinatæ reipublicæ, ad quam hoſpes quiſpiam, ibi diutius commoraturus, accedat. Ut is, ſi leges ipſas videre non poſſet, nec ab aliis addiſcere, adhuc diligenti eorum, quæ in dies accidunt, obſervatione colligeret, quæ quibus criminibus conſtitutæ eſſent pœnæ, quæ quibus virtutibus præmia, qui mores, quæ rerum pretia, quibus ita cognitis, ſatis ſibi conſultum putaret, licet de legibus ex archivo extrahendis, de legum conditore, de tempore, de rationibus cognoſcendis deſperaret; ſic homini in hoc Naturæ regnum inducto generales inprimis phænomenorum leges quærendas eſſe per obſervationes & experimenta, quibus compertis, etiamſi intimas ignoret cauſas, ſatis uberes laborum ſuorum fructus perceptutum.

Quas ſervare opus eſt, offendat ne quid in illo
Fœdere, neve paret ſibi vitæ incommoda multa.
Quod ſi adeo antiqua fluxiſſe ab origine noſcat,
Ut nulla exortus harum monumenta ſuperſint;
Deſiperet, ſi tum nihilo minus ipſe, quis eſſet,
Quæreret, exortus, quis earum lator & auctor.
Sic itidem nobis ſemper verſantibus ampla
Naturæ in ditione, & mundi in grande receptis
Hoſpitium, rerum ad cauſas pertingere primas
Cum nullis animi liceat conatibus unquam,
Nec vidiſſe, recens qua mundus origine, & unde
Fluxiſſent, per quos conſiſtunt omnia, motus;
Nec nimium vitæ hæc interſint inſtituendæ,
Ut bene, quodcumque eſt, queat hoc traducier ævi;
In rebus ſat erit nobis inquirere, quid ſit
Tantùm, & quid fiat, quaſdam poſſimus ut inde
Eruere, hæc conſtet queis mundi machina, leges;
Quæ quamvis non ſint naturæ a fonte petitæ,
Sejungi ut nequeant ab eadem, ſeque gregari,
Non minus at rerum varias dant noſcere cauſas,
Etſi non primas, neque ſummas; at quibus ipſa
Naturæ facies aliqua de parte pateſcat,
Atque ars ſeſe aliquà nobis tenus abdita prodat.
Præcipue [a] cautis tamen his in rebus oportet
Nobis eſſe; aliquid ne forſitan accidat, illi
Quod plerumquè ſolet peregrina in gente moranti,
Præcipitem cum fert bene nondum ad cognita mentem.
Poſt breve ſi namque hoſpitium, cum pauca profecto
Viderit, & varios nec adhuc ſervaverit uſus,
Protinus illius leges comprendere gentis

Spe-

[a] Eidem exemplo inſiſtens docet, quam cautè progredi in ea perquiſitione oporteat. Huc omnia reducuntur, ut plurimæ obſervationes, ac experimenta inſtituantur, ut Phænomena comperta inter ſe conferantur, ſimilia a diſſimilibus ſegregentur, ac in certas diſtribuantur claſſes, ex iis eruantur leges, quæ ad ſingulas ejuſmodi claſſes pertineant: eædem leges erutæ cum novis phænomenis iterum conferantur, & veluti ad incudem reducantur, ut corrigi poſſint, niſi congruant cum iis novis phænomenis, donec omnia ſibi conſtent.

Hæc methodus in illam arbitrariarum hypotheſium exploſam non recidit; nam & multo plures obſervationes exquirit, & non hypotheſes prorſus arbitrarias procudendas, ſed leges generales e plurimorum ſingularium phænomenorum obſervationibus colligendas, & conjectando extendendas, ac ſæpiſſime ad examen revocandas

præ-

Speret, & ad populi ſcita, ad conſulta Senatus
A rebus, ſibi quæ viſæ, procurrere cuncta,
Et temere ex illis, licitum vetitumque quid extet,
Præſcribat, fierique ſine ulla denique noxa
Quid queat; invertat facile omnia, & omnia turbet,
Fictaque conſtituens ignoret vera, neceſſe eſt.
Ergo ut noſcendo, quo res ſtat publica, jure,
Sic opus eſt etiam Naturæ in legibus ipſis
Firmandis (ne mens ruiturum fabricet orbem),
Multa diu ſervaſſe, manuque, oculiſque per omnes
Iſſe licet tenues etiam res, atque minutas,
Notitias & ab his in noſtros undique multas
Convectare animos, amplas ut in horrea meſſes.
Inter ſe porro, quæ ſunt collecta, neceſſe eſt
Conferre, atque, alii ſimile eſt quodcumque, videre,
Quæque etiam rerum diſcrimina, quantaque conſtent;
Demum a ſervatis animum deferre ſagacem ad
Plurima, quæ inventis videantur legibus apta;
Atque ea ſi rebus noſcamus deinde retectis
Conſentire, ratæ leges ſint, firmaque jura;
Sin collata novis rebus lex claudicet hilum,
Reſtitue adjungens, qua deficit, excidenſque,
Qua nimia eſt, & multa notans exempla reforma.
Scilicet exemplis a pluribus undique lectis
Mens ſimiles facili ratione inducitur ad res:
At quia per flexus ſic pergimus, atque coacti
Conjicere interdum ſumus, hæc tutiſſima non eſt
Ad verum via ſemper, & omni a fraude remota.
Propterea ipſas res iterumque iterumque neceſſe eſt
Inſpectare animo, partique revolvere ab omni,
Et nova ſervatis adnectere, perque polire
Uſque novis, atque ad tentamina ſæpe reverti;
Nam plus conſequimur longos cunctante per uſus
Conſilio, & ſe mente diu verſante per omnes
Undique res circum, quàm ſi intus ſerveat acre

In-

præſcribit, ac demum multo plus diligenti obſervationi, ac ſelectis experimentis tribuendum præcipit, quam ingenioſæ commentationi, & abditæ in ſolo, ac intimo mentis ſeceſſu contemplationi.

Ut autem ipſas obſervationes, & experimenta adhibeamus cum fructu, regulas philoſophandi proponit, quas Newtonus initio tertii libri propoſuit, ubi poſt tradita præcipua quæque Mechanicæ fundamenta, Cæleſtem Phyſicam explicare aggreditur.

Ingenium, & celeri pertranſeat omnia motu.
His adhibere aliquam ſed rebus proderit artem,
Et quaſdam verum quærendi noſcere normas.
Et primò [a] quæcumque eadem conſtare videmus
In rebus ſemper, ſi ſtant paria omnia circum,
Omnibus; ut nil fiat, ubi deprendier illa
Non eadem poſſint, & quod connectier ipſis
Perfacile, & nunquam cernas pugnare viciſſim;
Illa quidem legum in numerum, cenſumque repone
Naturæ, quæ non poſſint diſſolvier unquam:
Munera quandoquidem quæ nos communia toti
Semper materiæ ſenſuque, & mente tuemur,
Quæque nec intendi valeant, nec deinde remitti,
Ut calor, aut frigus, ſed perſtant una eademque,
Munera materiæ generatim ea totius eſſe
(Quo mundi ſit cumque loco, terrave ſub ima,
Vel cum ſideribus per magnum conſita cælum)
Credere nil obſtat ſemper debere, neque ullas
Errorum fraudes, ſi credimus, inde timendum.
Præterea [b] res cum recta ratione geratur
Publica Naturæ, multis non ipſa redundat

Le-

a Proponit hic primo loco Regulam Newtoni tertiam, nimirum: *Qualitates corporum, quæ intendi, & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt, in quibus experimenta inſtituere licet, pro qualitatibus corporum univerſorum habendæ ſunt.*

Hæc regula principium inductionis continet, non perfectæ, ut cum a proprietate in ſingularibus omnibus demonſtrata, eandem generaliter omnibus collectionem illorum conſtituentibus tribuimus, ſed imperfectam, cum quæ deprehendimus in plurimis ſimilibus inter ſe, nullo ſimilium contrario invento, extendimus ad reliqua ejuſdem generis, in quibus nondum obſervare rem licuit. Principium hujuſmodi caute adhibitum (quæ autem cavenda ſint, monui, ac demonſtravi in recentiſſima mea diſſertatione de Continuitatis lege) eſt non quidem infallibile, eſt tamen principium inveſtigationi aptiſſimum, & eo paſſim utimur in omnibus facultatibus, & in ipſo humanæ vitæ uſu. Porro Newtonus id reſtringit ad qualitates, quæ intendi, & remitti nequeunt; ſi enim remitti poſſent, id eſſet indicio, poſſe & auferri.

b Hic exprimit primam Newtoni regulam, & eodem principio ſecundam etiam complectitur. Prima apud Newtonum eſt: *Cauſas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ vera ſint, & earum phænomenis explicandis ſufficiant*; ſecunda ex priore deducta: *ideoque effectuum naturalium ejuſdem generis eadem ſunt cauſæ.*

Utraque regula pendet a ſimplicitate quadam, & analogia Naturæ, quæ ubique, rem aliquanto altius conſideranti,

Legibus; at paucis, quibus ipſam & oporteat uti,
Utitur, has uno ſervans per cuncta tenore:
Publica nam res eſt vulgo corruptior omnis,
Cum nimiæ leges. Ergo quibus una gerendis
Lex ſat erit rebus, plures confingere inane eſt.
Hinc ut luxuriem foliorum falce recidit
Agricola, & nimias hinc illinc decutit umbras,
Deficiat teneris almus ne fructibus humor;
Sic nobis, quodcumque ſuperfluit, eſt reſecandum
Legibus in noſtris, effecta ut ſingula privas
Non habeant cauſas; ſed quæ ſunt unius illa
Ordinis aut generis, cauſa peragantur ab una,
Ni plures nova ſors ratio, manifeſtaque poſcat.
Simplex propterea cauſa eſt, animalia vulgo
Omnia vitalem qua reddunt, atque reducunt
Aera, nimirum qua nos, hac cætera quæque.
Simplex cur etiam tibi non erit, unaque prorſus,
Qua cadit in terram deorſum demiſſus ab alto
Hic lapis ad colles ſeptem, & Tyberina fluenta,
Quàm Thameſin propter, vel Nili, & ad oſtia Gangis,
Aut regna Oceani pelago diviſa ſonanti?
Non tamen hæc ita certa putes, ita tuta profecto
Eſſe, ut non poſſint veluti per lubrica labi
Interdum greſſus, conſtructaque ſidere moles.
Nam veluti turpi pro furti crimine cum quos
Damnatos capitis peregrina viderit hoſpes

Dum

ranti, ſe prodit. In principiis, & legibus parca admodum, & ſimplex, in combinationibus ipſarum eſt admodum multiplex, & varia, quod pluribus fucum fecit, ut ipſum ſimplicitatis, & analogiæ principium improbarent.

Bina Noſter exempla profert maximi uſus ipſius regulæ, nimirum reſpirationis in omnibus animalibus, & deſcenſus lapidis ſibi relicti: ſunt autem ex iis quatuor, quæ Newtonus adhibuit, *uti reſpirationis in homine, & in beſtia, deſcenſus lapidum in Europa, & in America, lucis in igne culina, & in Sole, Reflexionis lucis in Sole, & in planetis*. Profecto ex hoc uno principio fit, ut ſi bovem mactatum diſſeces, nequaquam dubites, te ibi pulmones inventurum, oppreſſurum obſidentem hoſtem, ſi lapidem grandiorem e muro demittas.

Cautè autem adjecit Noſter: *Ni plures nova ſors ratio, manifeſtaque poſcat*. Fieri enim poteſt, ut effectus ſimillimi a diverſis oriantur cauſis, ut idem motus indicis in Horologio provenire poteſt a ſuſpenſo pondere, ac ab elaſtica lamina affixa. In illa Rep: eadem pœna capitis, quæ in furem decernitur, decerni poteſt in perjurum, in adulterum, ac alio-

rum

Dum trahit urbe moras; alios ſi funere deinde
Sublatos ſimili, & pendentes gutture fracto
Dicat idem patraſſe ſcelus, fureſque fuiſſe,
Fallitur interdum; letho quia plectier ipſo,
Si quis perjurus quoque ſit, vel ſi quis adulter,
Poſſit, & innocuum qui civem occiderit, & qui
Prodere tentàrit patriam, aut incendere templa,
Contemptor Superum, juſtique everſor, & æqui.
Diverſæ diverſa queunt nam crimina leges
Supplicio ulciſci, nocuamque extinguere vitam.
Sic in natura ſimili ratione videmus
Quæ peragi, valeant non cauſa exiſtere ab una;
Idem poſſit enim varia vi motus oriri
Corporis, aut parti nimirum corpus ab una
Quæ trahat, oppoſita vel idem quæ parte repellat.
Ergo licèt multis ſat cauſa ſit unica rebus
Sæpe, tamen quoniam nos inde excludere clara
Propterea ratione alias non poſſumus omnes,
Per quas multa geri quoque eorum poſſe tuemur,
Non clara ratione illa unica certa videtur:
Non ita nam quidquam naturæ in rebus apertum
Conſtat, ut in claro contra ſe lumine pandunt
Menſuræ, & numeri, verum ſine nube ubi fulget.
Non tamen idcirco eſt, quærendi his fidere normis
Ut nequeant animi; præſertim acceſſerit acri
Si tum non facilis falli experientia menti.
Tum ſiquidem, quantum patitur res ipſa, doceri,
Multaque ab incertis diverſa agnoſſe valemus.
Sic fidunt [a] duce nocturna, ſpumantia nautæ

Mar-

rum criminum reum. Quare ut ibi, qui poſt adventum ſuum brevi tempore plures ſuſpendio fures erectos vidiſſet, ſi alium aliquem ſuſpenſum aſpiciens temere pronunciatet, ipſum etiam furem extitiſſe, errare facile poſſet; ſic & in Phyſica ſupereſt ſemper ex ea methodo aliquod errandi periculum, nec id unquam, ut in Geometria, & Algebra fit, poterit penitus amoveri. Inveſtigationis principium eſt per ſe fallax, non evidens demonſtrationis: at erroris periculum, aucto ſemper obſervationum numero, ſemper magis minuitur, cum, ut in bene conſtituta Rep., ita & in Natura, omnia ferè combinationum genera poſt notabile tempus occurrant.

a Exemplo utitur Polaris Stellæ ſitæ in cauda minoris Urſæ; unde & græco vocabulo *Cynoſura* dicitur. Eam Nautæ etiam veteres aſpiciebant ad diſtinguendum poli ſitum, qui & Mundi plagas determinat, & eam, quam Geographi latitudinem loci appellant; eſt enim altera ex iis, de qui-

bus

Marmora dum ſcindunt, Cynoſura; quæ licet ipſo
Non infixa polo mundi ſtet, & orbibus orbes
Implicet aſſiduos; minimo tamen & quia gyro
Se volvit, parvaque polo, notaque recedit
Et quia menſura, & cælo quia denique nullum
Certius hac fulget nautis errantibus aſtrum;
Proinde regunt curſus iſta ſub luce marinos
Audaces, vitant ſcopulos, iraſque tumentes
Undarum, fluctuſque atros, ventoſque laceſſunt.
  Contigit [a] ut primùm tibi Laij infauſta Propago
Solvere crudelis Thebana oracula monſtri;
Conſcius objectas verborum diſſoluiſſe
Ambages, quanquam injuſto Sphinx ſæva ſederet
Judicio, nullos morſus in viva timebas
Viſcera confidens: dirum implacabile monſtrum
Se contra rupe infrendens projecit ab alta;
Quippe ſuas non detectas contendere contra
Artes non potuit; cur non at pluribus æque
Illa etiam aptari rebus verba abdita poſſent,
Præſertim cum conjiciens diſſolveret illa
Œdipus, occulta quæ Sphinx involverat arte?
Accidere hoc raro, vel vix queat, ut bene cuncta

bus Ovidius. *Magna minorque feræ, quarum regit altera Grajas, Altera Sidonias utraque ſicca rates.* Nunc etiam adhibetur a Nautis, ſed priorem illum, & potiorem uſum pyxis nautica abunde ſupplet ope acus magneticæ. Ea quidem non eſt ipſi polo infixa; ſed quia eundem admodum arcto gyro circuit, & diſtantia eſt nota, quæ olim aliquanto major, nunc eſt duorum graduum quamproxime; exiguo, & evitabili errori locum relinquit; cumque alia ſatis lucida ſtella polo propior non adſit, ipſa a Nautis, & quidem cum ſucceſſu, adhibetur.

Hic polaris ſtellæ uſus cum expoſita philoſophandi methodo in cæteris omnibus convenit, eo dempto; quod ſi non ſolo oculorum judicio, vel craſſioribus inſtrumentis, ut Nautæ ſolent, ſed accuratiſſimis utatis, tuto ob diſtantiam accuratè cognitam omnia errorum pericula evitare potes; cum in ea methodo ſemper periculum erroris ſuperſit.

[a] Notiſſima eſt fabula Sphingis, quæ difficillima quæque problemata prætereuntibus proponebat ex imminenti ſcopulo, quos, niſi ea ſolverent, unguibus enecabat. ſoluto autem uno ex ejuſmodi ænigmatis ab Oedipo Laii filio in deſperationem acta præcipitem ſe dedit.

In hac Naturæ inveſtigatione idem præſtandum, quod in ea enigmatum ſolutione, vel in enucleatione epiſtolæ ſecretis notis conſcriptæ, quo exemplo ſæpius Carteſius olim eſt uſus, & ego in prima parte Diſſertationis de lumine, ubi metodum eandem fuſius illuſtravi, ſic habeo. *Non ſemper ea poteſt teneri via in Natura principiis* inve-

Qui vertiſſet, in id, quod verum eſt, ſcilicet idem
Tum non inciderit; præſertim plurima verbis
Si lateant aliis, quæ debet nectere in unum,
Propoſita, & noſcat bene quæ conſtare ſoluta:
Quo plures etenim, quas ipſa oracula claudunt,
Implexæ partes unà ſint, inque volutæ,
Hoc mage difficile eſt non inveniſſe, quod optas,
Conveniant rebus ſi partes quæque repertis:
Tum mage quandoquidem rareſcunt, partibus illis
Cætera ſenſa queant quæ jungier omnibus apta;
Sic itidem, quam conſulimus, reſponſa latentis
Naturæ, prorſum innumeras ſunt undique partes
Complexa, & nodis variantibus indupeditas;
Una poteſt quarum tibi quæque evertere noſtram,
Quam ſtruimus conjectantes, interque pretantes,
Cunctarum rerum rationem; haud vera profecto
Si ſit, & inſtabili nitentem prodere arena.
Proin cum quæque tuæ rationi ex omnibus una
Pars bene conſentit, vulgo nihil ut ſit eorum,
In mundo peragi quæcumque ubicumque videmus,
Quod non conveniat poſitis cum legibus, atque
Non fluere ex illis videatur; nonne neceſſe eſt
Veras propterea leges has eſſe fateri,
Atque ea vera itidem, quæ tum deducimus illinc,

Ambi-

inveſtigandis, ut obſervationes quædam proponantur, ex quibus recta ratiocinatione deducantur concluſiones, quæ Naturæ leges generales contineant verum ut in illa epiſtolæ enucleatione, *conjectando primum, & plures poſitiones inter ſe conferendo, ad vocularum quarundam expoſitionem devenitur, tum illas ipſas poſitiones jam retinendo pro reliquis, jam corrigendo, paulatim poſt frequentiſſimos errores devenitur tandem ad clavim aliquam generalem, quæ idoneum aliquem ſenſum aperiat, quo ubi deventum ſit, clavis illa habetur pro vera, niſi quid in contrarium occurrat*; ſic idem etiam in Naturæ inveſtigatione præſtandum.

Illud autem cavendum iterum, quod & Noſter monet, evidentiam hoc pacto acquiri non poſſe, poſſe certitudinem quandam, ſatis nimirum multiplicato obſervationum numero. Fieri quidem poteſt, *ut eadem notæ diverſis adhibitis clavibus diverſas quamvis ſibi admodum conſtantes ſententias reddant. Sed ut ibi unico invento ſenſu ſatis idoneo, potiſſimum ſi longiſſima epiſtola ſit, & ſi aliis conjecturis, ac negotiis iis, quæ pertractantur, reſpondeat, clavis inventa firmiſſimo aſſenſu habetur pro vera*; ita in Naturæ indagine firmiſſimus debet eadem methodo aſſenſus obtineri. Ejus rei rationem ſolutioni etiam problematum a Sphinge propo-

ſitio-

Ambigere ut prorſum nequeas, fraudemque timere?
Nunc age [a], quandoquidem nobis conſtrata viai
Sunt loca, jam ſtadio diſcurrere tempus aperto eſt,
Et cupide ſpectantum oculos, animoſque tenere.
Principio proprium generatim, ut diximus ante,
Materiæ officium eſt, ut non penetrarier ulla
Parte queat, corpus neque corpore poſſit adiri,
Ut duo tunc una ſimul in ſtatione locentur;
Omni quod noſmet nimirum ediſcimus a re.
Noſtris, cum gradimur, pedibus prom terra reſiſtit;
Vel ſi mollis, ut a ſplendenti prodit aratro, eſt,
Cedit mota loco, & veſtigia preſſa receptat.
Mœnia trans arcis, quam fortibus obſidet armis,
Num valeat miles, niſi ſint infracta, meare?
Num clauſas tranſire fores, & ahenea ſepta?
Noſtris officiunt quin plurima corpora ſæpe
Corporibus; veluti populo ſtipante per ædes
Cum premimur; vel cum validi percellitur ictu
Verberis indocilis puer, & reſonante flagello,
Ut dolor excutiat lacrymas, ſuſpiriaque ægra;
Quandoquidem nequeat penetrari a corpore corpus.
Quod ſi mixta [b] videns, confuſaque plurima credas
Corporis idcirco penetrari a corpore poſſe
Materiem, ſunt ut limphæ, vinique liquores;
Erras; namque manent rebus ſpatia æqua locatis
Tum ſimul, ante ſitis ea ſeorſum quanta fuere.

 At

ſitorum accomodatam expoſuit Noſter. Quo nimirum plures adduntur circumſtantiæ, quæ problema reſtringant, eo pauciores habet ſolutiones problema ipſum, vel eo pauciores aptari poſſunt ſenſus epiſtolæ illa ratione conſcriptæ.

a Jam eo progreditur, ut tradita inductionis methodo propoſitas materiæ proprietates evincat, & primo loco impenetrabilitatem, vi cujus bina corpora idem ſpatium occupare non poſſunt, ſatis ampla inductione probat eorum, quæ compenetrari non poſſe cernimus, quæ quidem apud ipſum ſatis manifeſta ſunt.

b Solvit, quod obiici poſſet, plures liquores permiſceri, ut vinum, & aquam, aquam ipſam penetrare in ſolida corpora (nam ſi globus aureus aqua plenus contundatur, aqua ipſa per poros exſudat), lucem quoque tranſire per aquam, & gemmas, ipſos radios trans alios radios permeare. Solutio eſt admodum expedita. Nimirum omnia corpora habent intra ſe plurimos poros vacuos, per quos aliorum ſe corporum particulæ inſinuent, ut videmus, aquam inſinuari in ſpongiam. Id generale eſt hujus generis inductionibus omnibus. Si aliqua proprietas invenitur in plurimis caſibus,

At pertranſit aquas, & vitri corpora lumen,
Et radii inter ſe multi plectuntur in unum,
Et lux mille viis ſpatio diſcurrit eodem,
Itque, reditque, nec una alii pars officit hilum.
Omnia tu potes hæc facili cognoſcere pacto,
Ut non propterea penetrari corpora credas;
Si lucem perquàm ſubtili corporis auctu
Eſſe, nec admixtum cunctis non rebus inane
Percipias; atque in vitro, atque humore latere
Tam varios flexus, queis permeat illa, viarum.
Spongia nam limpha veluti repletur, aperta
Per, quæ ſunt oculis, tot rara foramina, noſtris;
Sic & cætera item, ſic ſaxum, & lignea texta,
(Intervalla licèt non poſſint iſta videri,)
Sæpe metalla etiam penetrant intrinſecùs undæ,
Vitraque ſic tenuis lux, & perlabitur undas.
Ergo, quandoquidem nihil eſt, quo vincere poſſis,
Ipſa inter ſeſe penetrari corpora; legem
Par erit hanc etiam generatim ad corpora quæque,
Quo ſint cumque loci, diſtendere, quæque nec unquam
Vidimus, a nobis nec longe abducta valemus
Cernere, quæ ſupra nubes, ſuper aſtra locantur,
Ultra anni, ſoliſque vias, ſtellaſque minores,
Scilicet, ut nunquam penetrari mutuà poſſint.
Præterea [a] ratione pari quia corpora conſtant
Omnia, quæ circum nos tangimus, atque videmus,
Extenſa; extendi, quæ ſunt, opus eſſe fatendum eſt,
Cuncta alia in rebus, ſpatiiſque excurrere multis.
Extenduntur item, quia non penetrarier ipſæ
Cum valeant partes, ut diximus, & ſimul uno

Stare

bus, in aliis autem, in quibus videtur aliquid contrarium, occurrit aliqua ratio, qua conciliati poſſint cum ipſa illa proprietate hi caſus; licet poſitivè probari non poſſit, rem in iis eo pacto ſe habere; adhuc tamen ita conciliari debent, potiſſimum ſi alicubi, ut hìc in ſpongia, poſitivum inveniatur ejuſdem conciliationis exemplum.

In mea autem ſententia de materia compoſita punctis indiviſibilibus, inextenſis, & a ſe invicem diſtinctis, quam, ut innui, videbimus in libro decimo, & in qua infinities majus eſt ſpatium vacuum, quam materia, ejuſmodi difficultas multo minorem vim habet, & apparentes illæ compenetrationes multo facilius, ſine vera compenetratione haberi poſſunt.

a Extenſionem probat tum ſimili inductione caſuum omnium, in quibus experimenta capere poſſumus, tum ex impenetrabilitate; nam partes extra partes eſſe debent, cum compenetrari non poſſint.

Stare loco plures, aliquo diffundere debent
Se ſpatio, quod eas velut æquo in vaſe receptet.
Hinc [a] quia quodque ſuo finitur limite corpus,
A variis opus eſt extra, omnigeniſque figuris
Ut queat includi, ſemperque obeatur ab una,
Utq; triquetra eadem, aut quadrata, rotundave conſtet,
Conum, aut pyramidem, rhombum, teretemve columnam,
Aut quamcumque aliam referat multangula formam.
Atque [b] hic ſcire licet de multis, quæ tibi certa
Menſores facili poſſint oſtendere pacto,
Molem nempe parem, vel eandem poſſe figuris
Sæpe ſub imparibus circum, variiſque teneri;
Cera velut digitis tractata, ſubactaque ad ignem
Se facile in facies convertit, & induit omnes,
Quæ facies variis extra ſe extendere pergunt
Menſuris pro natura cujuſque, modoque:
Quas inter, quæ ſit tornatæ more pilai
Parte rotunda omni, reliquis præſtantior extat;
Nam præter quamquod ductu ſiet undique flexa

Æqua-

a Cum corpora & extenſa eſſe debeant, & finita, figuram aliquam habeant, neceſſe eſt, eum nimirum debeant undequaque terminari, quarum figurarum plures hic nominat. Et quidem in communi ſententia de continuitate materiæ debent omnino occupare ſpatium in longum, latum, & profundum, ac ſuperficies habere alias aliis plagis obverſas. In mea punctorum indiviſibilium, & inextenſorum poſſent omnia puncta in unica etiam jacere recta linea, vel in unico plano, ſed ea poſitio infinities improbabilior eſt, quam diffuſio in longum, latum, & profundum, cum infinities plures numero ſint caſus diſperſionis hujuſmodi, quam poſitionis in unica recta, vel plano; adeoque certo novimus, non unum ex hiſce caſibus haberi debere, ſed ex illis.

b Cum ad figuram delapſus ſit, proponit proprietates quaſdam ad figuram pertinentes, quas Geometræ accurata demonſtratione evincunt. Primo quidem poſſe eandem molem contineri figuris admodum diverſis, ut cera, licet eandem denſitatem retineat, adeoque eandem molem, plurimas habere poteſt figuras. Deinde in iis figuris eandem molem poſſe admodum inæqualibus ſuperficiebus terminari. Sic exiguus ceræ globus ingentis placentæ formam induere poteſt, quæ longe majoris globi ſuperficiem contegat. Tertio inter omnes figuras perfectiſſimam eſſe ſphæricam globi formam, tum quia curvaturam ubique æqualem habet, ubique ſui ſimilis eſt, & in ſe ipſam in orbem redit, tum quia ex omnibus figuris eandem ſuperficiei magnitudinem habentibus maximum ſpatium comprehendit, & ex omnibus æquale ſpatium continentibus minimam habet ſuperficiem, quod quidem & de circulo reſpectu areæ, & peripheriæ ſuæ demonſtratur, & multo generaliori me-

thodo-

Æquali, ſimiliſque ſui, in ſeſeque voluta,
Hoc habet, æqua aliis ut ſi ſit fronte, recondat
Plus ſpatii; ſpatium ſin circum contegat æquum
Intra ſe reliquis conſtet minor omnibus una,
Omni nempe capax ut ſit magis una figura.
Nec tibi prætercam, ſimiles quæcumque figuræ
Si creſcunt, vel ſi major collata minori eſt,
Creſcere plus ipſa facie molemque, locumque,
Majoremque magis multo diſtendier intra;
Nam facies tantùm, quà longa eſt, lataque, creſcit
Menſura duplici: debetur terna ſed ipſi
Moli, quandoquidem pariter procurrit in altum.
Propterea ſi ſint ſimili conſtructa figura
Horrea noſtra tuis, ſed parjete quæ magis alto
Claudantur decies; centum frons undique major
Partibus excurret; centum at non partibus iſtis
Ditior ipſe ego ſim, decies ſed denique centum,
Si duro agreſtum placata labore, boumque
Utraque complerit flavis Ceres horrea donis.
Omnia [a] præterea cunctis ſunt motibus apta
Corpora; nam noſtris non ſenſibus objicit ullum

Se

thodo, quam Iſoperimetrorum appellant, occaſionem dedit, ubi ſublimiori Geometriæ, & infiniteſimali calculo immenſus patuit campus, per quem excurrerent.

Illud autem ad Phyſicam longe utilius, quod poſtremo loco poſuit; in figuris ſimilibus molem multo plus creſcere, vel decreſcere, quam ſuperficiem. Creſcit hæc in duplicata, ut dicunt, laterum homologorum, ſive linearum correſpondentium ratione, illa in triplicata, ſive hæc, ut quadratum laterum, quod fit multiplicando latera ipſa per ſe invicem, illa ut cubus, qui fit multiplicando quadratum per ipſum latus. Nimirum duplo exiſtente latere, vel triplo, vel decuplo, erit ſuperficies bis duplo, ter triplo, decies decuplo, nimirum quadruplo, noncuplo, centuplo major; moles autem bis quadruplo, ter noncuplo, decies centuplo, ſive octo, viginti ſeptem, vel mille vicibus major; quod quidem duplicis ejuſdem formæ horrei exemplo illuſtrat ſatis manifeſto, ſi frumentum ad altitudinem ingeratur reliquis menſuris proportionalem.

[a] A figurabilitate tranſit ad eam proprietatem, quam Phyſici dicunt mobilitatem, ſimili itidem inductione comprobatam; ac ab ipſa mobilitate repetit diviſibilitatem, quæ habetur per hoc, quod alia parte mota, alia vel quieſcat, vel diverſum habeat motum. Porro diviſibilitatem ipſam ſimili inductione probat; licet enim plures occurrant ſubſtantiæ ingenti vi cohæſionis præditæ, adhuc nullum corpus nobis occurrit ejuſmodi, in quo partes, quæ ſeorſum arripi poſſint ſingulæ, ſive digitis, quos Noſter nominat, ſive inſtrumentis quibuſdam, ſeparari a ſe invicem non poſſint.

Se corpus, vaſtum quamvis, durumque, moveri
Quod nequeat, varioſque ſitus mutare locorum.
Novimus a motu in proprias quin corpora partes
Disjungi; inter ſe partes nam ſæpe videmus
Corporis unius motu variante cieri;
Ocyor aut meat hæc, aut tardior illa, meatu
Sive alio longe latera in diverſa feruntur;
Atque ita diſcedunt a ſeſe, diſque trahuntur
Mutua, ut hinc proprias revera corpora findi
Scire ſit in partes, atque omnia poſſe retexi.
Et licèt hæ facili ſemper ratione revelli
Non poſſint, ſic interdum ſtipata cohæret
Materies; tamen haud, manibus quod prendere poſſis,
Quidquam erit, ut nulla valeat vi, aut arte reſolvi,
Imminuique ſuis divulſis partibus a ſe.
Quatenus [a], at quis erit, quantoque labore ſecari
Materies queat, ut noſcat? quæ tenuibus extat
Partibus, at fors finitis, & denique primis,
Quæ ſint invicta pollentes ſimplicitate,
Unde ſinat nunquam quidquam natura revelli.

Nam

a Hic ſe offere quæſtio de diviſibilitate materiæ. Eam Noſter pertractat tantummodo, quatenus Naturæ viribus præſtari poſſit. An materia in ſe ipſa partes habeat minòres, & minores in infinitum, ſive an diviſibilis ſit in infinitum in ſe ipſa, præſcindendo a Naturæ viribus, quam Noſter quæſtionem ne attingit quidem, videbimus in Supplemento. Sunt, qui Naturæ etiam viribus diviſibilem eſſe in infinitum affirment. At pierique cenſent eſſe quaſdam perquam exiguas materiæ particulas primigenias, quæ nulla Naturæ vi dividi poſſint.

In ea ſententia eſt & Newtonus, qui ſub finem poſtremæ Quæſtionis Opticæ rationem indiviſibilitatis primigeniarum materiæ particularum affert eam ipſam, qua Noſter utitur, quia nimirum, *Dum particula illa integra permanent, poterunt ſane per omnia ſæcula ex iis compoſita eſſe corpora ejuſdem ſemper natura. Verum ſi illa deteri, aut comminui poſſent, jam futurum ſane eſſet, ut rerum Natura, qua ex iis pendet, immutaretur.* Id autem obtineri cenſet ex eo, quod ſolidæ ſint, & protſus homogeneæ ſine ullo immixto vacuo ſpatioio. Cohæſionem enim repetit ab attractione, quæ in contactu ſit in immenſum major, quam in quavis utcumque parva diſtantia, ac proinde ubi in ſolida particula ſe tangunt facies continuæ, infinities major eſſe debeat, quam ubi ſuperficies diverſæ diverſarum particularum ſe tantummodo in punctis quibuſdam contingunt.

Atque hinc patet illud, quod Noſter elegantiſſimè expreſſit, *Quæ ſint invicta pollentes ſimplicitate*. At multo magis invicta erit ſimplicitas meorum punctorum, quæ partes habent prorſus nullas, adeoque mutari omnino non poſſunt.

Nam ſi eadem non ſint ſemper primordia, rebus
Natura in cunctis faciem haud ſervaret eandem,
Et ſeſe ſpecies, dum res ſit quæque, novaret,
Perpetuoque omnis mundi hic ſe verteret ordo.
Non minus [a] aſt ideo in quovis ita corpore magna eſt
Ubertas elementorum, numeruſque, ita moles
Subtilis, tenuiſque, ut finem tangere noſtra
Mens valeat nunquam, quamvis intendat acutas
Sæpe acies, parteſque iterumque iterumque reſolvat,
Nequidquam, quoniam quantavis arte ſecando
In rebus nunquam minimum, primumque relinquit.
Atque ea corpora ſint quàm parvula principiorum,
Dat variam ſpecimen quoddam Natura per artem
In multis, mihi quæ ſat erit memoraſſe, vel ipſis
Quæ pueris (dubitemne, tibi?) notiſſima conſtant,
Omnibus e genere hoc conſcriptaq; lectaque chartis:

Scili-

a Licet autem particularum numerus finitus ſit, adhuc tamen adeo immanem eſſe, affirmat Noſter, ut non artem tantummodo, ſed & omnem humanæ mentis imaginationem excedat. Specimen quoddam immanis particularum numeri exhiberi ab Auctoribus paſſim ſolet deſumptum ab auri ductilitate in tenuiſſima folia redacti, quorum uno ſi obducatur craſſius argenti filum, tum diſtendatur in immanem longitudinem ad ſummam tenuitatem redactum, adhuc totum inauratum cernitur; a tenuiſſima æruginis maſſula, quæ eſt quoddam ſalis virentis genus, a qua immanis aquæ moles virorem contrahit; a tam diuturna odorum emiſſione e pluribus exiguæ molis ſubſtantiis, quæ ſine ſenſibili ponderis imminutione fit, & tamen ampliſſima, ac longe a ſe invicem disjuncta ſpatia late inficit; a tenuiſſimis membris animalium immenſæ exiguitatis, quæ ſola microſcopiorum ope deteguntur, & quorum quamplurima millia liberrimè ſimul per piperis granum excurrere poſſunt, & vagari; a luce demum, cujus radii per denſiſſima corpora, ut per adamantem, liberrimè quaquaverſus excurrunt, nec in eorum particulas incidunt, nec ſe invicem turbant. Profecto captum fere omnem ſuperat immanis illa tenuitas, quæ pro eorum omnium corporum particulis calculo etiam inito definitur, quam multo maximam ego pro lumine demonſtravi in diſſertatione de ejus tenuitate Romano Litteratorum diario inſerta, infra quam tamen eſt admodum veroſimile primigenias materiæ particulas in immenſum adhuc decreſcere.

Hinc ineptè facturos nos eſſe arbitratur, ſi integris corporibus necdum ſatis perſpectis, ſaltu quodam, quo tam multos minorum particularum ordines, multo magis ignotos nobis prætereamus, inveſtigandam aſſumamus naturam primigeniarum particularum. Rem fore plenam periculi, ut ubi arcibus intermediis a tergo prætermiſſis, ad invadendam urbem regni caput illico cum omni exercitu, dux rei militaris imperitus ſe conferat.

Scilicet exiguum cum lata extenditur aurum
In folia, aut flavo producti cortice filum
Contegit argenti, perparvo tincta virenti
Cum ſale ſe in viridem multa induit unda colorem,
Cum vel amaracini late ſparguntur odores
Exigua de mole diu; quid membra, quid illas
Commemorem fibras animantum, quæ, quia noſtros
Infra ſunt oculos, tantùm trans vitra tuemur?
Denique quid lucem, quæ ſaxa adamantina parte
Permeat ex omni, neque ſeſe occurſibus uſquam
Impedit ipſa ſuis? reputans hæc omnia poſſis
Tutemet haud ullis finem per te ipſe videre
In rebus noſtra pertingi a mente, nec ipſa
Siſti ad ſemina nos pedetentim progredientes.
Semina quæ ſi ſint, inquam, & res limite conſtant,
Magno opus eſt menti, tranſmittat ut omnia, ſaltu,
Et ſubito (ſine fraude tamen tranſcurrere tantum
Num liceat?) rerum ad primos ſe ſiſtere fontes
Poſſit; more Ducum, vires, & idonea bello
Qui terere in parvis renuentes tempora rebus,
Extemplo fines tranſgreſſi, & flumina magna,
Arcibus & validis urbem poſt terga relictis,
Primam urbem, regni caput ardent impetere ipſum:
Sed nimium audacis ſæpe illos pœnitet hujus
Demum conſilii, nec amica, nec ſibi nota,
Incluſos terra; graſſantur viribus hoſtes,
Atque dolis, coguntque pedem haud ſine cæde referre.
Maxima tum laus eſt, alieno abſcedere ſi quà
Poſſint armati regno, & non omnia perdant.
Et quoniam [a], clara ratione, patentia quæ ſint

[a] Hiſce abſolutis, delabitur demum ad proprietates materiæ a Recentioribus detectas, nihilo tamen minus generales, vim inertiæ nimirum, & gravitatem, ac priorem, quam Newtonus etiam appellat vim *inſitam*, hic exponit. Eſt autem vis inertiæ determinatio corporis ad perſeverandum in eodem ſtatu quietis, vel motus uniformis in directum, in quo ſemel eſt poſitum, niſi aliqua vis externa cogat mutare eum ſtatum, generando nimirum novum motum, vel priorem accelerando, retardando, detorquendo. Ea dicitur vis, quia eſt quidam veluti conatus ad conſervandum ſtatum ſuum; dicitur autem inertiæ, quia reddit corpus ineptum ad mutationem ullam per ſe præſtandam, ac indifferens ad omnes externas impreſſiones, quibus omnino parere debet.

Porro ſi materia nullas habeat vires ſibi intrinſecas, & eſſentiales 5. vis, quæ ſtatum mutare poſſit, debe-

Munera materiæ, & nullis non cognita ſæclis,
Jam docui; nunc, quod ſupereſt, tu cætera mecum
Contemplare, virum præſtantibus edita nuper
Scilicet ingeniis, & magno inventa labore,
Haud minus undique materiam diffuſa per omnem
Officia, & nexu ſemper conjuncta tenaci.
Horum eſt de numero cunctis vis indita quædam
Corporibus, qua poſſe videntur inertia dici:
Scilicet in quo ſunt, per ſe conantur eundem
Illa vi ſervare ſtatum, ſi nempe quieſcant,
Haud mutata quieſcere, & haud mutata moveri,
Si moveantur, & æquali lapſuſque, viæque
Ire tenore, niſi adveniat vis extera turbans,
Quæ mutet quacumque ſtatum ratione receptum
Corporis invertens, ut mota exinde quieſcant,
Quæque quieta manent, moveantur; motibus illis
Vel demat motus, alios addatve recentes,
Aut alia tranſire via, & procurrere cogat.
Jamque hinc ipſe potes per te cognoſcere, jungi
Haud fruſtra cum vi tam diſtans nomen inertis,
Nimirum, quoniam a niſu vim dicimus ipſo,
Corpora quo ſervare ſtatum conantur; inertem
Addimus idcirco, per ſe diſcedere eodem
Quod nequeant, veluti torpentia, fixaque in uno,
Et tranſire per hunc modo, verſaque deinde per illum,
Induere atque alium porro irrequieta recentem;
Mutandique odium videantur inertia ob iſtud.
Inſpice [a] quod volvunt herbarum molle per æquor

Lu-

bit ſemper eſſe prorſus extrinſeca ipſi materiæ: ſed ſi ipſa materia habeat aliquas ejuſmodi vires, ut fortaſſe mutua gravitas eſt quædam determinatio particularum materiæ ad mutuum acceſſum; licebit concipere materiam abſtrahendo mentem ab illa vi ipſi intrinſeca, & ipſa, per ejuſmodi præciſivum conceptum cognita, dicetur inertiæ vim habere; tum vis illa eadem mutando ſtatui apta erit externa, non quidem reſpectu eſſentiæ corporis, ſed reſpectu illius præciſivi conceptus. Hæc eadem paulo fuſius perſecutus ſum in diſſertatione *de motu corporum gravium in ſpatio non reſiſtente*.

a Hanc inertiæ vim exemplis potius illuſtrat, quam juſta inductione demonſtret. Globus, quem in aperta planitie protrudas, recta pergit, nec motum deflectit, niſi lapillus, vel aliud quidpiam cogat mutare viam. Retardat quidem motum, eoque magis, quo aſperior ſit campus, qui utcumque lævigatiſſimus concipiatur, ſemper demum ſiſtitur motus. Ac in promptu eſt cauſa retardationis: reſi-

ſtentia

Ludentes pueri, per florea prata, rotundum
Aut ebur, aut lignum; rectà fugit, & ſua, vernas,
Quà fugit, inclinans frondes, veſtigia linquit,
Nec deflectit in hoc cœpta a regione, nec illud
In latus; a recta medius niſi forte lapillus
Cogat abire via, aut ſecti pars edita trunci.
Atque ea quo ſaxis, quo ſit magis aſpera glebis
Planities, motum hoc citius tum ſiſtier illum
Eſt opus: aſt idem lævi licèt æquore pergat,
Æquatoque ſolo, & diuturno tempore, demum
Siſtitur haud alia de cauſa, quàm quia motum
Paulatim abradat; quantumvis lævis, & æqua,
Tollere non poſſis quam funditus, aſperitate
Terra aliqua, proſciſſa reſiſtat & aeris aura.
Utraque cauſa ſuo cum motum extinguere poſſit
Tempore, non aliam quærendum eſt corpore in ipſo,
Ne cauſis cauſas alias addamus inanes.
Ipſum igitur per ſe non ullo tempore corpus
Quit mutare ſuos, aut prorſus tollere motus.
Ergo eſt illud iners, & ſemper fungitur hac vi.

ſtentia nimirum ex aſperitate, quæ ſemper aliqua ſupererit, & ex aere proſciſſo. Eæ cauſæ retardationis veræ ſunt, & ipſi explicandæ ſufficiunt: non igitur aliæ comminiſcendæ, ut aliqua, quæ in ipſa corporis natura ſita ſit.

Pariter globus in aperto aere projectus ita pergit, ut eo tantum deflectat, quo ipſum gravitas jubet deflectere, nimirum deorſum, & multo minus retardat motum ob aeris reſiſtentiam, quam ſolam patitur: *majora autem*, inquit Newtonus, *Planetarum, & Cometarum corpora in ſpatiis minus reſiſtentibus motus ſuos conſervant diutius*, quæ nimirum per rectas lineas in immenſum abirent, niſi aliæ vires, de quibus ſuo loco infra, in orbem ea cogerent certis legibus cum hac ipſa inertiæ vi congruentibus.

Solent ipſam inertiæ vim demonſtr[illegible] cum dicant non haberi rationem ſufficientem, cur mutatio fiat, & ab inductione motuum, quos obſervamus hic in corporibus denſioribus, quæ eo minorem pati mutationem videmus, quo pauciores appareut mutationum cauſæ. At quam fallax ſit utraque via, pluribus expoſui in primis in Diſſertationibus *De Maris Aeſtu, & De Lumine*. Vim inertiæ, cum limitatione quadam aſſumptam, ut ſit reſpectiva reſpectu ſpatii a nobis concepti, in quo verſamur nos, & omnia corpora a nobis viſa, puto indicari a motibus, quos hic videmus, conjectando extendi ad omnia corpora, cumque Mechanica omnis, & terreſtris, & vero etiam cæleſtis inde derivata cum phænomenis complicatiſſimis apprimè conveniat; retinendam demum eſſe, ut illum epiſtolæ ſenſum notarum ſignificatione per attentationem detecta.

Proinde globum quoque ſi magno jaculeris eundem
Niſu per liquidum projectans aera, vel cum
Tormentis lapides e grandibus excutiuntur,
Non alia regione viæ deflectere cernas,
Quàm deorſum, ſua quo gravitas, & pondera cogunt:
Nec ratione alia ſervant per ſæcula longa
Aſtra ſuos circa ſolem labentia motus;
Quæ, ſi præterea vis nulla alicunde veniret,
Perpetuo vim propter inertem deproperarent
Æquali magnum, rectoque per æthera lapſu,
Æquaque conficerent ſpatia æquo tempore ſemper.
Has [a] quæcumque ſuo diſcedere corpora cogunt
Sæpe ſtatu, vires ipſi vocitamus agentes;
Dicimus & duplex harum genus eſſe; videntur
Quippe aliæ valido certam dare mobilitatem
Ictu corporibus momento temporis uno;
Sumunt proinde ſui menſuram a motibus ipſis,
Quos genuere; aliæ conatibus exerceri
Continuis, & nil in puncto tempore quovis,
Ni tantum premere; his ergo mora certa, neceſſe eſt,
Tem-

a Expoſita vi inertiæ, explicandas aggreditur cauſas mutationis ſtatus, quas dicimus vires activas. Hujuſmodi eſt impulſus in impactu, actio gravitatis, elaſticitatis, magnetiſmi, electricitatis, quas ego quidem potentias appello, & earum actionem vim. Duplex harum virium genus conſiderari ſolet, primum quidem ejuſmodi, ut unico ictu valido, unico temporis momento finitam generet velocitatem, cujuſmodi communiter cenſetur eſſe impulſus ſaltem relate ad primas ſuperficies, quæ ſe contingant: ſecundum vero ejuſmodi, ut momento temporis ſolam preſſionem exerceat, quæ in velocitatem non tranſeat, niſi intervallo aliquo temporis continuo, quo ipſa preſſio duret ſine impedimento, ſive ſine contraria æquali preſſione; ut punctum lineam, linea ſuperficiem in Geometria non generat, niſi ductu continuato.

Porro primum virium genus, ſi quod eſt (nam ego nullum eſſe arbitror, ſed ut in decimo libro videbimus, contactu immediato prorſus excluſo, communicationem motus fieri cenſeo per vires repulſivas quaſdam mutuas, & continuo agentes in minimis diſtantiis) metiri licet a motu, quem illo unico ictu ſimul generant; ſecundum virium genus a motu, quem generant, & a tempore, quo ipſum generant, ita nimirum, ut diverſæ hujuſmodi vires agentes, eodem tempore, generent motus ſibi proportionales, eadem vero vis agens diverſis temporibus generet motus proportionales ipſis temporibus.

Motus conſideratur in menſura virium, non velocitas; quia vis illa velocitatem generat in omnibus particulis; ſumma autem omnium effectuum actionem metitur; adeoque omnium velocitatum ſumma, in omnibus par-

Temporis ut tribuatur, uti per corpora certos
Poſſint cudentes moderatim educere motus.
Diverſæ, genus hoc, quoque vires tempore agentes
Æquali motus progignunt non alios, quam
His ipſis poſſint qui reſpondere; ſed uni
Tempora cuique dabis ſi non æqualia, motus
Non niſi temporibus reſpondeat ipſe, neceſſe eſt,
Quiſque ſuis, quibus exoritur. Vis quælibet ergo
Tanto major erit, quanto &, qui gignitur, ipſe
Auctior eſt motus, contractior & mora contra
Temporis. Et veluti gemina re dicimus omnes
Confieri motus, nimirum mobilitate,
Materiaque; ita vis eadem pro tempore certo,
Quanto eſt materies majorve, minorve, minorem
Contra, & majorem tanto edet mobilitatem.
Pondera ſic æque validis impulſa lacertis,
Qualia jactari ſpartani ſaxea diſci
Sæpe ſolent, quo materia compacta minori,
Hoc mage pernices longo dant tramite ſaltus.
Porro habet a motu nomen vis ipſa, movenſque,

Quam

particulis genitarum debet metiri vim. Hæc ſumma, idiomatis philoſophici vitio, ſuum non habet nomen, ſed velocitas totius corporis dicitur illa, quam quodvis unicum ejus punctum habet. Adhibetur autem pro ea potius vox *quantitas motus*, ſive tantummodo *motus*, qua voce exprimitur ſumma motuum omnium particularum, ſive potius ſumma determinationum omnium ad motum, quas omnes particulæ accipiunt. Hinc vero, cum hæc quantitas motus habeatur a velocitate ducta in maſſam, quo major eſt maſſa, eo minorem velocitatem eadem vis generat in corpore, & viceverſa.

Porro tempus hic duplici modo in motu genito a viribus ſecundi generis conſiderari poteſt. Primo quidem, quatenus is a viribus acceptus majore, vel minore tempore durare debeat; eo enim major erit ipſe motus, quo, cæteris paribus, diutius duraverit. Hoc quidem tempus ad actualem motum pertinet, nec in æſtimanda vi conſideratur, in qua potius conſiderari ſolet motus quidam potentialis, ſed determinatio omnium particularum ad percurrenda dato quodam tempore quædam ſpatia. Secundo modo conſideratur tempus, quatenus ipſa vis, ipſa actio diutius durat perpetuò motum progignens, eo enim eſt major ipſe potentialis ille motus, & ipſe actualis motus tempori dato debitus, quo majore tempore egerit vis activa.

Ut oſtendat, quo minor eſt maſſa, eo majorem velocitatem imprimi corpori, utitur exemplo corporum, quæ manu projicimus, ut diſci a Spartanis potiſſimum olim adhibiti ad vires in ludo exercendas. Notandum tamen hic in primis, velocitatem in hujuſmodi projectis non reſpondere accuratè maſſis imminutis, tum quia & brachium

Quam genitum referas ad motum ſcilicet, audit;
At ſi eadem ad ſolam referatur mobilitatem,
Inde trahens, veluti mutato munere, nomen
Audiet accelerans; tantoque hæc auctior extat,
Auctior illa movens quanto vis, prætereaque
Quanto materies minor eſt in corpore moto.
Compoſitos [a] motus at dicimus eſſe, recentes
Scilicet adduntur cum motibus ante receptis.
Metiri facile hos poſſis quoque; nam vel eadem
A tergo pellit vis corpora, qua prius ibant,
Rapta via; ſpatium ſpatiis percurritur æquum
Tum geminis; quorum primis a motibus alterum,
Alterum ab adjunctis tranandum tempore ſeorſum
Eſſet in æquali: vel vis nova motibus obſtans
Corpus in oppoſitas partes agit, atque repellit;
Parte illa tibi ſunt tanto breviora fugai
Intervalla, nova quantus vi debet oriri
Motus; & idcirco ſi ſit minor iſte priore,

Tum

chium ſemper ejuſdem maſſæ iis viribus ſimul moveri debet, tum quia in corporibus exiguæ maſſæ aeris reſiſtentia motum impreſſum ſtatim minuit, vel etiam exſtinguit; unde fit, ut leviſſimæ plumæ velocitatem ſatis magnam imprimere non poſſimus.

Demum diſtinguit hic Noſter vim, quam motricem appellant, ab ea, quam dicunt acceleratricem. Vis motrix eſt, quæ ad motum genitum refertur, quam expoſuimus, & reſpondet velocitati genitæ ductæ in maſſam, in qua ipſa gignitur; vis acceleratrix, quæ refertur ad ſolam velocitatem, in quacumque maſſa ſit. Sic gravitas in corporibus majoribus, & minoribus, eadem eſſe dicitur, cum eandem in illis velocitatem generet eodem tempore; pondus autem dicitur diverſum. Gravitas in illo ſenſu accepta eſt vis quædam acceleratrix, pondus vero vis motrix. Sed de iis, ubi de gravitate. Interea patet, vim acceleratricem, & motricem in eadem maſſa eaſdem eſſe, in diverſis maſſis eo majorem fore vim acceleratricem, quo vis motrix fuerit major, & maſſa minor.

Sed de formulis ad virium menſuras pertinentibus, ut etiam de pluribus virium generibus, ac de metaphyſicis earum conceptibus, plura & per ſe ſcitu digniſſima, & uſui futura inferius videbimus in ſupplemento.

[a] Explicata natura, & menſuris virium motricium, agit de ea, quam virium, & motuum compoſitionem appellamus. Motus compoſitus a pluribus motibus dicitur is, quem corpus habet, ubi a pluribus viribus ſimul determinatur ad plures motus, quorum ſingulos haberet, ſi ſingulæ ſeorſum agerent: vis vero compoſita e pluribus viribus ea, quæ ſola generaret eum ipſum motum, quem omnes illæ ſimul generant, & quoniam hic agitur de ejuſdem maſſæ vi, ac motu; quod de motu, ac vi motrice compoſita dicitur, idem locum habet in celeritate, ac vi acceleratrice.

Porro

Tum corpus, tanto ſed tardius, ibit eaſdem,
In quas ante, plagas; ſin par ſit uterque, neceſſe eſt,
Siſtat idem ſe; navis uti, quam flatibus æquis
Hinc Boreas protrudit, & illinc æſtifer Auſter;
Illa immota fero ſtans vortice paret utrique.
Denique poſterior ſi vincat motus, oportet,
Retro corpus idem ſua ſe in veſtigia flectat.
Nonne vides turris de vertice cum lapis alto
Labitur, ut lapſum celeret, motuſque receptet
Uſque novos, gravitatis enim novus additur ictus
Continuò ad terram? contra projecta ſuperne
Spicula cydonio in nubes & ſidera cornu,
Quo mage conſcendunt, mage tarda feruntur; ita omnem
Ipſa minutatim gravitas, quæ deſuper urget,
Decutiens motum, telum altis nubibus arcet.
Corpus [a] at obliquo nova ſi vis urgeat ictu

In

Porro hic primo loco exponit compoſitionem motuum, & virium ſecundum eandem rectam agentium. Si conſpirant, habetur ſumma omnium; ſi opponuntur, habetur differentia, & motus fit ſecundum directionem prævalentis. Si corpus habeat vi inertiæ ob velocitatem præcedentem motum aliquem, & nova vis concipiatur unico valido impulſu momento temporis imprimens motum oppoſitum; progredietur cum minori velocitate, quieſcet, vel regredietur, prout motus novus fuerit minor, æqualis, vel major reſpectu præcedentis. Si idem vi perpetuo agente imprimatur in directione contraria ei, qui aderat prius, fiet motus continuo retardatus in eadem priori directione, donec producatur motus æqualis priori, tum niſi vis ſenſim langueſcens ibi ceſſet, habebitur motus continuo acceleratus ad partes oppoſitas. In hoc caſu non poterit haberi quies, quæ tempus continuum ſine motu requirit. Unicum enim erit momentum temporis, quo quantitas novi motus perpetuo producti æquetur priori, cui unico momento reſpondebit velocitas potentialis nulla, & id momentum erit limes inter bina continua tempora alterum motus continuo retardati, alterum continuo accelerati.

Exemplum binarum virium oppoſitarum, quarum actiones elidantur, ſatis aptum deſumit a navi ventis contrariis ſimul impulſa, motuum conſpirantium, vel oppoſitorum, & in hoc caſu motus retardati migrantis in acceleratum, a gravi deorſum projecto, vel ſurſum.

Leges præcipuas, quæ in motu accelerato, vel retardato ſervantur, & nexum inter vires, quæ agunt, tempora, quibus agunt, celeritates, quas generant, ac ſpatia iis celeritatibus percurſa, perſequemur in ſupplemento. Illud unum hic notabimus, menſuram vis acceleratricis eſſe etiam ſpatiolum, quod dato tempuſculo percurrit corpus ea vi perpetuo ſolicitatum, quod ſpatiolum eo eſt majus, vel minus, quo illa ipſa vis major eſt, vel minor. Id quidem theorema uſum frequentiorem habet, & ex illis legibus deducetur.

[a] Obliquam motuum, ac virium compoſi-

In latus impellens, atque æquo verbere pulſet
Illi, quo fuerat pulſum, vi nempe priore;
Ibit idem media prorſum regione viai
Inter utrumque latus, ſimul & parebit utrique:
Sin impar nova ſit, neque motus proferat æquos;
Non medium per iter tranſverſum corpus agetur,
Sed lateri accedet magis illi, major in ipſum
Exeritur quo vis, ictuſque valentior urget.
Haud aliter, quam cum limphis torrentibus auctum
Vere novo flumen validis ratis incita remis
Trajicit, oppoſitamque, breviſſima quo via ducit,
Ad ripam recto convertit tramite proram;
Interea tumidis devexi fluctibus alvei
Raptatur, deorſumque ſecundo labitur amne,
Atque ita conjunctis tonſarum impulſibus, & vi
Undarum obliqua excurrit, ſeſeque cupitæ
Denique non ripæ, quo curſum obverſa tenebat,
Applicat, at tanto, quia rapta eſt, inferiori,
Quanto fluctiſonæ pernicior impetus undæ.
Sic quoque dum validos Juvenis de nocte lacertos
Helleſpontiacis agitaret fortiter undis
Luce regens notos ab Abydi littore curſus,
Illa luce regens, quam ſumma Sextias arce
Pendens, expectanſque madentia brachia collo,
Et teneris commixta amplexibus oſcula ſalſa,
Sidus uti monſtrabat, & extollebat amicum;

Sæpe

poſitionem explicare aggreditur, circa quam & theoremata præcipua quædam exponit, quæ Geometria indigerent, ut clarius intelligantur, multo vero magis, ut demonſtrentur. Hic ea ſine ipſa Geometria exponemus, quantum fieri poterit, ejus autem præſidio utemur in ſupplementis.

Primo quidem ſi bini motus, vel binæ vires æquales fuerint, ibit corpus itinere intermedio inter binas illas directiones ita, ut inclinetur æque ad utramque, & biſariam ſecet angulum, quem binæ illæ directiones comprehendunt, ſin altera major fuerit, accedet motus compoſiti directio ad directionem prævalentis.

Id quidem nondum ſatis determinat magnitudinem novi motus, nec vero in ſecundo caſu ipſam ejus directionem, cum quantitatem inclinationis nequaquam definiat, ſed ſolum acceſſum ad prævalentem; manifeſtum autem videtur per ſeſe, & eleganter a Noſtro binis exemplis illuſtratur, cimbæ tranſverſo motu fluvium tranſeuntis, & ejus curſu abreptæ, e quibus motibus obliquus quidam exoritur, & Leandri fabula, Helleſpontiacum fretum tranſnatantis, ut noctu ex oppido Abydo ad oppidum Sextum appelleret, ubi eum Hero puella, lucernam attollens, qua curſum dirigeret, expectabat.

Sæpe illum veniens properantior æquore deorſum
Fluctus ab Euxino, ventiſque tumentior unda,
Et fluviis rapiebat, & abducebat amato
Littore, nequidquam luctantem, ægreque ferentem,
Atque moras omnes, & tempora longa peroſum.
Denique [a] cujuſvis poſt lapſum temporis illud
In regione loci reperitur corpus eadem,
Qua foret, egiſſet ſi cauſa in id utraque per ſe,
Altera poſt aliam, atque æquali tempore ſeorſum
Quæque ſuo. Pariterque plagas ſi pluribus uno
Momento a cauſis in multas corpus agatur,
Corpus idem variis tot raptum motibus una
Conjunctis cernes quovis poſt tempore eodem
Eſſe loco, quo, vis ſi quæque cieret earum,
Æquis temporibus totidem, ſeorſumque videres:
Nec minus idcirco a diverſis viribus actum
Mobilitate pari ſemper, rectaque feretur.
Hinc facile agnoſces, diverſæ ita pellere corpus
Si pergant cauſæ, non junctim, at temporis æqui

 Per-

a Hic ipſum corporis curſum determinat hoc theoremate. Si binæ vires conſtanti directione ſingulæ in idem corpus agant eodem tempore, corpus illud in fine ejus temporis erit in eo loco, in quo eſſet in fine ſecundi temporis, ſi in iiſdem directionibus illæ vires egiſſent binis temporibus altera poſt alteram. Tum idem theorema extendit ad motus, vel vires quotcumque, aſſumptis totidem temporibus; quod quidem veriſſimum eſt, etiam ſi inter ejuſmodi vires ſit vis inertiæ, ſive præcedens aliqua velocitas. Id enim & rationi conſentaneum videtur, ut ſimul omnibus viribus pareatur, ac dum eodem tempore agunt, idem illud in ejus fine obtineatur, quod demum obtineretur, ſi ſingulæ ſeorſum agerent, & omnibus experimentis eſt admodum conſentaneum.

Porro ſi concipiantur vires illæ omnes unico valido impulſu agentes unico momento temporis, corpus percurret rectam lineam; cum per totum illud tempus ſolam retineat inertiæ vim. Hinc autem oritur directio, & magnitudo motus compoſiti, & vis compoſitæ e pluribus. Concipiatur enim via illa e tot lateribus rectilineis conſtituta, quot ſunt diverſarum directionum vires, quam corpus percurreret totidem tempuſculis. Si extremum hujus viæ punctum recidat in primum; omnes illæ vires in æquilibrio erunt, & habebitur quies. Quod ſi extremum illius viæ punctum diſtet a primo, corpus eodem illo tempuſculo percurret rectam lineam, quæ jungit primum punctum cum extremo, ac poligonum complet, cujus ſingula priora latera exprimeat vires illas componentes, vel celeritates iis reſpondentes, poſtremum hoc autem exprimet vim ex omnibus compoſitam, & velocitatem ipſi reſpondentem.

Hoc generali theoremate includitur

Perpetuo ſibi quæ ſuccedant ordine, ſeorſum
Quæque ſua varie pro menſuraque, plagaque;
Directos ut poſt tot motus, atque viarum
Poſt totidem flexus corpus, quo abſceſſerat, illud
Ad ſpatii redeat punctum, atque locetur ibidem;
Agnoſces, inquam, ſi tum premere undique eaſdem
Concipias vires ſimul a regionibus iſdem,
Hinc fore, perſtet uti nihilo minus illud ibidem,
Et quamquam impulſum, tamen omni a parte quieſcat;
Quandoquidem ſimul impellentes, ſive trahentes
Inter ſe hinc illinc librantur mutua vires,
Oppoſitis certant & motibus, officiuntque,
Nullaque pars victrix illo fit, victaque bello.
Corpus ſin ſpatii non, quo diſceſſerat ante,
Ad punctum redeat, diverſa at parte locetur
Ejus; erit, ſimul e conjunctis viribus illis
Omnibus ut demum vis tantùm hæc prodeat una,
Illud quæ recto poſſit transferre meatu
Semitæ ad extremas a primis finibus oras.
  Quapropter [a] vires multæ uno tempore agentes
Momine jam pollent æquali, ac una, queat quæ
Omnibus ex illis vis texier; oppoſitoque

Or-

tur & peculiare illud vulgatiſſimum pro binis viribus, motu nimirum compoſito percurri diametrum ejus parallelogrammi, cujus ſingula latera ſingulis motibus componentibus percurrerentur, & vim, quam exprimat ea diameter, componi a binis viribus, quas exprimant latera.

Etiam ubi vires vel omnes, vel aliquæ ſolum perpetuo agant, illa eadem theoremata locum habent, ſed non deſcribitur recta linea, niſi omnes agant perpetuo, & ad ſe invicem eandem rationem retineant toto illo tempore.

a Hic expreſſius docet compoſitionem vis e pluribus, quibus ſola æquivalet, & inde ad reſolutionem virium viam ſibi ſternit. Ut enim e pluribus viribus una componitur, ſic una quævis concipi poteſt, ut compoſita e pluribus, quibus æquivalet, quæ dicitur reſolutio virium, & eodem pacto motus etiam reſolvuntur.

Utriuſque exemplum habetur in pondere, quod per bina fila obliqua binis trochleis advoluta a binis ponderibus ſuſtinetur. Bina illa pondera majora ſimul erunt, quam pondus, quod ſuſtinetur, & pondus illud, quod requireretur ad ipſum ſuſtinendum filo verticaliter erecto. Binæ vires a binis ponderibus obliquè trahentibus exercitæ componunt vim æqualem, & contrariam ponderi ſuſpenſo, minorem ſe ipſis; vis autem hujus concipitur reſoluta in binas æquales illis binis, quarum ſingulæ ſingulas ſuſtineant. In ſecundo autem exemplo, vis minor ſimplex Euri flantis ab ortu æquivalet vi compoſitæ a binis viribus majoribus, ſed obliquis, & ex parte ſibi

Ordine confingi poterit vis quælibet una
Non aliter, quam ſi de viribus exoriatur,
Quotlibeat, multis; ſedenim ſit ut æqua poteſtas
Cunctarum, illius, quæ nempe eſt una, vigori.
Proin quibus eſt vires rerum metirier uſus,
De multis unam ut componunt, ſic quoque multas
Ex una faciunt, detexuntque, atque reſolvunt,
Quarum quæque plagam in diverſam tendat agendo,
Ut pro re fuerit, quam tunc inquirere pergunt,
Scilicet ut melius poſſint, citiuſque latentem
Prendere naturam: ſic quæ librata tenetur
Viribus obliquis moles, atque aere pendet;
Pendebit pariter librata, immotaque, ſi ſit
Suſtentata minori, at non obliquà trahente
Pondere; ſic æquo pinus per cærula curſu
Provehitur, lenis ſi a puppi ſpiritus Euri
Incitet, aut Aquilo ſimul hinc, ſimul & Notus illinc,
Et quatiat funes, illiſaque ſibilet aura.
Percipe [a] præterea, projectum dum loca tranat
Corpus, in exigui cujuſvis temporis ortu
A latere impelli repetitis ictibus ipſum
Interea & cœpto cogi decedere curſu;

ſibi invicem contrariis Aquilonis flatis inter Eurum, & Boream, & Noti inter Eurum, & Auſtrum.

Porro compoſitio virium in natura paſſim occurrit, reſolutio, ut ego quidem arbitror, nunquam; ſed ſolum concipitur ad faciliorem problematum ſolutionem, quod & Noſter indicat, & ego oſtendam in ſupplemento.

[a] Ad curvilineorum motuum geneſim facit gradum, qui habentur, ſi velocitatem aliquam ſecundum aliquam directionem habeant, in alia vero directione urgeantur, vi quadam agente. Porro ut definire liceat, quid accidat, ubi vires perpetuo agunt, ſolet conſiderari, quid accideret, ſi vires ipſæ in initiis tempuſculorum quorundam unico valido impulſu agerent, & tantam velocitatem producerent, quantam vis perpetuo agens producit toto illo tempuſculo, quam methodum Newtonus adhibuit, & Noſter hic adhibet.

In eo caſu deſcribi debet ſemita quædam conſtans ex lineolis rectis, quarum quælibet cum ad ſibi proximam nonnihil obliqua ſit, totum iter incurvatur perpetuo, & formam accipit poligoni cujuſdam. Nam quovis novo impulſu curſus deflectitur, quantum requirit nova velocitas inde orta, cum præcedenti velocitate comparata. Hæc quidem, quæ ſequuntur ad plenam comprehenſionem, Geometriam requirunt, qua utemur in ſupplemento. Hic eadem exponemus ſine ipſa, quantum licebit.

Si tempuſcula illa perpetuo minuantur in infinitum, ut vis jam deſinat in perpetuo agentem, latera recti-

Innumeris fractum tum flexibus, & diſtortum
Illud iter videas, corpuſque meatibus eſſe
Tot variam ſignaturum, inflexamque figuram
Conſtantem rectis tot nempe meatibus, ipſa
Tempora jam quot erunt, quæ longe parvula fingis.
Interrupta loco at ſi corpus vis ea turbet
Haud ullo, & quæ propterea ſit tempore in omni
Continuata; viam ſemper curvabit eundo
Illud, & inflectet; ſed flexus noſcere nullos
Ut poſſis uſquam, & procurſus prendere rectos;
Nam ſimul incœptat via recta, & deſinit eſſe
Omnibus in punctis, momento in temporis omni,
Principioque ſuo finem confundit, & unà
Advenit, atque fugit, ſimul exoriturque, peritque,
Tentat & in rebus dum ſe eſſe oſtendere, non eſt.
Et [a] veluti, dum ſit repetitis tempore plagis
Sæpe brevi conſtans multis multangula rectis
Semita tramitibus; tum protinus illa recentes
Si regione aliqua vis addere deſinat ictus;
Qua regione viæ reperitur, pergat eadem
Corpus continua, & directa proinde, neceſſe eſt,
Quo tantùm vis raptat iners, ut diximus ante;
Sic quoque continuos dum ſit via curva per ictus,

Ex-

ctilinea perpetuo minuentur, ac demum evaneſcent, nec ulli jam erunt anguli, ſed curvatura continua. Ubi igitur vis perpetuo agit directione obliqua ad directionem motus, deſcribitur curva quædam linea continua, in qua corpus vi inertiæ perpetuo conatur rectam lineam deſcribere, & vi obliqua perpetuo impeditur motus ejuſmodi.

a Oſtendit hìc, quid debeat accidere, ſi vis illa obliqua repente ceſſet. Abibit corpus per rectam tangentem, quæ nimirum curvam tangit ibi, ubi deſinit actio deflectens. Nam in caſu poligoni, ſi vis deflectens ceſſet alicubi, debet corpus abire per ultimi lateris continuationem. Porro ſi latus poligoni continuetur utrinque, habetur recta, quæ eo minus intra curvam poligono circumſcriptam immergitur, quo illud latus eſt minus, quæ ipſa, illo latere evaneſcente, deſinit in tangentem ejus curvæ, in quam deſinit poligonum ipſum.

Abibit nimirum per illam viam, per quam in motu ipſo curvilineo perpetuo abire tentat inertiæ vi, ipſum ſolicitante ad iter rectilineum, quæ via recta contingit curvam in unico puncto, & ne cum minimo quidem ejus arcu congruit, at ipſi ita eſt proxima, ut inter ipſam, & arcum curvæ, nulla alia recta duci poſſit, ſed alia quævis, aliqua ſaltem exigua ſui parte, immergatur intra curvam, licet ex ea paulo poſt emergat; unde fit, ut ea tangens pro quovis curvæ puncto (nam idem eſt *de privo puncto*, ac de quovis ſingulari determinato puncto) unica eſſe debeat.

Extera ſi ſubito ceſſet vis, & ſibi corpus
Linquat iners, quod iter jam tum tentabat, eodem
Inſiſtet recto, neque parti flectet ab ulla.
Quare unde egreſſa eſt, puncto continget in uno
Curvatam via recta viam; commune nec ultra
Quidquam eſt; diſcurrunt diverſo cæterà tractu:
Atque ita continget, non poſſit ut altera puncto
Quælibet ex illo naſci, & procurrere longe;
Illa intro de parte aliqua illabente, meatus
Quin ſubito incurvi, & rurſum elabente, ſecentur.
Hæc via de privo proin ſimplex, unaque puncto eſt.
Ergo ad [a] directum cum flexo tranſit ab arcu
Corpus iter (veluti de fundæ emiſſus habena
Cum lapis eſt); vel cum projectum eſt tramite recto,
Quod dein extrorſum veniens vis flectit in arcum,
(Ut de tormentis cum pondera projiciuntur,
Perpetuis gravitas torquet, quæ niſibus urgens)
Atque ita fit tangens arcum via; libera tantùm,
Solaque per ſeſe tum corpus inertia transfert,
Et facit, ut curſu ſpatiis meet omnibus æquo.
At quæ conveniunt extrorſum, & tramite vires
Cogunt, ut docui, a directo corpus abire
Pulſibus aſſiduis; varient ut ſæpe recepti,
Efficiunt, curſus: nam tangens ſemita cum ſe
Arctius ad tractus, queis extera dirigitur vis,
Inclinarit, uti ſpatium, quod clauditur intus,

Mu-

[a] Binos hic caſus conſiderat, alterum, cum a motu curvilineo fiat tranſitus ad rectilineum, ceſſante obliqua illa vi; alterum, cum a rectilineo tranſitur ad curvilineum, adveniente vi illa eâdem. Primum accidit ſaltem exiguo tempore ad ſenſum in lapide e funda emiſſo, ſecundum in globo emiſſo e tormento. Motus ille rectilineus fit per rectam tangentem vi inertiæ, & eſt æquabilis manente velocitate. Vere in funda lapis emiſſus deflectitur a gravitate, & in globo intra tormentum acceleratur a vi expanſiva aeris, ſed ab his hic mentem abſtrahimus.

At vis illa obliqua perpetuo agens velocitatem mutat. Exponit autem hic Noſter elegantiſſimum theorema, quod ego alibi accurate demonſtravi, & oſtendam in ſupplemento. Nimirum ſi per aliquem arcum continuum curvæ in omnibus ejus punctis directio hujus vis cum tangente orbitæ curvilineæ contineat angulum acutum, velocitas perpetuo creſcet, ſi contra obtuſum, perpetuo decreſcet, conſpirante in primo caſu nonnihil motu novo cum priori, in ſecundo vero caſu ipſi ex parte ſaltem adverſante. Si vero perpetuo angulum rectum conſtituant; velocitas manebit conſtanter eadem.

Mucronis ſeſe in ſpeciem conformet acuti,
Ocyor in partem fit curſus corporis illam,
Partem in quam geminæ contendunt mutua vires;
Tardior, in partes alias ſi tendat, ubi harum,
Amplius eſt ſpatium, flexuſque obtuſior exit,
Officiens uni nam detrahit altera ſemper.
Denique ſi recta regione ſecentur utrinque,
Par ſibi curſus erit, lapſuque feretur eodem
Corpus, & æquato fient ſpatia omnia motu.
Hæc [a] ſolet interdum vis extera tendere punctum
Ad medium quoddam, & connitier undique in unum;
Tum, quod iter circum ſignabitur; æquore eodem,
Quo punctum, prior & projecti quo via perſtat
Corporis, illo opus eſt, ſit in æquore, planitiemque
Immotam ſervet, poſitu & proſpectet eaſdem
Æquo oras ſemper, neque partes nutet in ullas.
Nunc ratione tibi qua tentem efferre, quod inſtat?
Et quibus effari verbis, quo claudere verſu
Poſſim, quæ ſignis, quàm verbis, plus agitur, rem?
Scribuntur cana variis ea ſigna papyro
Ductibus, ut flexus omnes, curſuſque, viaſque
Subjiciant ſenſu, & ſpatia ipſa, & tempora monſtrent.
Atque ea cum ſonitu careant, ſoliſque pateſcant
Signa oculis, vocali efferre in carmine nobis
Difficile eſt; tentare tamen dum conor, & ante
Invia dum Muſis, teneroque aſperrima greſſu
Dum peragro loca, ſolerti, nimiumque ſagaci

Me-

a Quæ dicta ſunt, pertinent generaliter ad vires quaſcumque. Quod ſi vires reſpiciant certum punctum, quod ſit ipſarum virium centrum, tum ipſæ vires dicuntur centrales, & quidem centripetæ, ſi tendant ad ipſum, centrifugæ, ſi tendant ad partes oppoſitas.

Hic caſus ad Aſtronomiam Mechanicam eſt perquam neceſſarius, & ejus conſideratio continet præcipuum Newtonianæ Philoſophiæ fundamentum. In eo autem caſu curva deſcripta jacet ſemper in eodem plano, quod tranſit per rectam, per quam corpus proiicitur, & per centrum illud virium, quod theorema hic a Noſtro proponitur, & facile concipitur, cum in eodem plano agant vires omnes. At eſt aliud celeberrimum de arearum deſcriptione æquali, quod admodum facile ope Geometriæ & explicatur, & demonſtratur; at ejus explicationem, ac demonſtrationem ſine ipſa aggredi, latino potiſſimum ſermone puro, & vincta numeris oratione, eſt onus ſubire tam grave, ut vires omnes, utcumque validas, longiſſime videatur excedere. Subiit tamen Noſter, & quidquid eo in genere præſtari potuit, præſtitit ſane. Interea ſummam mentis contentionem expoſcit, & unde potiſſimum difficultas oriatur, demonſtrat.

Mecum ades o animo, partemque fer ipſe laboris,
Nam partim, hæc tibi erunt audita, repertaque partim.
Quare opus [a] eſt, creſcunt ut tempora, corpore quoſvis
Quæ nempe enumeres circumlabente per arcus,
Creſcere ſic credas etiam illa, incluſa ſub iſdem
Fingere quæ poſſis ſpatia arcubus, a radiiſque
Comprenſa e medio puncto venientibus oras
Arcuum ad extremas; quæ ſcilicet area prodit,
Hoc genus, a filo, quod tenſum a corpore poſſis
Ducere ad immotum punctum, ut cum corpore latum,
Quo latum ſit cumque, ſui veſtigia linquat;
Area temporibus reſpondeat iſta neceſſe eſt,
Extat ut duplex in duplice, ternaque terno,
Cumque illo ratione pari paria augmina ſumat.
Certaque [b] nec ratio non horum, claraque conſtat,
Præſertim quibus eſt menſura exercita rerum
Mens, artiſque patent templa ad ſublimia diæ
Primi aditus, queis ignari poſuere profanas
Exuvias animi, & Veri micuere profuſam
Ad lucem; velut in ſpinis cum lubrica ſerpens

De-

a Ut ipſum theorema intelligatur, concipienda eſt via illa curva, quam corpus determinato quopiam tempore percurrit, & duæ rectæ lineæ ab extremis ejus punctis ductæ ad centrum virium, quæ rectæ appellari etiam ſolent radii. Exſurgit trilinea quædam figura clauſa binis ejuſmodi rectis, & illo arcu curvo, quæ quidem appellari ſolet *ſector* illius curvæ. Ejuſmodi figura planam quamdam aream includit, quam quidem aream deſcriberet filum quoddam, quod concipiatur a centro illo immobili ductum ad corpus gyrans, & perpetuo tenſum: id enim filum, dum corpus movetur in illa curva, perpetuo perraderet, ac velut everreret aream illam ejus trilinei.

Porro talis eſſe debet ille motus curvilineus, ut hæc area temporibus æqualibus ſit æqualis, adeoque duplo tempore dupla, triplo tripla, & generaliter proportionalis ipſi tempori. Nimirum ubi corpus eſt centro propius, crura illa extrema ejus trilinei, quæ aciem in centro figunt, magis divaricari debent, minus, ubi eſt a centro remotius, ac cæteris paribus motus in primo caſu celerior eſſe, in ſecundo lentior, ut apertura illa, & latitudo areæ, major, vel minor, minorem, vel majorem longitudinem adæquet.

b Expoſito theoremate ejus demonſtrationem aggreditur, cujus analyſim quandam faciemus inſiſtendo ipſius veſtigiis. Eam tamen multo facilius intelliget, qui Geometricis initiatus, ipſum ſibi ſchema efformet, quod in ſupplemento proponam. Primo quidem aſſumantur bina tempuſcula æqualia, quibus agat ſola inertiæ vis & percurrentur binæ partes æquales rectæ cujuſdam lineæ terminatæ tribus punctis, quorum bina extrema ſunt, tertium vero medium. Concipiantur

ex eo

Depoſuit veſtem, ad ſolem nitidiſſima fulget.
Principio geminas in partes divide tempus,
Quo, per diviſos quoque tractus, inſita corpus
Vis feret; ex illo tenta hinc producere puncto,
Ad quod directæ contendunt undique vires,
Tres radios tres ad regiones tramitis hujus,
Scilicet extremas, mediamque, ubi temporis æque
Partiti tibi ſunt confinia; bina videbis
Tum ſpatia ex illo ante oculos naſcentia ducto,
Tres laterum coſtas, ternos & habentia flexus;
Quæ quia communis veniunt de vertice puncti,
Atque pede inſiſtunt ſuper æquo, æqualia debent
Eſſe; & menſuras quoque diſtenduntur in æquas.
In media medio corpus regione viai
Tempore cum fuerit, facito vis extera pellat
In punctum; via tunc oriens deflectet ab illa
Rectæ parte viæ ſubito, interiuſque meabit
A gemina corpus vi raptum; hoc tempore tum ſit
Dimidio quod iter, pariter finire memento
Eductis radiis, ſpatium & ſignare triforme:

Hoc

ex eo centro ductæ ad ea puncta tres rectæ, & habebuntur bina triangula, quorum ſingula habebunt terna latera, & ternos angulos, quos exprimit vox illa *flexus*. Porro hæc triangula habebunt pro baſi binas illas partes illius rectæ, & verticem communem in centro virium. Ex Euclidea vero Geometria conſtat, triangula, quæ habeant baſes æquales, & altitudinem eandem, habere areas æquales. Igitur hæc triangula habebunt areas æquales, & proinde area, quæ ſecundo tempuſculo in hoc caſu reſponderet, eſſet æqualis areæ reſpondenti primo tempuſculo.

Jam vero in fine primi tempuſculi, & initio ſecundi, ſive in media via, adveniat corpori vis, quæ ipſum unico impulſu in centrum urgeat. Statim corpus ipſum deflectet a via priori ad novam interiorem motu compoſito. Quare ſecundo tempuſculo percurret non illam ſecundam partem primæ rectæ lineæ, ſed novam rectam lineolam. Concipiatur igitur novum triangulum terminatum hac nova recta linea, & binis radiis ad centrum ductis. Hujus trianguli area oſtendetur æqualis areæ illius ſecundi trianguli. Habebunt enim unum latus commune, nimirum illum radium, qui tendit a centro virium ad punctum illud, in quo fit deflexio; qui radius eſt medius e prioribus tribus, & communis eſt omnibus tribus triangulis. Si id latus aſſumatur pro baſi, bini vertices erunt illa ipſa bina puncta, alterum, ad quod deveniſſet in fine ſecundi tempuſculi ſola vi inertiæ, alterum, ad quod vi illa nova deflexum devenit. Porro hi vertices æquè diſtabunt ab illo radio aſſumpto pro baſi. Cum enim vis illa nova habuerit hujus ipſius radii directionem, nec ipſi admovit, nec ab ipſo removit

idem

Hoc ſubito agnoſces geminorum æquare ſecundum
Illorum (quoniam & lateri nituntur utrumque
Communi, radio nimirum, qui ſitus inter
Jam prius eductos medius; tolluntur & æque
Summi utriuſque apices, & quo vi corpus inerte
Nempe adveniſſet ſola, & vis extera quo nunc
Demittit; quæ cum medium ſe dirigat illum
Per radium, radio non ipſi cogere debet
Corpus, ut accedat, contra nec ut inde recedat);
Par quapropter erit primo quoque. Tempore corpus
Fac nova deinde pari immotum vis urgeat illud,
Ut prius, in punctum; formæ par area rurſus
Tertia prodibit triquetræ; ſic duplice duplex,
Ternaque ſic terno naſcetur tempore; eadem
Sic ratione aliæ, creſcunt ut tempora, creſcent,
Progreſſuſque pares ſpatia iſta, & tempora habebunt.
Sin pro temporibus momenta breviſſima ſumas
Temporis, externaſque putes crebreſcere vires
Ictibus aſſiduis, ut tramite corpus agatur
Incurvo; quoque tum manifeſtum id conſtet, oportet,
Quod doceo, curvos quanquam eſt via flexa per arcus.

idem corpus. Habebunt igitur etiam altitudines æquales, adeoque æquales & areas.

Cum igitur tertium triangulum habeat aream æqualem areæ ſecundi, ſecundum autem areæ primi, habebit & tertium aream areæ primi æqualem. Omiſſa jam area illa intermedia ſecundi trianguli, area primi eſt illa, quæ reſpondet lineolæ a corpore deſcriptæ primo tempuſculo, area tertii eſt illa, quæ reſpondet lineolæ a corpore deſcriptæ ſecundo tempuſculo. Quare hæ jam æquales ſunt. Quod ſi in fine ſecundi tempuſculi, & initio tertii, nova vis urgeat in centrum; eâdem demonſtratione conſideratis tribus areis, ea, quæ reſpondet ipſi ſecundo tempuſculo, ea, quæ reſponderet tertio, ſi nulla nova vis activa adveniret, ſed ſola ageret inertiæ vis, & ea, quæ reapſe tertio ipſi reſpondet, hæc area, quæ tertio tempuſculo reſpondet, æquabitur areæ, quæ reſpondet ſecundo, ac continuato motu eadem lege per tempuſcula æqualia quantumvis, areæ ſingulis tempuſculis debitæ inter ſe omnes æquales erunt.

Hinc autem conſequitur numerum areolarum reſpondere ſemper numero tempuſculorum, utcumque magni aſſumantur hi numeri. Quare temporibus etiam utcumque magnis habebuntur areæ ipſis proportionales, nimirum duplis duplæ, triplis triplæ, & ita porro. Et hoc quidem accidet, ſi vires agant per intervalla tempuſculorum æqualium, quo caſu deſcribitur poligonum, utcumque exigua tempuſcula ſint. Quare ſi decreſcentibus in infinitum tempuſculis actio vis centralis fuerit continua, quo caſu curva deſcribitur; eadem obtinebit lex.

Ambigua [a] nec item per te ratione tueri
Tutemet ipſe queas, quod ſcilicet ordine verum,
Hoc genus, inverſo patefit, ſi dicta retexas;
Invenias ſiquidem, curvo ſi tramite pergat
Corpus, quæque ſuis ut reſpondentia ſemper
Temporibus fili, aut radii veſtigia conſtent,
Eſſe illas vires extrinſecùs advenientes
Directas ad idem punctum debere, nec omnes
Non omni de parte ſimul concurrere in unum.
Invenies pariter, punctum quod corpore obitur,
Si motu quocumque itidem moveatur, & æquis,
Queis punctum, pellatur idem quoque viribus, atq;
In mundi partem directis corpus eandem;
Tum fore, temporibus reſpondeat area quævis,
Area, quæ punctum peragrante a corpore conſit.
Hanc etiam prorſus rationem invertere poſſis;
Nam ſi conveniant, & tempus, & area, præter
Corporis in punctum vires, quoque ineſſe videbis
Æquales alias illis, queis mobile punctum
Corripitur, pariterque eadem loca reſpicientes.
Contemplator item [b], ſi vis, quam tendere nuper
Diximus in punctum, verſa vice tentet ab illo,
Diffu-

lex, & areæ clauſæ arcu curvilineo, ac radiis tendentibus a centro virium ad ejus extrema, erunt temporibus proportionales.

a Hic jam alia tria theoremata proponit. Primum quidem eſt præcedentis inverſum. Nimirum ſi corpus quoddam ita moveatur in curva linea in plano immobili ſita, ut ejuſmodi areæ ad centrum quoddam terminatæ ſint temporibus proportionales, id corpus præter vim inertiæ, urgebitur vi activa in illud centrum directa; cujus theorematis demonſtratio quoque eſt prioris demonſtrationis inverſa, ut videbimus in ſupplemento. Secundum eſt hujuſmodi. Si centrum virium moveatur motibus, vel urgeatur viribus quibuſcumque, corpus autem quodpiam præter vires in ipſum directas habeat motus, vel urgeatur viribus eadem & magnitudine, & directione, deſcribet circa ipſum centrum curvam lineam mobilem cum ipſo centro, ita tamen, ut in ea areæ ad ipſum centrum ductæ ſint temporibus proportionales. Tertium demum eſt hujus ſecundi inverſum, ut primum ſuperioris. Horum demonſtratio pendet ex generaliore principio, quod nimirum motus communes duorum corporum nihil turbant motum reſpectivum ipſorum ad ſe invicem, quæ omnia in ſupplemento demonſtrabimus.

b Si vis centralis non tendat in ipſum centrum, ſed ad partes ipſi contrarias, affirmat, omnia illa theoremata locum habitura cum hoc ſolo diſcrimine, quod in caſu priore curva deſcripta obvertit curvitatem, in ſecundo convexitatem centro virium. Demonſtrationes utrique caſui ſunt prorſus communes.

Diffugere uſque procul, cogatque recedere corpus
Aſſidue, fieri paria omnia prorſus, ut ante,
Nempe omnes motu plano peragentur eodem
In ſpatio, quod per punctum tranſire neceſſe eſt,
Areaque ipſa ſuo pariter cum tempore creſcet:
Tantùm erit, ut punctum tergo convexa tumenti
Semita reſpiciat, quod concava reſpiciebat,
Interiuſque ſinu proprio includebat oberrans.
At vis [a] ſive petens punctum ſit, ſive recedat
Averſata; locis variis metirier ipſam
Corporis evaleas abrepti mobilitatem:
Tantò eſt mobilitas major, quanto magis ipſa
Semita contingens, qua corpus labitur, arcum,
Puncto, unde exſurgunt vires, vicina meabit,
At minor eſt ſpatio hoc puncti creſcente, viæque.
O utinam [b] non tam ſpeciem præbentia rerum
Magnam, & mirandam, commentaque inania vates,
In ſua nativa quàm verum inducere forma
Carmina tentaſſent, numeris & dulcibus ipſos
Certaſſent numeros contradere, & ordine certo
Verborum, certo rerum quod in ordine conſtat,

a Novum hic theorema profert, quod utrique caſui pariter commune eſt: nimirum velocitatem corporis in diverſis punctis orbitæ illius curvilineæ fore eo majorem, vel minorem, quo tangentes per ea puncta ductæ fuerint propiores, vel remotiores a centro virium, nimirum quo perpendicula e centro virium in eas demiſſa fuerint minora, vel majora. Id theorema generaliter ſic exprimitur. Velocitas in eadem orbita eſt reciproce proportionalis perpendiculo e centro virium ducto in tangentem. Sponte autem fluit ex arearum æqualitate. Triangula enim illa exigua habent pro baſi latus a corpore deſcriptum, quod velocitatibus proportionale eſt, quas exprimit, & pro altitudine perpendiculum ductum e centro virium, in quo verticem habent, in latus ipſum productum, quod, poligono in curvam abeunte, evadit curvæ tangens. Cum autem areas æquales habeant, erunt baſes eo majores, quo altitudines minores fuerint. Erunt igitur velocitates quoque eo majores, quo minora fuerint illa perpendicula, quod erat propoſitum.

b Jure hic conqueritur de inopia latinæ linguæ in hujuſmodi aſperrimis argumentis, in quibus multa idcirco omittere cogitur ſcitu digniſſima, demonſtrationes in primis; quod omnino non accidiſſet, ſi Poetæ veteres argumenta hiſce ſimilia, non inanes fabulas pertractaſſent. In his ſunt & methodi generales, quibus determinari ſemper poteſt, quæ vires requirantur ad hoc, ut data quævis curva linea deſcribatur a dato corpore ex dato ejus puncto cum data velocitate projecto, aſſumpto quovis puncto ad arbitrium pro centro, quod dicitur pro-

Multaque tam pulchri vulgare exempli per orbem
Cantus, gauderet quo Juppiter ipſe, recenſet
Dum vires, & menſuras, & pondera rerum,
Diſponitque ſuo, quem condidit, omnia mundo;
Non ita difficili Cirrhæa ad culmina greſſu
Rumperem iter, neque rebus in his mihi multa profecto
Eſſet opus, ne diſpliceam, intentata relinqui,
Neu, dum cantu aveo trahere, & mulcere, labore
Immodico laſſem mea poſt veſtigia euntes,
Averſoſque via videam decedere cœpta.
Haud minus inſiſtam tamen, & quæ poſſe videntur
Muſarum ingenuo tractari carmine, dicam;
Multaque prætercam, quorum minor uſus, opuſque eſt,
Quæque nec includi numeris nimis aſpera poſſint,
Quæque etiam verbis vix ſint adeunda ſolutis.
Quare [a], quod ſupereſt, dum curvos ire per arcus
Percipimus corpus, nos quædam hic nomina, quæ res
Vel ſignant varias, vel eaſdem, ſæpe cavendum,
Ut noſcamus, & ut diſcrimina quæque notemus.
Et niſus primò, aut conatus corporis ille,

Quo

problema directum virium centralium, & e contrario, quæ curva deſcribi debeat a corpore projecto e dato puncto cum data velocitate, ſecundum datam directionem, & ſolicitato in datum centrum virium ſecundum datam quamcumque legem a diſtantiis pendentem, quod dicitur problema inverſum virium centralium, ac eſt multo difficilius priore. Utrumque Newtonus generaliter feliciſſime ſolvit. Sed longe ſubliniora ſunt, quam ut verſibus tradi poſſint. Adhuc tamen, præcipua ſaltem ex iis theorematis, quæ ad Newtonianam Philoſophiam illuſtrandam omnino neceſſaria erant, hic Noſter protulit, plura proferam in ſupplemento. Ipſe interea haece morula feſſum Lectorem aliquantulum detinet, ac demulcet.

a Vocum quarundam ſignificationem, & virium diſcrimen, utrumque admodum neceſſarium hic aperit. Earum vel ignoratio, vel incauta uſurpatio mirum quantos errores induxit.

Tria in hujuſmodi motu diſtinguenda omnino ſunt: vis tangentialis, vis centripeta, & vis centrifuga. Binæ priores, ubi corpus in centrum urgetur, rem totam conficiunt; tertia concipitur tantummodo, & e prioribus binis reſultat.

Vis tangentialis eſt determinatio abeundi per tangentem, orta a vi inertiæ contracta ad præſentem velocitatem. Vis enim inertiæ eſt generalis determinatio retinendi quemcumque ſtatum; velocitas autem eſt determinatio ad quendam ſtatum peculiarem, nimirum percurrendi determinata quædam ſpatia determinatis temporibus. Hanc vim exprimit ſegmentum illud tangentis, quod percurreretur dato tempuſculo, ſi nulla nova vis adveniret.

Vis centripeta eſt illa activa vis, quæ

ſtatum

Quo tendit per iter fruſtra procurrere rectum,
Atque via, flexos arcus quæ tangit, abire,
Illi eadem certe eſt, quæ dicitur inſita, inerſque
Vis; niſi quod ſpecies eſt nominis amplior hujus,
Et ſervat quemvis generatim in corpore conſtans
Cumque ſtatum; verùm ille ſtatum jam non niſi ſervat
Inductum, in quo corpus eo pro tempore conſtat.
Nos hunc tangenti debemus tramite tantùm
Metiri niſum, tranſcurri tempore certo
Qui tum deberet, ſi nil obſiſteret extra.
Dicere at externam quam vim, vel ſuemus agentem,
Quæ medium, ut docui, quoddam petit undique punctum,
Quanta ſit, ex illo quiſque æſtimet intervallo,
Quo diſtant extrema viæ tangentis, & arcùs,
Tempore qui minimo quovis percurritur arcus,
Tempore quæque itidem via ſignaretur eodem
Tangens, extera vis ſi non deduceret intro;
Namque hac tantundem corpus deducitur a vi,
Quæ trahit in medium, quæcumque ſit, extima punctum;
Quæ ſi abſit, quoniam per idem removeret ab arcu
Tum ſpatium ſola impellens vis inſita corpus,
Corporis a curvo foret & fuga tanta meatu;
Scilicet a puncto fugientem vim quoque quandam
Percipimus ſimul eſſe, a vi quæ prodit inerte,
Quarum [a] non eadem, neque par (licet utraque cogat
Effu-

ſtatum immutat, & ad centrum dirigitur. Hanc metitur intervallum inter tangentem, & arcum, nimirum recta lineola ducta ab extremo puncto tangentis, quæ deſcriberetur dato tempuſculo, ad extremum punctum arcus, qui revera deſcribitur. Ea enim definit ſpatiolum, per quod vis illa centralis deprimit corpus a tangente ad arcum, quæ proinde ipſi vi proportionalis eſt.

Vis centrifuga reſultat ex his binis. Dum enim corpus vi inertiæ determinatur ad motum per tangentem, determinatur ſimul ad receſſum ab arcu, quem deſcribit per lineolam illam ipſam, quæ inter arcum, & tangentem intercedit. Quare eſt determinatio, quam habet corpus abeundi, ſi nulla vis activa in ipſum punctum agat, potius ad punctum extremum tangentis, quam ſola vi inertiæ deſcriberet, quam ad extremum punctum ipſius arcus, ad quod revera abit ob vim activam additam vi inertiæ. Quamobrem ejus menſura eſt illud idem intervallum inter arcum, & tangentem, quod erat menſura vis centripetæ, ſed contraria directione acceptum.

a Jam errores detegit, & ambiguitates tollit. Vim centrifugam aliqui cum vi tangentiali confundunt. Utraque a vi inertiæ ortum ducit, ſed prima illa exprimitur per lineolam infinities majorem, quam ſecunda; cum in ar-

Effugere) eſt menſura ; via metimur inertem
Nam vim tangenti ; metimur, at intervallo
Alteram eodem illo , quo extrema arcûſque , viæque
Tangentis diſtant ; idem , quapropter oportet ,
Extet uti niſus fugientis , viſque petentis ,
Oppoſitus tamen adverſis ſe frontibus inter .
Propterea multi has fieri implacabile bellum
Concipiunt inter vires , pugnaſque moveri
Ancipites , vel ab hac potiores parte , vel illa :
Inde pari ſi concurrant conamine utrinque
Libratæ , medium nec poſſe accedere corpus
Ad punctum , contra nec poſſe recedere dicunt ,
Æquatum ſed deferri debere per orbem ;
At mage ſi fugiens vis polleat , ilicet illa
De parti captare fugam ; ſin altera vincat
Fortior , in medium tantundem accedere corpus ,
Circuituſque ita translatum non conficere æquos .
  At vel ſi pugnet , genus hoc , vis utraque contra
Inter ſe , imparibus non hic concurritur armis ,
Ut mage propterea nunc hac , nunc debeat illac
Raptari corpus , vincentis præda ; cadaver

Pro-

in arcu , qui concipiatur infiniteſimus , infinities major ſit tangens , quam diſtantia tangentis ab arcu . Sed nec directiones congruunt , illa dirigitur ſecundum directionem arcus , hæc ad partes centro virium oppoſitas .

Alii concipiunt pugnam inter vim centripetam , & vim centrifugam , & dicunt corpus deſcribere circulum, ubi æquales ſint , accedere ad centrum , vel recedere , ubi illa ſit major hac , vel minor . At vis centrifuga , vi centripetæ ſemper eſt prorſus æqualis , cum per eandem lineolam exprimantur. Sunt contrariæ , ſed non pugnant ; illa enim eſt vis activa , hæc mere paſſiva . Hæc nimirum conditionate requirit receſſum ab arcu ad tangentem pro caſu , in quo illa non adſit , non abſolutè ; ubi autem illa adſit , plenum effectum ſortitur , nimirum deſcenſum corporis a tangente ad arcum, atque id ipſum , ſive curva interea accedat ad centrum virium, ſive recedat.

Longe alio ex fonte repetendum eſt , quando corpus debeat accedere ad centrum virium , quando recedere . Invenio hoc theorema generale , quod in ſupplemento demonſtrabo : ſi directio tangentis cum recta ad centrum ducta faciat angulum acutum , ſemper vi centrali continua haberi acceſſum aliquem ibidem : ſi obtuſum faciat , haberi receſſum aliquem ; ſi faciat angulum rectum , haberi acceſſum , receſſum , vel motum circularem in eadem diſtantia , prout velocitas tangentialis ſit minor , vel major , vel æqualis reſpectu ejus velocitatis , quam id corpus acquireret motu uniformiter accelerato vi , quam ibidem habet , per ſpatium æquale dimidiæ diſtantiæ ſuæ a centro virium ,

Propter ut Hectoreum quondam atrox ſanguinolentum
Inter pugna fuit Pelidem, Trojugenaſque
Littore in Iliaco Trojæ ſub mœnibus altis.
Scilicet æquales vis exerit utraque niſus,
Ut docui, ſpatioque pari metimur utramque.
Sin [a] aliena novis aptant hæc nomina rebus,
Ut melius, quod fit, nota ſub imagine monſtrent,
Non ego pugnarim; per me licet, hac ratione
Puncti nunc odio ferri, nunc illud amore
Dicatur corpus, ſi res ferat ipſa, metumve,
Spemve inter poſitum ſimul avertique, rapique;
Nec dubitem interdum noſtris in verſibus ipſe
Aut his, aut genus hoc, aliis quoque vocibus uti.
At ſi his nominibus ſe veram exponere credant
Rem, neq; non propriam verborum, cum fugientem
Vim dicunt, pugnas, librari, vincere, vinci,
Eſſe poteſtatem, longe illi errare videntur.
Nam quid erit fugiens vis hæc, niſi rebus in ipſis,
Quæ tum contingunt nimirum, iſtius inertis
Vis ratio quædam? hac ipſa ratione referre
Quippe illam ad vires, quas nos perhibemus agentes,
Colhibuit; verùm non per ſe pugnat, & obſtat
Viribus inſita vis aliis venientibus extra,
Invitiſque aliis ea non contendit eundem
Materiæ ſervare ſtatum, ſed ſola ſine illis;
Quæ cum adſunt, ſocias ſibi jungit, & efficit, omnes
Secum ut ſe certo componant fœdere in unum;
Quidquid & hinc exit queiſcumque a viribus, illa
Non minus eſt ſervare tenax, & juncta tenere
Effectis aliena ſuis, nec reſpuit ulla,
Queiſcumque adveniant laterum de partibus unquam.
Non igitur pugnant, non vinci, aut vincere poſſunt;
Cumque repulſantis, cumque impellentis eandem

Vis

a Permittit, ut per metaphoram, ſive translatam ſignificationem a propria ad impropriam, vel in quibuſdam imaginariis virium reſolutionibus, quarum exemplum in aliis libris occurret, & hic in ſupplemento exhibebitur, adhibeantur voces quædam, quæ ipſi vi centrifugæ actionem quandam tribuere videantur; dummodo, ubi philoſophicus adhibetur ſermo, ſecus fiat. Vim centrifugam eſſe derivationem quandam vis inertiæ: vim autem inertiæ non pugnare cum activis viribus, ſed motus rectilinei continuationem requirere ſolum pro caſu, quo illæ non adſint, non pro caſu, quo adſint, pro quo caſu ipſa vis inertiæ petit earum effectum conjungendum cum motu præcedenti.

Vis, modo uti docui, menſuram dicimus eſſe,
Sub verbone [a] aliud latet hoc, niſi quæ loca corpus,
Extera adeſt cum vis, tum trajicit, ipſa fuiſſet
Si tum abſens, eadem non tranſmittenda fuiſſe?
Proin quod non fieret tum, nos fore protinus illud
Oppoſitam in partem faciendum fingimus ipſi,
Oppoſitamque etiam cauſam confingimus ejus.
Tybure ſic Romam qui rheda vectus, equove
Advenit, totidem lapides pertranſiit, ipſa
Quot lapides Roma numerantur Tybur eunti.
Sed Tyburtinis ſi tempore collibus illo
Manſiſſet; quis erit qui credere poſſit, eundem
Propterea, quod iter tum non confecerit, ipſum id
Oppoſitis carpſiſſe plagis, & ab Urbe [b] Sibyllæ
Veniſſe ad fanum? quamvis id fingere poſſit,
Si libeat; quoniam non tum minus ille videbit
Spumantes Anienis aquas de vertice ſummo
Labier, & terræ ſorberi faucibus imæ.
Jam [c] ſuperà a dictis facili deducere pacto
Ipſe potes, curvos cum debeat ire per arcus
Incipere obliquis impulſum viribus illis
Corpus, uti docui, quarum altera, qua ſemel illud
Eſt ictum, recto decurrere tramite cogat,
Altera perpetuis impulſibus urgeat uſque
In medium quoddam, quo tenditur undique; punctum;
Perpetuos itidem ferri debere per arcus
Corpus idem, flexoque haud unquam exire meatu
Poſſe

a Cum hic error latiſſime pateat, in eo evellendo pluribus immoratur, atque exprimit illud, quod ſupra monui, vim centrifugam conditionate exigere receſſum ad tangentem, ſi nulla vis activa adſit. Quare haberi vim centrifugam ſignificat ſolum; tum corpus non fuiſſe deſcenſurum a tangente ad arcum, niſi fuiſſet vis activa, quæ ad deſcenſum determinaſſet. Hinc id, quod tum non fieret, concipimus, ut factum in partem oppoſitam, & concipimus quandam cauſam ejus veluti effectus. Eundem autem, ait, hic errorem admitti, quem admitteret, qui Tybure manentem diceret octodecim milliarium iter confeciſſe ab Urbe Roma Tybur uſque, idcirco, quod Tybure Romam non venerit, quo ſi veniſſet, illa octodecim milliaria confeciſſet.

b Extant Tybure vetuſti rotundi templi rudera, quæ vulgus paſſim appellat Sibyllæ fanum. At ego quidem illud etiam omnino incertum eſſe arbitror, an ullum Tibure fuerit Sibyllæ templum, licet ex Varrone apud Lact. lib. 1 cap. 6 conſtet, ipſam Tibure cultam, ut Deam, prope ripas amnis Anienis, in cujus gurgite ejus ſimulacrum inventum ſit.

c Quoniam ex iis, quæ dicta ſunt, conſtat, corpus data vi quadam continua

Poſſe; & præterea quæcumque feruntur in arcus
Corpora, vel longis ſeſè volventia ſæclis,
Obliquis pelli debere a viribus illis.
At cur uſque novos hæc jungens ictibus ictus
Altera vis, ſemperque potentior auxiliari
Adventu, demum non vincat, corpus & ipſi
Admoveat puncto, ut varios poſt denique flexus
Perpetuo breviore, atque interiore volutos
Circuitu jam puncto immotum id ſiſtat eodem?
Hanc [a] tibi ut ambigua fraudem de mente repellam,
Percipe principio (vel cum vis tendere punctum
Pergens ad medium non eſt obliqua viai,
Corpore projecto quæ fiat, ut omnibus extat
Revera curvis in motibus, obſtat at illi,
Officit & prorſus contraria, ſemper ut inde
Abradat quiddam, & ſemper decerpere tentet)
Protinus haud cuiquam manifeſtum poſſe videri,
Ut, quæ perpetuo decreſcunt tempore, demum
Omnia vel prorſus deſiſtant eſſe, vel ultra
Quaſvis finiti vaneſcant limitis oras.
Multa etenim finita vides fieri uſque minora,
Nimirum certis ſi legibus imminuantur,

 Fun-

tinua ſollicitatum in datum centrum, debere datum quendam datæ curvæ arcum deſcribere, ex quo egredi non poſſit, etſi curvam quamcumque in ſe redeuntem deſcribat, cum arcis ad datum punctum tendentibus, debere perpetuo urgeri viribus, quæ ad id centrum tendant; oritur difficultas, quam ut inſolubilem clamoribus toties repetitis objecerunt Newtonianæ theoriæ ii, qui primum tantummodo extimum quendam theoriæ ipſius veluti corticem leviter attigerunt, durioribus, quæ internam medullam concludunt, prorſus intactis. Petunt, qui fieri poſſit, ut Planeta quipiam in Solem, Luna in Terram gravis eo demum non recidant? Quanam ratione eveniat, ut finita illa prima projectionis velocitas continuâ vis ad centrum tendentis actione demum aliquando non extinguatur? Hanc Noſter proponit, ac pluribus methodis evidentiſſimè ſolvit.

[a] Ac primo quidem argumenti vim ſic enervat. Si vis in eo argumento eſſet ulla, hujuſmodi eſſet. Velocitas projectionis finita eſt; vis autem perpetuo ad centrum tendens debet ipſi ſemper aliquid auferre. Debet igitur illam aliquando extinguere, qua extincta corpus debet in ipſum centrum recidere.

In ea ratiocinatione falſum eſt, quod vis illa debeat ſemper aliquid auferre velocitati, cum, ut infra videbimus, debeat eam jam minuere, jam augere. Deinde etiam eſt falſum illud, quod imperitis ſummam habere videtur vim, quod nimirum, ſi ſemper aliquid

Funditus at nunquam minui, penituſque perire.
Ut ſi quis tibi forte talentum debeat unum,
Incipienſque die ſemper tibi dimidium ejus
Quaque repræſentet, quod jam ſuperabit; ita omnes
Quin etiam in menſes, omnes ita pergat in annos,
Luſtraque, ſæculaque, atque æterna in tempora pergat,
Haud unquam finem optatum contingere ſperet,
Quin aliqua ſi parte talenti obnoxius idem,
Uſque nec ulterius non ſolvere debeat: at ſi
Nummum credideris non unum, at quinque, decemve,
Atque ille unius partem tibi reddere, ut ante,
Dimidiam incipiat, nec reddere deſinat unquam
Dimidiam reliquæ partis; ſic detrahet unum
An nummum e ſumma quantovis tempore? ſemper
Quin plus quàm quatuor ſupereſſe, novemve videbis.
Sic & materiæ nullum quandoque movendi
Seſe poſſe dari finem quis perneget; illa
Perſæpe in partes licet ipſis tendere pergat
Viribus oppoſitas, quæ contra proinde trahentes
Ad ſeſe celeremque fugam, lapſumque retardent
Paulatim, aſt omnem non unquam extinguere poſſint?
Id magis appoſita valeam ratione probare

Sed

quid auferat, debeat totam demum extinguere. Vera, & firmiſſima ſolutionis vis in illa prima parte eſt ſita; adhuc tamen hanc ſecundam addit, & primo loco proponit, ut dum ea, quæ maximam habere vim arbitrabantur, prorſus inania vident, ad cætera ſolidiora quidem, ſed etiam ſublimiora mentem diſponant.

In primis igitur proiiciatur corpus ad partes centro oppoſitas, quo pacto vis centralis erit ſemper directe oppoſita velocitati impreſſæ, quod quidem in curvilineo motu nunquam accidit. Adhuc tamen, licet illa vis ſemper aliquid detrahere debeat, non inde neceſſario conſequitur, ut totam aliquando debeat extinguere. Fieri nimirum poteſt, ut e finita quantitate ſemper aliquid detrahatur, quin tamen unquam exhauriatur tota. Id evincitur ope progreſſionum geometricarum, quæ in infinitum continuatæ nunquam ſuperant certam quantitatem, ad quam accedunt ultra quoſcumque limites. Exemplum, quod adhibet talenti, a quo auferas dimidium, tum dimidium dimidii reſidui, tum iterum hujus reſidui dimidium, & ita porro in infinitum, eſt notiſſimum, & per ſe manifeſtum. Si ea ablatio fiat inde, ubi aderat unicum talentum, ſemper reſiduum illud minuetur in infinitum, ſed ſi aderant talenta 5, vel 10, ſupererit ſemper aliquid plus quam 4, vel 9.

Hoc pacto fieri poſſet, ut de illa velocitate ſemper aliquid tolleretur, nec tamen unquam tota extingueretur.

Sed tibi; proin pellens in quoddam corpora punctum
Vis tali conſtet naturæ prædita more,
Multo plus ut agat brevioribus intervallis
A puncto, quam cum loca ſunt interſita plura,
Tanto plus, quanto foret ipſe capacior orbis
Clauſus in his circum ſpatiis, quam clauſus in illis;
Illam præterea quoque concipe mobilitatem,
E quocumque loco delapſum corpus (eandem
At vim ſemper habens) quam puncto acquireret ipſo
In medio: nunc hac ſi mobilitate repente
Illo nempe loco projectum corpus in oras
Sit ſuperas; curſus ſemper minuetur, ut a quo
Extera partem aliquam vis tempore detrahit omni;
Non erit aſt, aliquid non ſemper ut ipſa relinquat,
Quod carpat, minus atque minus ſine fine, modoque,
Nec queat id facere, ut prorſus ceſſare putetur;
Semper ut e nummo dixi ſupereſſe quid uno.
Major propoſito ſin impetus impete conſtet,
Non tantùm oppoſitis valeat non ipſe petire
Viribus; aſt illud finitum, quod ſuperabit,
Semper erit, neque plus minuendum limite certo:
Pluribus exemplum tibi, quod genus, edere nuper
In nummis volui, cum dixi quinque, decemve

tur. Quin imo adeſt hujuſmodi theorema, quod in ſupplemento demonſtravimus ſupra, ubi definivimus leges motus accelerati, & retardati, quod huc maxime conducit. Si corpus, quod in centrum quoddam gravitet vi decreſcente ita, ut creſcunt diſtantiarum quadrata, ut nimirum in dupla diſtantia ſit bis duplo, ſeu quadruplo minor, in tripla ter triplo, ſeu noncuplo minor, & ita porro, quæ dicitur decreſcens in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, & eſt ipſa Newtoniana gravitas, projiciatur ad partes centro oppoſitas velocitate æquali ei, quam acquireret motu uniformiter accelerato per altitudinem æqualem ſuæ diſtantiæ a centro virium vi ea, quam ibi habet, ubi projicitur, conſtanter manente; nunquam totam velocitatem amitteret, licet ipſam minueret in infinitum: eam amitteret aliquando, ac retro regrederetur, ſi ea minorem velocitatem in projectione reciperet: finitam autem quandam ſemper haberet, nec infra certos limites imminueret, ſi reciperet maiorem; quod quidem eſt analogum iis, quæ idcirco præmiſerat de talentis.

Porro rationem illam vis decreſcentis, ut creſcit quadratum diſtantiæ, ſatis expreſſit Noſter per illud *tanto plus, quanto foret ipſe capacior orbis clauſus in his circum ſpatiis, quam clauſus in illis*, nimirum quanto ampliorem ſuperficiem haberet circulus, qui haberet pro radio ipſam diſtantiam: nam circulorum ſuperficies ſunt, ut quadrata radiorum.

Deberi, ad quatuor pertingi haud poſſe, novemve.
Nam tibi rebus ab his, queis vita aſſueſcimus omni,
Et queis in varios mentem traducimus uſus,
Non tam difficile eſt ad res non ſenſibus ante
Subjectas ullis induci, animoque volutas,
Proin novitate ſua ne nos percellere poſſint.
Præterea [a] quavis in curvi parte meatus
Vis ea nil aliud peraget, niſi tramite corpus
Tantùm a tangenti deducet, tramitis ejus
Limes ab extremo quantùm arcùs limite diſtat;
Proin opus, ut curvo ſemper ſervetur in arcu
Corpus idem; neque propterea, ſi tempore longo
Vis ſpatium oppoſito a curſu decerpere longum,
Atque infinitum infinito tempore poſſit,
Fiet, ut in punctum corpus cadat; infiniti
Flexus quandoquidem non tum minus efficiuntur.
Adde, [b] quod interdum, quamvis vis extera vincat,
Interdum vincetur, ut inter ſe magis ipſæ,
Aut minus hinc illinc obliquæ ſunt regiones,
Tangentiſque viæ, & punctum pergentis ad illud;
Tum ſua ſi ductus redit in veſtigia circum
Orbis, & inceptus proprios cum finibus aptat
Conjungens, ſemper cujuſque in fine, neceſſe eſt,
Circuitus illa ut pugnæ diſcrimina ceſſent;

Nam

a Contra ea, quæ diximus, illud obiici poſſet, in eo caſu ea, quæ auferuntur, imminui in infinitum, & idcirco nunquam extinguere velocitatem ſemel genitam, at in motu orbiculari vim ſemper manere finitam, quæ ideirco aliquando velocitatem totam auferre poſſet. At ea prolata ſunt, non ut ſolvant difficultatem, ſed ut enervent ejus vim, quæ habetur prima fronte in eo, quod continuâ deſtructione finita quantitas non exhauriatur. Ad difficultatem penitus amovendam ſatis eſt illud unum, quod hic habet. Cujuſcumque magnitudinis ſit ea vis, quæ nihil aliud præſtet, niſi perpetuo a tangente ad arcum curvilineum orbis cujuſcumque corpus deprimere, ea efficere non poteſt, ut ex illo orbe umquam egrediatur, & in centrum virium recidat. Atqui ea vis admittitur, quæ id tantummodo præſtet, determinatue enim per illas ipſas lineolas interceptas inter tangentem, & arcum. Igitur ea numquam poteſt corpus ab ejus orbis perimetro removere, & ad centrum adducere omni velocitate amiſſa.

b Secundam ſolutionem addit pariter evidentiſſimam, quam ſupra innui. Vis illa in orbe, qui in ſe redeat, non poteſt ſemper demere aliquid velocitati, ſed jam demit, jam addit. Omnes virium effectus durant cum directionibus, cum quibus impreſſi ſunt, & cum iis omnes ſimul

com-

Nam quodcumque oritur ſi qualibet, illud oportet,
In quas vis directa, plagas ſervetur in illas;
At cum omnes toto poſitus mutantur in orbe,
Mutantur quoq; proinde plagæ; quapropter ab una
Parte quod exortum eſt, paulatim diſperit orbis
Illius ex alia, redeuntque eadem omnia, ut ante,
Cum primum incœpit ſe in gyrum volvere corpus.
Denique [a] jam quid opus rationes reddere multas,
Cur nunquam in medio, in quod pellitur uſque, quieſcat
Puncto, ubi cœpit agi ſemel illos corpus in orbes,
Cum, qui per numeros, per certas ire figuras
Aſſueſcunt animo, manifeſtum hoc reddere poſſint;
Scilicet incurvos ductus quoſcumque viarum
Poſſe a corporibus ſignari quodlibet actis
In punctum? Quin ſi punctum, certique meatus
Propoſiti tibi ſint, poſſis, ſit idonea quænam,
Noſcere, vis, ipſum qua in punctum corpus agatur,
Et ſe in propoſitos circumferat uſque meatus.
Quod ſupereſt, [b] par rebus ab his advertere mentem
Huc etiam tibi, uti videas, ipſa extera ſi vis,
In medium quoddam poſui quam tendere punctum,
Ordine mutato contraria prorſus ab illo
Diffugiat, quid tum fiat. Fieri omnia certum eſt
Oppoſita, atque in re prorſus pugnantia quaque;
Nam

componuntur. Vires, ubi in orbe circa centrum virium gyratur, ſecundum omnes directiones agunt, & in partibus oppoſitis ſecundum directiones oppoſitas. Igitur quidquid fit in altera orbis parte ab illis viribus, in oppoſita totum deſtruitur, adeoque toto orbe peragrato, debet redire velocitas illa ipſa, quæ initio habebatur.

a Poſtremo efficaciſſimam omnium rationem adhibet: geometrico rigore demonſtrari, ac id ipſum in ſupplemento demonſtratum exhibeo, dato quovis orbe, utcumque in ſe redeunte, & aſſumpto quovis puncto pro centro virium, poſſe illum orbem deſcribi, quacumque projectionis velocitate facta e quovis puncto ipſius orbis, viribus quibuſdam, quæ poſſunt definiri. Non igitur in centrum recidet, vel ex eo orbe egredietur umquam ipſum corpus.

b Demum hic illud notat: ſi vis activa non urgeat corpus in centrum, ſed in partes centro oppoſitas, poſſe omnia, quæ dicta ſunt, huic etiam caſui facile aptari, ſed illud fore diſcriminis, quod præter convexitatem obvertandam in eo caſu centro ipſi, ibi vis activa erit vis centrifuga, quæ nimirum, dum a tangente trudit ad arcum convexum, adeoque jacentem ultra tangentem, removet a centro virium: contra vero vim illam paſſivam derivatam a vi inertiæ fore centripetam, æqualem, & directione contrariam ipſi centrifugæ, ut prius.

Nam præter quam quod puncto haud, quæ concava,
Obvertet via curva, ſinuque ambibit amico, (frontem
At contra tergo, fugientum more, tumenti,
Ut docui, & parti convexa videbitur illa;
Quæ fuerat vis ante trahens, nunc facta repellens,
Quamque repellentem nos ante vocavimus, ipſam
Nunc contra nobis vocitare neceſſe trahentem eſt;
Rectaque contingens arcus quoque ſemita verſos
Vertetur pariter, nec, ut ante, recedere corpus
A puncto per eam, ſed contra accedere poſſit,
Quandoquidem a puncto tunc ipſe remotius arcus
Finitur quicumque, viæ tangentis eundem
Quam quod erit nempe extremum, limeſque repertus.
Jam quoniam [a] hoc longo produximus ordine rerum
Carmen, & ingenii langueſcunt denique motus,
Laſſaque ſuppeditat mens ægre rem, numeroſque,
Verbaque; me paulo contractis condere velis
Eſt opus in portu, & requiem captare laborum
Tantorum; quanquam non ſponte avellor opella,
Verum invitus ab hac, ſubitoque ingrata futura eſt
Ipſa quies, notique placent, retinentque labores.
Scilicet in noſtris vis eſt quoque mentibus illi
Fors ſimilis, qua materiam perhibemus inertem;
Hinc nos ipſa juvant non tantum expertia motus
Otia, non requies ſemper jucunda laborum eſt;
At ſervare ſtatum, quo tum ſumus, illud & ipſum,
Quod facimus, tantum facere, aſſuetiſque teneri,
Et quibus in rebus, ſtudiiſque moramur, obire
Plus eadem, quam quæ diverſa in ſorte probantur.
Bellum miles amat, Mavortis & impiger artem
Inſequitur; pacis piger idem ad munera contra eſt;
Navita cum ventis contendere, perque tumentes
Ire audax fluctus, vix ſiccam tangit arenam,
Oſcitat extemplo, atque invitus littore oberrat;
Invituſque urbis verſatur per fora magnæ
Agricola, appenſumque domi ſuſpirat aratrum;

Cau-

[a] Amœniore epiſodio librum abſolvit, analogia quadam inter vim inertiæ corporum, quæ perſeverant in eodem ſtatu quietis, vel motus, in quo ſemel ſunt poſita, niſi vis externa perturbet, & ſimilem animi noſtri indolem, qui plerumque iis delectatur ſtudiis, quibus aſſuevit; interdum autem tumultus quoſdam ſentit intimos, quorum vi fere abripiatur; ubi cautè loqui-

Cauſidici cauſas agere, & connectere lites
Litibus, & nodos ardent diſſolvere legum.
Denique quiſque ſuas exercet ſtrenuus artes,
Idem alias contra plerumque ignavus ad omnes:
Nam ſtudiis volupe eſt ipſis hæreſcere mentem
Cuique ſuis, quodam & jucundo exinde tenetur
Mens ſenſu, neque ſe patitur divellier a re,
Cui vacat, atque, ultro quo fungitur ipſa, labore.
Præterea exortos nos intra ſæpe tumultus,
Sæviter infeſtant qui pectora noſtra, videmus
Secum animum rapere, atque involvere ſponte ſequentem,
Vix valido niſu ſæpe ut miteſcere poſſint;
Si velit, ipſe etenim queat in contraria niti.
Irati vel habere velint, vel fingere cauſas
Irarum cupiunt & motibus ire ſecundis,
Fræna truci laxant odio, extimulantque furores:
At Mater, dulcem cui mors metit invida natum,
Inſomnes ducit noctes, ſævoque tenetur
Sponte amens luctu, quærit loca ſola dolori,
Mixta levant lacrymis animum ſuſpiria triſtem,
Quippe dolor juvat, & quædam venit inde voluptas.
Plurima ſic itidem petere ipſe exempla valebis
Pluribus a rebus, noſtros ut conſtet inertes
Eſſe, ſtatuque animos in eodem velle teneri,
Exterius niſi tum veniat vis, cauſaque turbans,
Excitet in noſtra quæ tædia mente, moleſtamque
Angoris ſpeciem, triſtiſque incommoda ſenſus,
Ut ſit nulla quies intus; tum cogimur illo
Cedere velle ſtatu, proin ſuppeditare novas res
Continuo menti, ſenſu quibus ipſa moleſto
Exſolvi queat, & turbatam acquirere pacem.
Tum varias in res votis flagrantibus inſtat,
Et deſiderio ſemper configitur acri;
Mens tamen ardeſcens quo plus deſiderat, expers
Hoc mage tranquilla eſt, longeque remota quiete,

Et

loquitur Noſter; monet enim manere libertatem nobis obnitendi, ſed valido niſu opus eſſe; ubi autem quis ſe abripi ſinat, ægre admodum conſiſtere, vel motum deflectere, niſi externa aliqua vis ſtatum mutet, & nos alio avertat, quod tum potiſſimum accidit, cum deſiderium eorum, quæ non habemus, excitatur in nobis.

Porro ut corpus, ſi id agatur viribus oppoſitis, neceſſario fortiori paret, ita plerumque animum noſtrum quamvis

Et cruciante magis torquetur, & uritur æſtu,
Proin deſiderio pleroſque, recedere primo
Forte ſtatu quos tum violentam cernimus ob vim,
Haud ſecus ac morbo quodam, languere putamus.
Quapropter qui nil deſiderat, ille, neceſſe eſt,
Securus læta, & tranquilla mente fruatur,
Contentuſque ſui degat, nil quærat & ultra.
Nec quodcumque bonum, potiuſve quod eſſe bonorum
De genere apparet, nos noſtro dimovet ad ſe
Alliciens præſente ſtatu, niſi ſuſcitet intus
Ante ſui deſiderium, & faſtidia quædam
In nobis, dum, quæ cupimus bona, ſuppeditentur.
Propterea vitæ feliciter inſtituendæ
Cum videant multi, quam virtus utilis extet,
Et quam grande ſuis decus afferat; haud tamen illam
Sectari, ut par eſt, porro mirabere raros;
Divitiarum etenim, vel fortior ambitionis
Tunc illos alius tranſverſos corripit æſtus
Præcipites, magis & ſtimulis agitantur amoris.
Nimirum molli cui flexa cupidine corda
Jamdudum, videt interdum rem funditus omnem
Labi, atque abſumi vires, famæque parari
Dedecus, æternoſque obita quoque morte dolores,
Nequitiæque ſuæ, fors pœnitet, oppoſitoque
Fors tum jurat item vitam traducere more;
At poſt cum vultus redeunt ſimulacra decori,
Verbaque, riſuſque, & communia gaudia menti,
Surgit amarum aliquid ſub corde, & tædia ſurgunt,
Aſſuetaque voluptate, illecebriſque carere
Diſplicet; inde, quod angit, ut id deponere poſſit
Ex animo, Veneris ſe ſub juga mittit, ut ante,
Quæque mala eſſe videt, ſequitur, quæque improbat ipſe.
Nam violentius his, quæ ſunt præſentia circum,
Mens quatitur, ſenſus quæque illabuntur in ipſos;
Et dolor expertem præſens eſt eſſe quiete;
Quippe, carere illo præſente, atque excruciante,

Hoc

vis volentem, & liberum, adhuc tamen abripi ab eo, quod propius, & præſentius majore ipſum percellit vi: ac ut in corpore e pluribus viribus utcumque diverſis unica exſurgit compoſita, cui obtemperat, ita & animum plerumque directionem ſequi compoſitam ex omnibus impulſibus, e moribus, ex affectibus, & deſideriis, aliiſque ejuſmodi, ad prævalentem autem

magis

Hoc primum eſt certe, quod connitamur; hic extat
Princeps nempe gradus vitai, fonſque beatæ.
Multaque propterea quæ ſunt bona, cernimus ipſi
Immoti, & ſtimulis exinde haud angimur ullis;
Queis ſine præſertim felicem condere vitam,
Atque alibi reperire, quod inſtat, poſſe videmur.
Pluribus in vita jam cum uno tempore ſæpe
Experiamur agi ſtimulis torquentibus intus,
Eſt opus, exſurgat medium quid ab omnibus, atque a
Compoſitis ſimul incertum ſe proferat extra
In nobis deſiderium, huc quod raptet, & illuc,
Et velut incurvo mores ſine lege meatu
Inflectat noſtros, nec rem convertat in unam:
Unde tamen pemimur magis, atque valentior unde
Impulſus venit, in rem plus contendimus illam.
Proinde aliis major raptat nos ſæpe cupido,
Exoritur noſtris quæcumque a moribus, alte
Queis ſumus imbuti, variis & ab uſibus, atque
Exemplis, demum ex ipſis affectibus intus,
Qui magno quatiunt animum plerumque tumultu,
Impelluntque, leves ut jactant per mare venti
Aut puppim, aut vacuo pendentia nubila cælo.
Hinc nobis adeo diviſis, diſque ſipatis
Undique multiplici votorum tot ratione,
Magnarum, quæque æterno ſunt pondere, rerum
Et minor, & nulla eſt interdum cura quietis
Hic tantum, intentis ad cætera, ſollicitiſque.
Quare opus eſt noſmet, ſummum, æternumq; quod extat
Sæpe volutando noſtra ſub mente, nec omni
Non de proſpectu, non omni a parte tuendo,
Ejus uti, quæ ſit, naturam perſpiciamus,
Quam præſtans ea ſit, præclaraque, magnaque longe;
Præſentemque velut tueamur, conſpicuamque
Haud unquam immemores; nam protinus irrequieto
Cor poterit deſiderio configere noſtrum,
Tranquillæque ſtatu mentem deducere pacis.
Res aliæ nequeant exiles, atque fugaces,
Atque leves, animi tunc ad ſe vertere motus

magis accedere. Quod cum ita ſe habeat, cavendum, ut aſſiduà meditatione illa, quæ ſolida, quæ æterna ſunt; ſiſtamus animo, quibus perſpectis movebimur ita, ut reliquos omnes impulſus ridere poſſimus ſecuri.

Contendentis eo, conatu, quo potis, omni,
Atque male eſſe ſibi, curaque urgerier acri
Experientis, ubi procul illo a fine vagatur.
 Felix, quem capiunt, quæ ſumma, æternaque conſtant
Illa fames quem vexat, & expectata voluptas
Suſcitat; haud illum nitor auri, purpureoque
Lumine collucens oſtrum regale movebit,
Famaque tranſverſum rapiet, nec blanda voluptas
Illiciet dulci perfuſum fonte leporum.
Immotus res humanas verſabitur inter,
Subjicienſque ſibi mortalia quæque feretur
Altius, atque caput ſublimibus inſeret aſtris,
Quo neque ventorum tempeſtas, nigraque gliſcunt
Nubila, nec tonitru, nec fulmine concutitur mens,
Perpetuùm at cælo ridet lux alma ſereno.

LIBER SECUNDUS.

INSCIUS [a] a teneris veluti puer incipit annis
Matrem, & nutricis blandam cognoſcere vocem;
Poſt circum nil non admirans, multaque tentans
Notitias haurit faciles, mentiſque vigorem
Induit, ipſius paulatim ut corporis; ullo
Si neque mens morbo, neque corpus langueat ægrum;
It varias ſolers porro, experienſque per artes,
Prodit & a longo ſemper prudentior uſu:
Haud aliter ſua Doctrinæ quoque tempora mutant;
Ipſæ ortus habuere ſuos, teneramque juventam,
Deinde novos auctus, majoraque robora ſumunt;
Nam Genus humanum, ſua quo producitur omnes
Annorum per circuitus diuturnior ætas
Cultius in multis, longeque peritius exit;
Scilicet adjiciens inventis artibus artes.

M 2 At-

[a] Generis humani in Europa, ac ſtudiorum, & doctrinæ ſtatum comparat, cum ſingulorum hominum ſtatu, & mutationibus, qui nimirum a prima infantia perpetuo validiores evadunt, niſi identidem morbus ſeriem interrumpat, poſt quem iterum convaleſcant. Doctrinam etiam paulatim creviſſe, barbarorum verò irruptione pene obrutam cœpiſſe itèrum paulatim reſurgere, (quod quidem tribus ab hinc ſæculis accidit Græcorum potiſſimum adventu in Italiam cum ſuis libris, Conſtantinopoli capta, & tota Græcia in ſervitutem redacta) quæ doctrina nunc ætates omnes præteritas longe ſuperaverit, de quo quidem ſaltem, quod ad univerſam Matheſim, & Phyſicam pertinet, nemo ſane dubitare poterit, niſi qui tot præclariſſima noſtræ ætatis monumenta penitus ignoret.

Plurima autem in hoc exordio occurrunt notatu digniſſima, quæ attentus

Digitized by Google

Attamen & triſtes morbi incubuere repente
Mentibus interdum; veluti ferus horrida cum fert
Arma, & barbaricis graſſatur moribus hoſtis,
Et monumenta virum ferro populatur, & igni
Inducens late pulchrarum oblivia rerum;
Ut quondam a gelida toties venientibus Arcto
Gentibus huc ad nos victum, ſedeſque petitum.
Indigenas propriis pellebant ſedibus ipſos
Omnia vaſtantes late loca, & undique cultus
Vertentes cum non humano more latinos.
At quoniam ex longo jam tempore deinde per omnem
Cœpimus Europam grajis, latiiſque vacare
Quærendis veterum monumentis, eque ruendis
Mirandorum operum confuſis ſæpe ruinis;
Paulatim ad pulchras artes, excultaque quondam
Perventum ſtudia, & latitantes pulvere longum,
Obductæque ſitu Doctrinæ in luminis oras
Rurſum, & muſarum priſci venere lepores.
Deinde & certatum eſt nova primis multa repertis
Addere, quæ ſolers, felixque induſtria ſæpe
Extudit: ingenii ſic ultra extendere fines
Semper, & extructam magis uſque attollere molem,
Ætateſque datum eſt alias prævertere cunctas,
Multo ut docta magis fuerit, quæ poſtera venit.
Creſcit &, inventis quo plus diteſcimus, ardor
Quærendi, multoque patentior eſt via, multo
Eſt ratio melior; ſterilem vix proinde locamus
Unquam operam; e facili ſurgit ſeges ampla labore.
Exin audaci nubes ſuperare volatu,
Sideraque, & ſolis tentamus ſæpe calentes
Cominus in radios irrumpere vi rationis,
Et tot in abductos mundi penetrare receſſus.
Sed jam [a] noſtra alias cum tantùm exceſſerit omnes
Ætas,

tentus Lector ſatis per ſe dignoſcet. Exhibetur primis verſibus ea ratio, qua ſuas humana mens in prima infantia ideas haurit, eas digerit, admiratione perculſa ad novos ictus, tum experimenta veluti per attentationem inſtituens ſuum ſibi ſyſtema de rebus extra ſe poſitis demum efformat. Barbatorum irruptio, cauſæ impellentes, effectus ſubſecuti, brevi, ſed dilucide exponuntur. Hæc & ſexcenta alia hujuſmodi, quæ ubique occurrunt, Lectori notanda relinquimus.

a Quid in poſterum futurum ſit, conjectatur: fortaſſe eo provehentur noſtri ævi inventa, ut hæc noſtra cum futuris ætatibus comparata, infantia quædam videri debeat: fors & ite-

Ætas, quid fore cenſendum venientibus annis,
Contendent ſi tum noſtrum hunc urgere laborem,
Et proferre animi præclaro ardore nepotes?
Proh quantam eductæ molem ſuperextruet, atque
Quanta nos ſpatii poſt ſe regione relinquet
Poſteritas! noſtros infantum greſſibus æquans
Greſſus, jactantes forſan ridebit, ut altis,
Et magnis nos de rebus, quas eſſe videbit
Præ propriis tenues nimium, & deprendere multa
Non potuiſſe pedes mirabitur ante locata,
Atque oculos; veluti nos longùm ignota fuiſſe
Miramur, quæ nunc adeo manifeſta tuemur.
  Fors etiam verſis fatis, & numine lævo
Accidet, ut, poſt nos quæ venerit, addere rebus
Non modo nil valeat detectis, ſed neque noſtros
Conatus animo pertingere, & utier illis
Semper languidiore animorum percita motu
Progenies, memori dimittat & omnia mente;
Omnis uti fama, & tantarum gloria rerum
Excidat immani rurſum ſuperante per orbem
Barbarie, cultuſque in gentem deteriores
Inducente vel ob bella exundantia, & uſus
Armorum nimios, ſævaſve tyrannidis artes:
Ad mores nam mens prona eſt humana ferinos,
Atque humiles facile aſſiduo vexata pavore
Induit ipſa animos. Varios his addere morbos
Poſſis, mortalem nova per contagia ſtirpem
Exorta horribili minuentes clade; vel urbes,
Regnaque terrai vaſto labentia motu,
Fluminaque, æquoraque oppoſitas vincentia moles

In

iterum barbaries ingruet, ac omnia monumenta delebit, ut in Egypto, ubi notæ marmoreis, ut ita dicam, libris inſcriptæ, videbantur æternitatem polliceri, quæ oblitterata ſignificationis memoria, mutæ jam, ac veluti elingues conticeſcunt. Tanta nimirum cultiſſimæ olim gentis doctrina ita interiit, ut nec apud ipſos, nec apud nos tot inventorum notitia ſuperſit. *Signa repertorum tuimur, cecidere reperta.*

Noſter quidem ſperat meliora, typis potiſſimum fidens, quibus uſque adeo multiplicantur exemplaria optimorum potiſſimum librorum, qui ætatem laturi eſſe videantur. At mihi contra ad infauſta, quæ multo frequentius accidunt, prona mens, animo formidinem incutit. Lapidei confracti, disjectique ſunt libri, amiſſa & idiomatis, & notarum ipſis inſculptarum cognitio; quid chartaceis accidet, ubi olim peſtis aliqua Turcarum

peſte

In loca ſe latis culta inducentia campis;
Nec non & terras qui poſſint obruere, imbres
Diluvio immani, & faciem immutare locorum.
His inſtructa ſolet, veluti feralibus armis,
Præterquam quod edax etiam ſit, & undique rodat,
Longa ætas ſubito egregias divellere moles
Excidio, & generis mutare, & vertere ſortem
Humani; non vertat item ſtudia, atque labores
Ingeniorum, & humo doctrinas obruat omnes?
Sic ſolas præfert tellus Memphitica clades
Saxorum in cumulis; variis nunc ſculpta figuris
Marmora, trunca tamen, viſuntur, mutaque nobis;
Signa repertorum tuimur, cecidere reperta.
Ex aliquo at quoniam jam tempore novimus artem
Eductricem operum, ſervatricemque laborum
Ingenii, poſſint diffundi ut multiplicati
Prœla per & formas, lateque per ora virorum
Spargier, & tanto renovarier incremento
Interdum, ex uno ut naſcantur millia multa;
Longius idcirco nobis promittimus ævum,
Immenſoſque licet quoque ſpes extendere in annos,
Temporis & ſævos labentis temnere morſus
Magnis præſertim pro rebus; nam leve queis eſt
Pondus, ferre queant ætatem haud denique multam.
Sed quæ fata manent noſtros ventura labores?
Quantum ævi mihi fas optare? Quid augurer auſis
His immortali de tempore? Concitat iſtis
Me quoque promiſſis, & mentem numine Phœbus
Implet, & inceſſit; jam, quo feror, impetus ire eſt.
Quapropter[a] quoniam, præter jam cognita ſemper
Mu-

peſte fortaſſe etiam crudelior univerſam Europam vaſtaverit, ut Aſiam vaſtavit, & Africam?

Quod autem pertinet ad progreſſum in ætate mox ſubſecutura, conſiderato præſenti Reip. litterariæ ſtatu, eſt mihi indicium quoddam e Geometria petitum, quod itidem deteriora divinare jubeat, de quo in ſupplemento.

[a] Proponit hic eam, quam inter motus leges tertio loco Newtonus propoſuit. *Actioni contrariam ſemper, & æqualem eſſe reactionem, ſive duorum corporum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales, & in partes contrarias dirigi*. Prima quidem Lex continet apud Newtonum inertiæ vim, ſecunda menſuram vis activæ, tertia hanc actionum oppoſitarum æqualitatem, quarta legem compoſitionis motuum: Reliquas Noſter ſuperiore libro eſt perſecutus, hanc, quæ pariter pertinet ad vires activas paſſivam inertiæ vim determinantes, & conſectaria que

Munera quæ fuerant generatim corporis omnis,
Omni in materia quoque inertem hæreſcere dixi
Vim, nec item certa non hanc ratione probavi;
Quod ſupereſt, prius ac gravitatem denique ad ipſam
Delabar, fieri ſatis uno carmine porro
Cui nequeat, rerum eſt adeo fœcunda, feraxque:
Hic tibi non longis, at claris verſibus edam,
Hoc etiam officium cujuſvis corporis eſſe,
Ut ſit opus, cum mutatur ſtatus unius, ipſum,
Qui ſtatus alterius conſtet tum corporis, oris
Tantundem oppoſitis mutarier; & quia nunquam
Inter ſe mutare ſtatus ſic corpora remur,
Quin agere ipſa eadem ſeſe inter, agique viciſſim
Percipiamus; ut hæc & agant, & agantur, oportet,
Viribus hinc illinc æqualibus, oppoſitiſque.
  Aſt [a] hic ne ſubito repútes, cave, ſcilicet æqua
Mutari celerem ſemper lapſumque, fugamque
Menſura: Debes hanc ſolis motibus ipſe
Aptare, atque in eis hanc ſolis quærere legem:
In gemino par materies cum corpore conſtat,
Mutatis æque tum motibus, æqua, neceſſe eſt,
Mutatæ ratio, menſuraque mobilitatis
Sit quoque; motus enim hìc reſpondet mobilitati;
Non ita, materies ſi diſpar; namque videbis,

Æquè

quædam omnium legum, quæ Newtonus attigit ſequentibus corollariis, hìc pertractanda ſuſcipit, ad gravitatem deinde gradum facturus, quam pluribus perſequetur libris.

Notandum autem illud, hanc legem habere locum, ſive corpora agant in ſe invicem actione phyſica, ut communiter cenſentur agere in contactu, quamquam ego oppoſitum cenſeo, & immediatum contactum non admitto; ſive occaſionaliter tantum, determinando diſtantiam, & poſitionem, ut in ferro, & magnete accidit. Nunquam nimirum mutatur ſtatus unius corporis, quin tantundem in plagas oppoſitas alterius cujuſpiam corporis ſtatus mutetur.

a Cavendum proponit illud, mutationes æquales non fieri in velocitatibus, quas mobilitates appellat, ſed in motibus, qui a maſſis, & velocitatibus pendent. Id evenit vitio vocis *velocitas*, quam ubi maſſæ jungimus, adhuc intelligimus non ſummam velocitatum, quas habent omnia puncta maſſæ, ſed eam, quam habet quodvis ejus punctum ſeorſum conſideratum, dum nomine *motus maſſæ* intelligimus ſummam motuum, quos habent omnia puncta. Effectus contrarii æquales ſunt, ſed idem effectus in plura majoris maſſæ puncta diviſus minorem ſingulis partem relinquit. Hinc ſingula puncta eo minorem motum acquirunt, quo major eſt maſſa, & cum puncti velocitas reſpondeat ipſius motui facto dato tempore, & velocitas totius maſſæ dica-

Æque ut mutentur motus, debere minori
Tanto plus celerem progigni in corpore lapſum,
Quanto in majori eſt plus corpore materiai
  Hanc [a] quibus in rebus non eſt comprendere legem?
Ad ſeſe magnes chalybem trahit, atque viciſſim
A chalybe hoc ipſo rapitur; quod cernere pronum eſt
Utrumque, immotus ſi perſtet uterlibet horum
Vel trabe ſuſpenſus, vel parjete, ſubter & alter
Admoveatur; amica repente hic ad oſcula ſurget,
Conjunctuſque ſimul compage tenebitur arcta.
Sin natet exigua cimba ſuffultus uterque
Liber aquis, ambos ſubito celerare videbis
Alterum in alterius contactus, donec in unum
Conveniant cupidi pariter, junctique quieſcant
In media regione viæ, ſi pondere cimba
Utraque preſſa pari eſt; ſin impar mercibus illis
Pondus erit, liquidum properantior altera tanto
Findet iter, quanto leviori merce laborat.
  Sic itidem [b] longo geminæ ſi fune carinæ,
Quæ neque ſint ventis, valido nec remige pulſæ,
Mutua nectantur, ſed nulla parte retentæ
Ex alia, nulloque hærentes ad vada morſu,
Æquè inter ſeſe diſtenſo fune trahentur,

Pro-

dicatur ea, quæ eſt ſingulorum punctorum velocitas; eo minorem velocitatem eadem maſſa acquirit, quo ipſa maſſa eſt major.

Hinc patet illud, in hujuſmodi actionibus mutuis vires motrices eſſe æquales utrimque, vires acceleratrices eſſe reciprocè proportionales maſſis.

a Inductione hanc ipſam legem probare aggreditur, ac primo loco proponit magneticam vim. Ferrum nimirum, & magnes æque ſe mutuo trahunt. Cimbulis binis imponuntur bina eorum fruſta: cimbulæ ſibi relictæ ad ſe invicem tendunt ambæ æqualibus velocitatibus, ſi æquales ſunt cimbularum, atque onerum maſſæ; ea vero celerius, quæ minor eſt, ſi inæquales: utramlibet teneas, altera ad ipſam accurrit.

b Idem confirmat exemplo vis elaſticæ. Funis diſtentus æque utrinq; trahit. Si binæ cimbæ in libera aqua fune connectantur, quem quiſpiam in altera conſiſtens diſtendat, ſtatim ad ſe mutuo ambæ accedunt, in utralibet ſit, qui trahit, æquali itidem celeritate, ſi æquales ſint, ſi vero inæquales, inæquali ita, ut ſi altera ſit cimbula, altera ingens oneraria navis, illa ſemper ad hanc adveniat, hæc vix ad ſenſum commoveatur. Idem autem etiam in elaſtris compreſſis accidit, ubi vis elaſtica repulſiva eſt, non ut in ſuperiore caſu attractiva; æque utrinque premunt, & ſi binis globis interjaceant, utrique motum imprimunt, dum explicantur. Hinc nimirum etiam tormenta bellica, dum globos vi elaſtica pulveris pyrii explodunt, retro repelluntur.

Propteteaque pari procurrent impete motus:
Proin minor, & levior quæ ſit, pernicior illum
Ibit in occurſum, gravis altera, magnaque lenta eſt;
Et ſubito [a], cum ſe puppes tetigere, quieſcent:
Tunc æqua ſe namque premunt vi: corpora ſi ſe
Oppoſita duo nempe premant a parte viciſſim,
Nullaque præterea veniat vis, ſolaque perſtet,
Quæ premit hinc illinc; opus eſt immota teneri
Ipſa loco, atque æquis librari viribus illic.
Undarum tenues poſt imbrem conſpice guttas
Frondibus hærentes pingui lanugine tectis,
In guttas inflexa argenti aut pondera vivi,
Quarum ſic tenues, quædam vis mutua jungit
Particulas, ut ſint externa fronte rotundæ;
Et tamen ex omni cum circum parte prematur
Gutta, oritur nullus jam guttæ in corpore motus:
Nam vel inæquales in gutta divide partes,
Ut libet, inter ſe; ut concedat, non erit unquam,
Majori minor, æternos & parte feratur
Ex illa in motus; quia vi minor officit æqua.
Transfer id ad terram pariter, quam dicere guttam
Poſſumus ingentem, pelagi convexa liquenti
Quæ circum tergo, tamen hinc immota, tumeſcit.

[a] A motu viribus æqualibus facto ad æquilibrium tranſit, quod habetur in illo navium exemplo, ubi ad contactum devenerint, quam quidem vocem ego etiam uſurpo, qui immediatum contactum non admitto, eo nomine phyſicum intelligens contactum, qui habetur, ubi diſtantia, ſi qua ſit, ita exigua eſt, ut ſub ſenſus non cadat, cui nimirum id nomen impoſitum eſt ab hominibus contactum ipſum a ſenſuum teſtimonio æſtimantibus.

Ubi igitur impenetrabilitas partium, quæ in mea ſententia habetur per quaſdam repulſivas vires agentes in diſtantiis quamminimis, ulteriorem acceſſum non permittit, vis elaſtica funis diſtenti, vel vis magnetica maſſularum illarum utrimque æqualis quietem gignit, & æquilibrium. Idem in guttulis aquæ, vel mercurii accidit, ubi particulæ omnes, dum ſe mutuo attrahunt, in ſphæram diſponuntur, in qua æquilibrium habetur preſſionibus contrariis æqualibus, quod idem in tota tellure accidit, quæ pariter mutuæ omnium particularum gravitatis actione in globum conformatur. Si hujuſmodi globum ſecemus in binas partes, utcumque inæquales, actiones majoris in minorem, & minoris in majorem adhuc æquales erunt, *niſi enim*, ut habet Newtonus, quod ipſum Noſter expreſſit, pondera illa æqualia eſſent, *Terra in libero aere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum*. Sic etiam quantum nos terram premimus, tantundem premimur ab ipſa terra.

Et premimus dum tam vaſtam nos corpore matrem
Quiſque gravi, contra premimur tamen inde viciſſim,
Magnaque ſunt quanquam geminæ diſcrimina molis,
Moles neutra locum tum victæ molis habebit,
Cedentemque ſequetur agens, motamque propellens;
Qui ſi jam ſemel incœptet, non deſinat unquam
Tum concedendi ſimul impetus, inque ſequendi
Immemorabile per ſpatium, æternumque per ævum.
Nos in res [a] quoque cum connitimur, attrahimuſque,
A nobiſve repellimus, in conamina noſtra
Semper & oppoſitis contendi, & viribus æquis
A rebus, contra quas nitimur, experiemur:
Preſſa premit digitum ſic mollis cera prementem,
Luctantemque manus deducens arbore ramum
Ducier a viridi ſentit ſe percita ramo.
Nitimur inflexi ſic pondere corporis ipſo,
Et pede pellentes quoque terram vincere magnum
Interdum lapidem, tenſoque adducere fune.
Sic etiam validis innixus viribus urget
Limitem agro poſitum, cum vult diſtendere fines
Agricola, & campos alibi ſignare colendos;
Corpore tum medio terram, molemque ſtat inter
Ipſe ſuo, atque humeris, pedibuſque obſtacula pellit:
Propterea lapis hinc, & tota movebitur æque
Terra illinc; terram ſed diſpertitus in omnem
Motus hic haud ulla poterit ratione videri,
Nec tenui ſenſus impellere mobilitate,
Accidet ad noſtros ſenſus tamen alter, agetur
Quo lapis exiguo præ vaſta corpore terra.
Sed nil hanc melius, nil certius, uberi uſque,
Nil itidem utilius faciet clareſcere legem,
Occurrentia quam plagis cum corpora ſeſe

In-

a Oſtendit, eandem ſervari legem in viribus, quas anima noſtra ſponte exerit in corpus ſuum, & ejus ope in alia corpora, ut cum premimus ceram digito, & is premitur ab ipſa cera, cum ramum ad nos adducere nitimur, & a ramo retrahimur. Sed multo evidentius, cum aliquod pondus conamur fune ad nos adducere, quo caſu corpus inflectimus in partem ponderi oppoſitam, & connitimur etiam aliquando pedibus terram urgendo, quod multo magis præſtamus, ſi a nobis aliquid repulſuri pede oppoſitum parietem urgemus, & totam muſculorum vim intendimus. Hinc tota terra movetur, inde corpus, quod repellimus, ſed illa velocitate tanto minore, ut ſub ſenſum non cadat.

Inter confligunt, & colliduntur utrinque:
Paulum has propterea divertimus in rationes.
Primo [a] rebus in his noſtra tria corpora mente
Poſſumus, aut ſpecies horum diſtinguere ternas.
Dura vocamus enim, quæ vi quantalibet icta,
Et compreſſa ſuam nequeant mutare figuram;
Mollia ſed contra queiſcumque a viribus acta
Mutant: & quamvis, ne mutent, ante reſiſtant;
Cum fuerit mutata tamen, ſervare recentem
Pergunt, pro veteri & conatus edere nullos.
Quæ fuerint nec dura tibi, nec mollia demum,
Illa ubi perdiderint primam compulſa figuram,
Vim ſubito exercent aliquam, amiſſamque receptent
Ut faciem, pugnant: vis hæc, & pugna profecto,
Quo mage comprimitur corpus, mage creſcere pergit,
Donec in extremo mutatæ limite formæ.
Maxima ſit; molli quo contra in corpore, quippe
Semper flacidior, prorſus vaneſcat, oportet.

 Hic

[a] Nihil tamen evidentius hujuſmodi legem, affirmat, evincere, quam colliſio corporum evincat, cujus leges ex hoc principio deductas invenerunt eodem tempore primi Valliſius, Wrennus, & Hugenius. Totam hanc congreſſuum theoriam aliquanto diligentius perſequitur Noſter, quod & per ſeſe digniſſima ſcitu ſit, & ad alia plurima perneceſſaria, præter ipſum uſum, quem habet in confirmanda hac lege.

Primum autem diſtinguit tria corporum genera, dura, mollia, & elaſtica. Dura dicuntur, quæ nulla vi cogi poſſunt ad mutandam figuram, mollia, quæ ipſam ita mutant, ut reſiſtant quidem mutationi, ſed posteaquam compreſſa veterem amiſerint, nullum exerceant niſum ad eam recuperandam.

Elaſtica dicuntur ea, quæ figuram amiſſam recuperare nituntur. Ipſa autem elaſticitas duplici modo poteſt alibi major eſſe, alibi minor. Primo quidem major erit, ſi eidem vi comprimenti minus cedet, ut nimirum minore mutatione figuræ, & breviori tempore vim prementem elidere poſſit, vel corporis incurrentis velocitatem extinguere. Secundo major erit, ſi vis exerta in recuperanda figura minus deficiet a vi, quæ exeritur in amittenda, ac maxima erit in hoc genere, ubi ad æqualitatem pertinget, & quidem in hoc ſenſu nomen maximæ elaſticitatis uſurpat Noſter.

Primum illud diſcrimen efficiet, ut cedendo minus, vel magis, vulgo duriora, vel minus dura appellentur, & nihil mutabit leges congreſſuum. Dummodo eadem ſit ratio vis in recuperanda, ad vim, quæ fuerat in amittenda figura, eodem modo reſiliet corpus, ut infra videbimus, & ſolum citius reſiliet, vel ſerius. Utcumque autem in hoc ſenſu fuerit exigua vis, ſemper tamen erit par extinguendæ cuilibet velocitati utcumque magnæ, vel ſuſtinendi preſſionem quamlibet, cum

Hic facile agnoſces quoddam inter corpora, queis eſt
Vis ea diſcrimen; ſunt, quæ compreſſa figuram
Immutant paulùm, nam magnis protinus inſtant
Niſibus hanc reparare, ſuamque reducere frontem;
Aſt alia introrſum facile, ut ſunt pulſa, recedunt,
Invertuntque ſui ſpeciem nimis, ante negari
Mutuus incipiat quàm demum acceſſus utrinque.
Propter at hoc varium diſcrimen, corpora certe
Non valeant varia inter ſe confligere pugnæ
Fortuna; tantum mage dura, minuſve videri
Propterea poſſint nobis, non cætera turbent.
At turbent alio prorſum a diſcrimine; quippe
Vi formam reparant, quam qua amiſere, minore
Multa, & propterea minus a ſe mutua certant,
Quam prius acceſſere, recedere, multiplicique
Menſura minuunt ipſum hunc diverſa receſſum:
At cum nil minuunt prorſus, cum ſcilicet illa eſt
Vis vi, quæ formam prius immutaverat, æqua,
Reſtituitque pari, quo tempore læſa, figuram,
Maxima dicetur, majore excreſcere porro
Auctu cum nequeat, ſummoque in culmine perſtet,
Sed jam * ex impulſu quæ fit, confingere poſſim
Illi

cum partes non poſſint ſe compenetrare. Totum diſcrimen erit in eo, quod in corpore prædito vi elaſtica, in hoc ſenſu majore, citius, & poſt minorem figuræ mutationem, ſeu compreſſionem extinguet velocitatem corporis incurrentis, vel adæquabit, & elidet prementis vim. Initio corpus elaſticum quodcumque, ubi compreſſio incipit, vim exeret in immenſum parvam, quæ creſcente mutatione figuræ creſcet, ac ad eandem magnitudinem deveniet in aliis corporibus citius, in aliis ſerius, prout vis elaſtica fuerit in hoc ſenſu major, vel minor.

Elaſticitatem in hoc ſenſu infinitam Joannes Bernoullius pro duritie accepit, & ex ea corporum durorum colliſionem determinavit. At ibi elaſticitas jam nulla eſt. Nam infinita elaſticitas requirit mutationem figuræ prorſus nullam, cum quantitates infiniteſimæ, ut mihi quidem demonſtraſſe videor pluribus in locis, habeantur ſolum per præciſionem noſtræ mentis, & in ſe determinatæ eſſe non poſſint. Si autem nulla mutatio figuræ fit, nulla in ea recuperanda exeritur vis, quæ reſilientiam parere poſſit.

In ſecundo illo ſenſu accepta major, vel minor elaſticitas plurimum conducit ad determinandum colliſionis effectum. Ubi vis in recuperanda figura æquetur vi in amittenda, illam hic cum Noſtro appellabimus elaſticitatem ſummam, vel perfectam, ubi ſit minor, imperfectam.

a Eleganter ſane comparat illam majorem vim, quam exercet corpus elaſticum, dum magis introrſum premitur, cum illa vi, quam *Poetæ* fabulan-

Illi haud abſimilem pugnam, terra Affrica quondam
Quam vidit: domitor Lernæ, & Diomedis equorum
Ille laboribus exhauſtis, odiiſque novercæ
Inclitus, exuſta cum ſolibus eſſet in ora,
Filius Alcmenæ, luctantem corpore vaſto
Terrigenam Antæum valuiſſet vincere nunquam,
Nam quanto matri magis allidebat eundem,
Incumbenſque premebat, eo plus ille novatis
Viribus inſurgebat in hoſtem, & plus reparabat
Languentes animos, contuſaque corpora clava,
Atque iterum in pugnas, iterum integer inſiliebat;
Robore tacta novo munibat mater alumnum;
Ni demum feſſo, & jactato poſſe negarit
Ire ad complexus genitricis, & oſcula Terræ,
Sublatumque altè ſupra caput, atque agitantem,
Torquentemque artus immanes aere fruſtra
Sublimi manibus validis compreſſerit arctè,
Et triſtem vitam fudiſſe coegerit auris.

At rerum [a] in numero prorſus conſiſtere dura
Corpora quis dicat? neque enim, quæ flectier ulla
Non poſſint vi vel paulum, deprendimus uſquam;
Nec quibus a pulſis itidem vis maxima, nullave
Exeritur, verſæ reparent ut damna figuræ.
Nempe aliquis ſemper quovis in corpore niſus
Elicitur, genus hoc, exilis qui tamen extat
Uſque adeo certis in rebus, languidulusque,
Vix queat ut noſtros vigilantes tangere ſenſus;
Ut non compreſſæ molliſſima vellera lanæ
Sunt, raræque nivis volitantes aere denſo
Flocci, atque exiguo flammæ tepefacta calore
Cera, & humus converſa ligonibus, & grave plumbum,
Atque alia, in rebus quæ credit mollia vulgus.

Uno-

bulantur Antæum Terræ filium accepiſſe eo majorem, quo magis allideretur ab Hercule ad ipſam Terram, quem idcirco in aerem debuit attollere, ut vinceret, enecaretque.

a Corpora prorſus dura nulla eſſe hic affirmat, & ſane nullum experimentis deprehenditur. Particulas primigenias duras admiſit & Carteſius, & Newtonus, ac plerique ex eorum aſſeclis. Leibnitiani nulla eſſe poſſe cenſent, ne in colliſione ipſorum habeatur ſaltus quidam, de quo in decimo agemus libro. Ego itidem in eadem ſententia ſum. Majora autem corpora, quæ nobis ſunt nota, omnia elaſticitatem cum mollitie commixtam habent majorem alia, alia minorem. Quæ minimam, ac fere inſenſibilem habent, dicuntur mollia, ut plures ſubſtantiæ, quas Noſter hic nominat.

Unoquoque [a] tamen videas in corpore, preſſum
Vel ſit idem validis impulſibus, exiguiſve,
Certam ſervari rationem ſemper utroſque
Inter conatus, quibus ipſum obſiſtere, frontem
Ne mutet, vel eam, cum verſa, reſumere certat.
Verum adeo hic pollens in corpore niſus uterque
Eſt aliquo, ut ſubita penitus ratione geratur
Ille vel introrſum motus, vel deinde retrorſum,
Et nequeat ſenſu, ſed ſola mente videri.
At quoniam ſenſu tantum res æſtimat uno,
Prorſum ea dura putat, vocitatque hoc nomine vulgus
Corpora, uti duras ſilices, ut robora, & oſſa,
Atque adamantina ſaxa, metallorumque rigores.
Ipſa tamen quæ ſunt oculo deprenſa ſagaci
Flecti, & reflecti quoſvis quoque poſſe per ictus,
Nempe pilam vitream, vel eburnam forte colore
Si tingas aliquo, tum vitri, eboriſve rotundi
Alterius, ſed non fucati, incurrere cogas
In molem, validoque impellere verbere plagæ;
Protinus hæc etiam ſola, qua tacta, colorem
Parte feret, non in puncto tum ſcilicet uno,
Quod fieret, ſi dura foret, flectique negaret
Utraque, verum aliquo circum ducente per orbem
Latum ſe ſpatio, quod in ipſo ceſſerat ictu

In-

[a] Porro in imperfecta elaſticitate illud apprime notandum, quod hic Noſter notat, eandem ſemper in eodem corpore inveniri rationem inter binas vires, quæ exeruntur in amittenda, & recuperanda figura. Id ſummi erit uſus inferius; inde enim eruitur velocitatem genitam, dum recuperatur figura, ad velocitatem genitam, dum amittitur, eſſe in conſtanti pariter ratione, nimirum ſubduplicata virium ipſarum; ut in ſupplemento demonſtrabimus. Si vis in recuperanda figura fuerit quadruplo, vel noncuplo minor, erit velocitas acquiſita, vel amiſſa duplo, vel triplo minor.

Deinde & illud, corpora quædam vulgo haberi pro duris, quia ſatis magna in primo illo ſenſu elaſticitatis vi prædita tam cito figuram mutant ad priſtinam redeundo, ut mutatio ipſa ſub ſenſum immediate non cadat, quemadmodum accidit in iis, quæ Noſter hic nominat, ut in ebore, in vitro, in aliis innumeris. Adhuc tamen etiam in iis mutatio figuræ ſatis quidem ſagaci experimento deprehenditur. Tingitur nimirum fuligine, vel atramento globus ex ejuſmodi ſubſtantia, ac demittitur, ut incurrat in alterum non fucatum. Poſt colliſionem hic apparet itidem tinctus non in puncto quodam, ſed in ampliore circello, qui exprimit amplitudinem ſpatii complanati in globorum concurſu, & proinde mutationem figuræ. Circellus ille ſolet eſſe major, vel minor pro majore, vel minore velocitate globi incurrentis.

Introrſum, ſeque in planum diſtenderat æquor.
His tibi [a], quæ prius eſt res poſcere viſa, parato,
Diſpoſitoque animo; jam nunc age, qualis ineſſe
Motus, mobilitaſque quibuſvis poſſit ab ictu
Corporibus, rite inſtituas ſi rebus in ipſis
Servare, agnoſcas hac omnia lege teneri,
Quam doceo, æqualem nimirum corpora ſemper
Vim, cum ſe inter agunt, inferre, patique viciſſim,
Atque ita natura conſtare hanc ſemper in omni
Legem; hac te in motus proin ducam, ac mobilitates,
Non alias, quam quas in rebus prendere poſſis;
Menſuras, genus hoc tum certior ibis in omnes.
Principio [b] duo cum confligunt corpora plaga,
Quantum ex incurſu motùs lucratur in unam
Alterutrum partem, facili ratione videre eſt
Alterum in oppoſitam tantundem acquirere motus.
Ergo iſtud motùs cum motibus incrementum
Si jungatur, in hoc, & corpore nuper in illo
Qui fuerant ſeorſum, nova jam tum corpus utrumque
Afficiet ratio: ſi ſcilicet inferat ictum
A tergo, inque oras vis addita pellat eaſdem,
In quas curſus erat, properantius ibitur illuc;
Sin de fronte recens, proin & contrarius, ante
Qui fuit, adveniat motus, vel ſegnius ibit
Accepta corpus plaga, ſi nempe priore
Hic extet minor; æquali certamina niſu
Sin ineat, penitus corpus ſiſtetur ibidem:

De-

a Præmiſſis hiſce, quæ neceſſario prius noſcenda erant, illud monet, ſi quærantur velocitas, & motus poſt colliſionem, in quovis congreſſuum genere, omnino obtineri ope hujus legis, de qua agimus, nimirum actionis, & reactionis æqualium. Et quoniam ea, quæ hic inferantur ex ea ipſa lege, conſentiunt prorſus cum iis, quæ in experimentis deprehenduntur, conſtat, eam legem eſſe prorſus generalem pro corporibus omnibus.

b Primum monet illud, in quavis colliſione binorum corporum, quantum motum lucratur alterum corpus ſecundum unam directionem, tantudem vi hujus legis lucrari debere alterum ſecundum oppoſitam. Porro is motus, qui a corpore acquiritur in colliſione ipſa, vel conſpirat cum præcedenti, vel ipſi eſt contrarius. In primo caſu, motus evadit magis celer, & ſecundum eandem directionem priorem: in ſecundo evadit tardior in eandem pariter plagam, extinguitur, vel perit; prout motus fuerit minor priore, æqualis, vel major. Hæc in primi libri notis dicta ſunt pariter, ubi agebatur de motu compoſito in eadem recta. Hic repetuntur, ubi eorum uſus admodum neceſſarius, & frequens.

Denique ſi novus hic mage polleat, illud abibit
Converſæ ratione viæ, retroque feretur.
Motus at hic, duo quem lucrantur corpora in oras
Æqualem oppoſitas poſt ſævæ verbera plagæ,
Quantus ſit, certa ut poſſis ratione videre;
Noſſe modum par eſt, quo corpora colliduntur
Scilicet, & quanto conflictus tempore fiat.
Atque hic [a], ut valeam prope rem ſupponere noſtris
Ipſam oculis, ſine me duo fingere mollia prorſus
Corpora, quæ quamvis revera extare negatum eſt,
Ut neque ſunt porro, vis maxima reſtituendi
In plaga amiſſam queis dicitur eſſe figuram:
Attamen his ipſis, ſi vere extare daretur,
Quid fieret, cum viderimus, fierique neceſſe
Quid foret, ad veras rationes inde referri
Perfacile eſt, & quid mediis his accidat, illa
Prædita quæ non vi, neque contra mollia conſtant,
At ſita ſunt horum genus inter utrumque, videre.
Verum infinitæ quoniam per corpora fundi

Ex-

[a] Jam vero, ut corporum imperfectè elaſticorum, cujuſmodi omnia eſſe corpora diximus, colliſiones exponantur, quærit prius, quid deberet accidere in corporibus perfecte mollibus, quæ nobis confingere poſſumus, tum inquiret in ea, quæ acciderent corporibus perfecte elaſticis; quibus definitis pronum erit ea etiam deducere, quæ pertinent ad corpora nec perfectè mollia, nec perfectè elaſtica, cujuſmodi corpora ſunt in Natura.

In ipſis autem corporibus mollibus congreſſus fieri poſſunt vel directi, vel indirecti. Quid ſit congreſſus directus in colliſione binorum globorum, qui quidem ſinguli conſiderantur ex materia homogenea, admodum facile explicatur. Erit directus, cum movetur in ea recta, quæ jungit ipſorum centra, uterque quidem, ſi neuter quieſcit, vel, ſi alter quieſcit, ille alter, qui movetur. Patet autem, ubi concurrunt, rectam illam ipſam, quæ nimirum centra jungit, tranſire debere per concurſum, in quo ſe contingunt. Congreſſus indirectus erit, cum motus centrorum in alia recta fient. In reliquis figuris conſideranda eſt ſuperficies, in qua ſibi corpora occurrunt, & conſideranda ſunt quædam ſingulorum puncta, quæ dicuntur percuſſionis centra, de quibus agemus in ſupplemento. Ad habendum congreſſum directum bina illa centra debent moveri in eadem recta: debet tranſire ipſa recta per id punctum, in quo ſibi mutuo occurrunt binæ ſuperficies, vel ſi eæ in pluribus punctis ſimul ſibi occurrant, per unum ex iis, & debet ibidem ea recta eſſe perpendicularis ad illam ſuperficiem: In eo caſu in congreſſu directo, idem accidit corporibus cuiuſcumque figuræ, quod globis, in reliquis res eſt multo magis compoſita, & plures caſus diſtinguendi iterum eſſent, quos perſequi non vacat. Hinc Noſter globos ſelegit tantummodo, de quibus ageret.

Exterius poſſunt formæ, neque, quidquid ab una
Quaque queat, varie dum corpora congrediuntur,
Accidere, ipſe velim ſi ſeorſum expendere, poſſim;
Solis proinde globis peragi rem percipe, quorum
Aptior effigies nobis, ſimplexque figura eſt.
Quippe ex hac etiam facili eſt deprendere pacto,
Plagarum ratio, queis ſeſe corpora pulſant,
Nimirum quæ ſit directa, obliquaque, refert
Quod cognoſſe prius, quam cætera pervoluamus.
Directum plagæ genus illud proinde putato,
Cum, quæ ſunt media puncta in regione globorum,
Illam mota viam inſiſtunt, quæ nectit utrumque
Punctum ipſum medium, productave tranſmeat illac:
Tunc etenim hæc eadem pariter via recta quoque illud
Trajiciet punctum, ſeſe in quo corpora pulſant.
Aſt alia quacumque via genus alterum oportet,
Scilicet obliquæ fieri inter corpora plagæ.
Ergo [a] quæ prorſus duo mollia corpora dixi,
Directa accedant in mutua vulnera plaga;

[a] Ubi igitur congrediuntur bini illi globi, pergunt adhuc poſt congreſſum accedere ad ſe invicem, quod fieri non poteſt ſine compreſſione partium ipſarum, in quibus concurrunt, initio exigua, tum ſenſim eo validiore, quo magis creſcit compreſſio. Debet autem compreſſio continuari, donec vel penitus quieſcant, vel redigantur ad velocitatem communem in eandem plagam. In eo conflictu mutantur & celeritates ipſorum, & quidem ita, ut mutationes motuum ſint æquales in partes contrarias, velocitatum vero mutationes reciprocæ maſſis. Determinandæ ſunt mutationes ipſæ, quod quidem admodum facile præſtari poterit, ſi diſtinguantur tres caſus. In primo tendat uterque globus in eandem plagam, quo caſu conſtat conſequentem moveri debere cum celeritate majore, ut nimirum præcedentem aſſequatur, in ſecundo alter quieſcat, in tertio in ſe mutuo tendant.

In primo igitur caſu, quoniam tantum acquirit globus præcedens, quantum amittit conſequens, ſumma motuum erit eadem, quæ prius. Quæ prius fuerit ſumma, facile definitur; ſingulorum enim maſſas ducendo in ſuas velocitates habentur ſinguli motus, qui ſi addantur, illam ſummam conficiunt. Hæc erit ſumma etiam, ubi poſt colliſionem communi velocitate feruntur. Diviſa hac ſumma motuum per ſummam maſſarum, habebitur communis velocitas, a qua ſi auferatur prior illa velocitas corporis præcedentis, & ea auferatur a priore velocitate corporis conſequentis, invenietur, quantum velocitatis acceſſerit præcedenti, & quantum conſequenti detractum fuerit. Ducta vero velocitate communi in ſingulas maſſas, innoteſcent ſingulorum motus, qui eodem pacto cum prioribus comparati exhibebunt motum ab altero acquiſitum, ab altero amiſſum, & con-

Ipſa ubi ſunt primum tenui colliſa duello,
Non ceſſant & adhuc magis uſque accedere; mutant
Proinde ſuæ ſpeciem valide compreſſa figuræ;
Primæque introrſum pergunt concedere partes
Continuo, donec vel deſinat omnis utrinque
Motus, mutato vel demum corpora cœptent
Impete paulatim æquali procurrere lapſu,
Et ſimul unam ambo mundi conjuncta ſub oram
Tendere, compoſitaque velut tum pace teneri,
Oſcula preſſa ſemel nunquam ut dimittere poſſint.
Jam quoniam æqualis poſt ictum motus utrinque
Exoritur, veluti jam diximus, oppoſitamque
In partem, oppoſitam quoque gigni mobilitates
In partem, ſed non æquales proinde, neceſſe eſt;
Nam ſic inter eas & corpora vertitur ordo,
Corpore uti majore minor, contraque minore
Major mobilitas ſit corpore, ſcilicet ille
Ne novus exoriens impar ſit motus utrinque.
His tibi ſubjunctis jam rebus, ſuppoſitiſque;
Nunc duo fac properent in eandem corpora partem.
Curſu, quod ſequitur, tamen ut citiore feratur.
Quandoquidem partes utriuſque invertitur æque
Motus in oppoſitas, quantus de corpore motus
Demitur uno, alii tantum adjeciſſe neceſſe eſt;
Proin motus utriuſque prius quæ ſumma manebat,
Hanc ipſam vel poſt ictum perſtare fatendum eſt.
Quare cum motum rebus conſtare duabus
Jam teneas, quarum tibi ſit tum cognita rerum
Altera, materies nimirum in corpore utroque,
Cognoſces totam pariter quoque mobilitatem,
Quæ poſt impulſum moli communis utrique eſt;
Hujus & a primis pariter diſcrimina noſces,

Quan-

& conſtabit, motus ejuſmodi, acquiſitum, & amiſſum, eſſe æquales in utroque, velocitates vero acquiſitas & amiſſas eſſe maſſis reciproce proportionales.

Ratio autem calculi inſtituendi erit hujuſmodi. Summam motuum ante conflictum collige ex velocitatibus ſingulis in ſingulas maſſas ductis, ſummam ipſam divide per ſummam maſſarum, & habebis communem velocitatem. Binæ hujus differentiæ a binis, quæ erant ante conflictum, exhibebunt binas mutationes velocitatum. Due velocitatem communem in ſingulas maſſas, habebis ſingulos motus poſt colliſionem. Horum differentiæ a prioribus exhibebunt mutationes motuum.

Quantum & propterea mutatum in corpore utroque eſt.
Omnia [a] quæ pariter prendes, cum forte quietum
Corporis alterius pulſu turbabitur unum;
Tunc etenim motûs capietur ſumma prioris
Unius a motu, quam dein per corpus utrumque
Diſpertire queas, alia & facere omnia, ut ante.
Denique ſi adverſis incurrant frontibus ambo
Obvia, detracto motu a majore minori
Diſcrimen cape pro ſumma, quam diximus ante;
Cæteraque, ut ſupera, ſimili ratione gerantur.
Hæc numeris [b] pro re ſi certis omnia ſignes

a In ſecundo caſu omnia eodem fere pacto peragentur: motus tantummodo globi ante conflictum quieſcentis habendus eſt pro nullo, & ſolus motus impellentis globi erit ſumma motuum ante conflictum, retinenda poſt ipſum. Invenietur velocitas poſt conflictum dividendo hanc per ſummam maſſarum, & hæc erit tota velocitas acquiſita a quieſcente; ejus autem differentia a priore velocitate impellentis, erit velocitas amiſſa ab ipſo. Eodem modo & mutationes motuum habebuntur ex motibus novis utriuſque. Facile autem pro hoc caſu deducitur hoc theorema. *Eſt ut ſumma maſſarum ad maſſam corporis impellentis, ita velocitas ejus præcedens ad velocitatem novam communem*; cum hæc habeatur, ut vidimus, dividendo factum ex velocitate præcedenti corporis impellentis, & ejus maſſa, nimirum ipſius motum, per ſummam maſſarum.

In tertio caſu inventa, ut prius, ſumma motuum, ſi binæ ejuſmodi ſummæ æquales fuerint, poſt colliſionem habebitur quies; nimitum ubi ante colliſionem velocitates maſſis reciproce proportionales extiterint. Si autem fuerint inæquales, motus poſt colliſionem fiet in eam plagam, in quam ferebatur globus, qui majorem habebat motum. Detrahendus autem erit minor a majori, & hæc, quæ fuerat differentia ante conflictum, evadet totus utriuſque motus poſt ipſum conflictum. Ut enim minor ad nihilum redigeretur, debuit a majore tantundem auferri: tum ex illo reſiduo debuit adhuc aliquid deperdi, ut in hoc oppoſitus, & conſpirans ſubſtituatur priori, quo pacto reſiduum illud per utramque maſſam diſpergitur ita, ut velocitas ſuperſit eadem. Igitur reſidua illa differentia motuum dividenda erit per ſummam ad habendam novam velocitatem communem. Hæc addita velocitati globi retro reflexi exhibebit velocitatem ab ipſo acquiſitam, cujus altera pars priorem deſtruxit, pars altera curſum retro reflexit, ablata vero a priori velocitate alterius globi velocitatem exhibebit ab ipſo amiſſam. Motus novi, motus acquiſiti, & amiſſi eâdem obtinentur multiplicatione velocitatum per maſſas.

b Hæc omnia numeris adhibitis multo clariora fiunt, multo autem expeditiora evadunt omnia, & facillime plurima theoremata elegantiſſima, atque utiliſſima deducuntur, ſi adhibeantur formulæ algebraicæ. Numeros hic proponemus, formulas in ſupplemento fuſius pertractabimus. In numeris autem colligendis ſemper habea-

(Num nequeant numeris ſupponier omnia veris,
Hoc genus, intendi quæ poſſunt, quæque remitti,
Atque, ipſi ut numeri, majora, minoraque fiunt?)
Protinus agnoſces, quid fiet; tuta nec ulla eſt,
Nec manifeſta animis ratio magis, exque pedita:
Proin cernes facile, an ſiſtantur corpora ab ictu,
Excurrantve eadem, & quo tractu, quas & in oras,
Cuique quid adjectum, quid demptum denique conſtet.
Nonne virum [a] geminis hæc cœtibus æquiparare
Poſſu-

beamus præ oculis illud, motum confici maſſa in velocitatem ducta, velocitatem motu diviſo per maſſam.

Pro primo caſu globi præcedentis ſit maſſa 2, velocitas 5, conſequentis maſſa 6, velocitas 9. Erit motus primi ante colliſionem bis quinque, ſive 10, ſecundi ſexies novem 54. Summa motuum ante, adeoque & poſt colliſionem 64. Dividatur 64 per ſummam maſſarum 8, & habebitur itidem 8 velocitas communis poſt congreſſum. Præcedens habuerat velocitatem 5, ergo lucratus eſt velocitatem 3. Sequentis velocitas erat 9, eſt autem 8. Igitur amiſit 1, triplo nimirum minus, quam alter, qui amiſit 3, & erat triplo minor, cum is eſſet 2, ſequens autem 6. Ducatur communis velocitas 8 in maſſas 2, & 6., ac habebuntur motus 16, & 48: auferatur ab illo motu prior 10, & hic a motu priori 54, & habebitur utrobique 6, nimirum bini motus æquales, alter acquiſitus, alter amiſſus.

In ſecundo caſu ſit globi quieſcentis maſſa 2, globi ipſum impellentis maſſa 6, velocitas 4; erit motus illius nullus hujus 24, quæ erit ſumma motuum ante, & poſt impulſum. Dividatur hæc per ſummam maſſarum 8; fiet 3. Hæc erit velocitas communis poſt conflictum. Quare ipſa tota erit velocitas nova globi impulſi; ea autem ablata a velocitate impellentis 4, relinquit 1, quæ erit velocitas amiſſa ab impellente triens velocitatis 3, acquiſitæ ab impulſo. Motus autem globi impulſi a velocitate communi 3, & maſſa 2 erit 6, impellentis ab eadem velocitate, & maſſa 6 erit 12. Ille prior 6 erit totus motus acquiſitus ab impulſo, hic poſterior 12 ablatus a priori 18, relinquet motum 6 amiſſum ab impellente æqualem acquiſito ab impulſo.

In tertio caſu ſit alterius maſſa 6, velocitas 9, alterius maſſa 2, velocitas 3, erit illius motus ante colliſionem 54, hujus 6. Quare novus motus conſpirabit cum illo majore. Capiatur ipſorum differentia 48, quæ diviſa per ſummam maſſarum 8, reddit velocitatem communem 6 conſpirantem cum prioris velocitate præcedenti 9, qui proinde amiſit 3; poſterior autem cum amiſerit ſuam velocitatem præcedentem 3, & acquiſiverit novam 6, habuit ex conflictu velocitatem 9 triplo majorem illa 3 amiſſa a priore. Ducta autem velocitate communi 6 in maſſas 6, & 2, erunt motus poſt colliſionem 36, & 12. Dematur 36 a motu priore 54 fiet 18 motus a priore corpore amiſſus: addatur 12 motus novus contrarius motui priori 6, & habebitur motus ab hoc receptus itidem 18. Pronum eſt autem regulam ad alios caſus applicare.

a Rem illuſtrat aptiſſimo exemplo bino-

Poſſumus, exemplo ſimilem & rem pandere ficto?
Hi, quòd amicitiæ coierunt fœdere pulchro
Inter ſe, paribus ſemper quæ gaudet, & æquis,
Invenit & ſimiles, aut efficit, undique vectant
Communem in cumulum, quod cuique eſt divitiarum:
Proin jure æquato, fuerat qui ditior ante
Cœtus amicorum, tanto ſibi repperit auri
Eſſe minus, quanto prodit locupletior alter,
Ut nec opes creſcant in ſumma, nec minuantur.
Propterea que virum numerus quó major habetur
In cœtu, magis ille refert, nam quemque virorum
Uti deinde pari, atque æquato fœdere dixi,
Atque hinc nonne vides, quid fiat, corpora eandem
Cum duo ſe in partem volventia congrediuntur?
Alterum at immotum ſi ſit, vel fronte viciſſim
Obverſa hinc illinc pariter concurrat utrumque,
Exprimere exemplo, quid tum quoque fiat, eodem
Poſſumus, aut nullas geminis de cœtibus uni
Prorſus divitias fingentes eſſe, alieno
Ipſum aut ære premi contra, multoque gravati
Fœnore; tum ſiquidem geminorum fœdere juncto
Vel nihil in cumulo ſuperabit, ſi referendo
In medium fuerit par, quod debebitur, auro;
Sin minus, aut majus contra; vel uterque, neceſſe eſt,
Quid

binorum cœtuum ejuſmodi, ut ſinguli ex illis, qui primum cœtum conſtituunt, æqualem pecuniæ numerum contineant, quemadmodum in maſſa conſequente ſingula puncta æqualem motum, & velocitatem habent, ſinguli autem, qui ſecundum conſtituunt cœtum, alium habeant itidem æqualem numerum pecuniæ, ut ſingula præcedentis maſſæ puncta æqualem motum, & velocitatem habebant in primo caſu, vel nihil poſſideant, ut illa maſſa in ſecundo caſu, vel ære alieno æquali graventur, ut in tertio caſu illa puncta motum, & velocitatem habebant contrariam. Ineant jam ejuſmodi ſocietatem, ut facultates omnes in unum colligantur, dividanturque ita, ut ſinguli æque poſſideant. Summa in primo caſu facultatum utriuſque cœtus, facultates ſolæ primi cœtus in ſecundo, exceſſus facultatum primi in tertio ſupra æs alienum ſecundi cœtus, dividi debet per numerum omnium, qui utrumque cœtum conſtituunt, ut ibi per maſſarum ſummam ſumma motuum in caſu primo, motus globi conſequentis in ſecundo, differentia motuum in tertio, & innoteſcet, quid ſinguli habituri ſint, quod ipſum velocitatem exprimet illam communem maſſarum, ubi innoteſcet eodem prorſus ordine, quo in maſſis, quid ſinguli homines, quid cœtus integri amiſerint, vel acquiſiverint, illo referente velocitatem, hoc motum maſſarum. Numeris illis iiſdem res omnis hic etiam conficitur.

Quid ſumma ferat ex illa non prorſus inani,
Pars diviſa utrumque alieni vel premat æris;
Nimirum vel uterque ſuo, vel uterque alieno
Tum ſit in ære, opus eſt, poſt icta hæc fœdera, cœtus.
Hæc fluere ex illo rationis ſonte videmus,
Quæ petit, æquato cum fiunt fœdera jure,
Ut, quod lucratur pars una, hoc altera perdat:
Scilicet his etiam poſſis ut prendere legem,
Qua, quod agit, tantundem etiam in contraria agatur.
Sed non directo * properent ſi tramite curſus,
At duo confligant obliqua corpora plaga,
Et latere ex ipſo belli diſcrimina tentent,
Protinus ut poſſis numeris rem tangere certis,
Debes in geminos utriuſque reſolvere motum:
Concipe propterea, qua ſeſe corpora fronte
Contingunt, ad eam rectos te ducere tractus,
Quique globos media tranent regione propinquos:
Hos ergo rectos in tractus diſtrahe motum
Partim, & partim alios, facias quos fronte ſecunda
Pergere, uti ripam radentia flumina currunt.
Ex hac parte queat nullis tunc ictibus ille
Se turbare, nec ad contractum corpora ferre
Motus; quidquid id eſt, quod euntia corpora turbet,
Advenit a prima, cujus direximus ictum,
Parte: ita quapropter directa hac ipſe recenſe,
Quid fiat, quid & a congreſſu poſſit oriri;
Junge, quod invenies, motùs cum parte ſecunda,

Quæ

* Expoſita directa colliſione corporum mollium obliquam aggreditur. Ipſam Geometriæ ope multo clarius exponam in ſupplemento. Interea hic idem fine ipſa præſtare conabimur. Concipiatur per punctum contactus recta ſuperficiebus, quæ ſe contingunt, perpendicularis, quæ nimirum tranſibit per globorum centra, & motus utriuſque globi reſolvatur in duos alterum parallelum directioni ſuperficierum ipſarum; alterum ipſis perpendicularem. Illi priores nihil a colliſione turbantur, quæ ſolum mutuum acceſſum impedit, hi poſteriores mutantur juxta leges ſupra expoſitas. Computetur igitur mutatio, quæ fiet in his, & invenietur nova communis velocitas perpendicularis poſt conflictum pro utroque globo, quæ ſi componatur cum prioribus illis parallelis, remanentibus illæſis, habebuntur novæ eorundem globorum velocitates, & novi motus.

In hac œconomia adhibetur juxta communem methodum reſolutio motuum. At ego, qui nullam veram reſolutionem in Natura admitto, oſtendam in ſupplemento, quo pacto per ſolam compoſitionem res eadem peragatur.

Quæ nil turbavit, componens: hinc via certa,
Totaque mobilitas demum, motuſque pateſcent.
His tibi claratis [a], facili contendere greſſu eſt,
Nunc ad quæ generis diverſi corpora dixi,
Quæ compreſſa ſuam ſubito reparare figuram
Certant, quæque ideo reſilire tuemur ab ictu:
Nam poſtquam, quod erit mutandum, videris, acſi
Mollia corpora ſint, & lucra putaveris ipſa
Mobilitatis, uti jam diximus; iſta neceſſe eſt
Protinus ingemines poſt ictum in corpore utroque;
Nam quoniam tanta reſilit vi corpus utrumque,
Certat ubi læſum formæ renovare decorem,
Quanta compreſſum fuerat, cum perderet illam;
Ipſo, tantundem quoque erit, quod gignitur ictu,
Incrementi; ideo lucra ingeminemus, oportet:
Nempe in corporibus, queis vis ea maxima conſtet.
Sin [b] minor (ut vere eſt in cunctis); augmine creſcent
Non

a Jam ad elaſtica corpora tranſit, primo quidem ad ea, quæ perfectam, tum ad ea, quæ imperfectam habent elaſticitatem. In corporibus perfecte elaſticis ſupputentur prius omnia pro congreſſu directo, tanquam ſi eſſent perfectè mollia: tum velocitas, quam utrumvis corpus accepit in ea hypotheſi, duplicetur, & ea cum præcedenti conjungatur, ſiquidem acquiſitio fiat in eandem plagam cum priore motu, vel earum differentia capiatur, ſi in oppoſitam, & habebitur nova velocitas pro utroque corpore. Ratio eſt, quia dum figura recuperatur, elaſticitas idem præſtat, quod dum amittitur, adeoque effectum duplicat. Inde autem fit, ut a ſe invicem bini globi recedant cum eadem velocitate reſpectiva, cum qua acceſſerant ad ſe invicem. Nam velocitas reſpectiva extincta eſt, dum compreſſio crevit, per velocitates abſolutas amiſſas viribus mutuis, cum in fine ulterioris compreſſionis ad æqualitatem velocitatum redacti ſint globi. Ulteriores velocitates, quæ generantur in partes itidem oppoſitas iterum removent globum a globo, & reſpectivam determinant velocitatem poſt congreſſum. Summa mutationum facta, dum figura amittitur, uſque ad æqualitatem velocitatum, eſt velocitas reſpectiva anterior, quæ eliditur: ſumma mutationum facta, dum figura recuperatur poſt æqualitatem, eſt velocitas reſpectiva poſterior, quæ generatur, quæ idcirco æquales ſunt. Porro inventa mutatione in congreſſu directo pro congreſſu obliquo idem obtinebitur, ut prius, ope reſolutionis motus in illos duos.

b In iis, quæ non ſunt perfectè elaſtica, ſemper, ut ſupra etiam notavimus erit in conſtanti ratione quadam velocitas genita in amittenda ad velocitatem genitam in recuperanda figura, adeoque & velocitas reſpectiva, cum qua accedebant ad velocitatem, cum qua recedent a ſe invicem, in conſtanti ratione erit. Quamobrem ſatis eſt inprimis per experimenta in eo corporum genere inveſtigare, quæ ſit ea ratio, efficiendo, ut bini

Non duplici, verum, pro vis ratione, minori:
Ut chalybem chalybi, & preſſæ ſe impingere lanæ
Si facias pariter preſſæ glomeramina lanæ;
Quod reparans formam vis efficit immutando,
Deficere eſt prope dimidia quia parte repertum
Nempe ab eo, quod vis lædens formam ante peregit;
Quod ſuper addendum eſt, non partem excedere longe
Debet dimidiam: ſi vitris ſed peragas rem;
Octonis bis percipias de partibus unam,
Vis ea ne dici tum maxima poſſit, abeſſe;
Lucrum id propterea prope tunc erit ingeminandum.
Ex his [a] per numeros deducere plurima poſſis,
Quæ placeant animo novitatis imagine quadam,
Et ratione trahant, cum primum eſt cognita, mira.
Hoc [b] genus eſt, ſi corpus in æquum corpus agatur
Di-

bini globi in ſe invicem incurrant, & notando, quantam fecerint motuum, ac velocitatum mutationem. Hac comparatâ cum ea, quam feciſſent per regulas ſuperiores traditas pro perfecte mollibus, quæ datis tantummodo maſſis, & præcedentibus velocitatibus invenitur, habebitur quæſita ratio. Tum pro reliquis caſibus in ea ratione augendus erit effectus, qui habetur in amittenda figura, & habebitur, quid in eo corporum genere conſequi debeat, ac experimentis inſtitutis revocabitur ad trutinam hæc naturæ lex.

Experimenta inſtituuntur ope pendulorum, in quibus, data altitudine, ex qua globus demittitur, innoteſcit velocitas, quam habere debet in fine, quibus de rebus agemus paulo inferius, ubi de gravitate. Interea in hoc ſupplementi loco oſtendam, quid Newtonus in ejuſmodi experimentis caverit, ne iis aëris reſiſtentia obeſſet. Obſervavit autem in imperfecte elaſticis, velocitatem regreſſus minui cum vi elaſtica ita, ut regreſſus a ſe invicem fiat cum velocitate relativa, quæ ſit ad velocitatem relativam mutui acceſſus in data ratione, *niſi uoi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliquam, quaſi ſub malleo, patiuntur*. Invenit vero *in pilis ex lana arcte conglomerata, & fortiter conſtricta, velocitatem relativam regreſſus eſſe ad velocitatem relativam concurſus, ut 5 ad 9*, & eandem fere in chalybe, in vitro vero ut 15 ad 16, quibus exemplis & Noſter eſt uſus, ac priorem illam rationem expreſſit dicendo *Deficere prope dimidia quia parte*, nam deficit per 4, & dimidia pars erat 4.½ In caſu vero poſteriore vitrorum deficit per unam ſextamdecimam partem, nimirum unam e bis octonis.

a Plurima ſunt admodum ſcitu digna, quæ eruuntur e formulis algebraicis congreſſuum, quos hic innuit ſub numerorum nomine, pertinent enim ad Algebram, quam Newtonus univerſalem Arithmeticam appellavit. Ea in ſupplemento perſequemur, aliqua tantummodo ex iis theorematis Noſter perſequitur, ſuppreſſis demonſtrationibus.

b Primum ex iis theorematis pertinet ad globos æquales perfecte elaſti-

Directa regione viæ, tamen exiliendi
Ut vi ſit, major qua nulla eſt, præditum utrumque;
Poſt ictum vicibus verſis celerare videbis,
Nimirum, ut primum modo mobilitate feratur
Illa, qua corpus contenderat ante ſecundum;
Aſt hoc nunc contra, qua tum properaverat illud;
Atque ita, mutatis perſonæ ut veſtibus, ibunt,
Inter ſe ſimiles, velut ante, habitumque, modumque,
A ſe quæque tamen diverſa habituque, modoque.
Proin ª ſi forte plagas in eaſdem corpus utrumque
Ante ferebatur, curſu tamen impare; curſu
Impare poſt etiam, commutatoque ferentur;
Uno ſin aliud fuerat properante quietum,
Mutuo ab impulſu ſubito ſiſtetur ibi illud,
Quodque quieſcebat, fugiet, totaque recepta
Protinus alterius tum mobilitate meabit.
Adverſis contra ſi frontibus obvia demum
Occurrant æquo properantia corpora lapſu,
Diſſilient æquo pariter fugientia lapſu;
Impar ſin medium carpentibus intervallum
Impetus eſt, & erit redeuntibus impetus impar,

ſticos. Ii poſt congreſſum directum permutant velocitatis, quas habuerant ante, ita, ut alter eandem velocitatem habeat poſt, quam alter habebat ptius.

Id facile patet ex principiis expoſitis hoc pacto. Si poſtquam deſiit mutari figura, primus globus teeiperet velocitatem contrariam illi, quam recepit in mutatione figuræ, rediret ad priorem ſuam velocitatem. Quare ſi ſecundus reeipiet poſt id tempus velocitatem illi æqualem, habebit poſt colliſionem, eam velocitatem, quam primus in eo caſu haberet; cum illo momento, in quo amiſſio figuræ deſinit, eandem velocitatem uterque habeat; & eædem binæ, ea nimirum, quam tum habet utervis, & quæ deinde advenit, ſimul conjunctæ eandem componant. Accipit autem ſecundus in recuperanda figura æqualem, & contrariam illi, quam primus accepit in amittenda; cum etiam ipſi globi æquales ſint, æquales in iis in amittenda figura & contrariæ mutationes ſunt factæ, & cum perfecte elaſtici ponantur, tantundem acquirunt in recuperanda, quantum in amittenda acquiſiverant. Igitur ſecundus globus poſt colliſionem revera habebit eam velocitatem, quam primus habuerat ante, & viceverſa eodem argumento primus eam, quam ſecundus habuerat.

ª Sponte hinc conſequitur, quod Noſter eruit. Si nimirum ferebantur prius in eamdem plagam ferentur in eamdem & poſtea, velocitatibus tamen permutatis. Si alter quieſcebat, alter, qui eum impulit, quieſcet, tradita illi tota ſua velocitate. Si demum in ſe mutuo tendebant velocitatibus oppoſitis æqualibus, oppoſitis iti-

Alterum ut alterius tamen impete progrediatur.
Præterea [a] parte ex una ſociale geratur
Si bellum, ſi nempe æqualia plurima longo
Ordine, uti denſo ſtipatam milite turmam,
Corpora per tactus diſponas continuatos,
Parque aliud corpus reſonanti verbere primam
Percutiat frontem, multorumque otia turbet;
Fret, ut hoc ſubita compoſtum pace quieſcat,
Nec ſe à contactu dulci divellat eorum;
Quæ regione ſua, veluti non pulſa, manebunt;
Tempore quanquam illo tantundem carpitur agmen
Extremum; quoniam excuſſum procul aufugit unum
Tam celeri, primum quam venerat, impete corpus:
Namque perinde iſtud fieri fateare neceſſe eſt,
Acſi non ita ſint tactus ſtipata per ipſos,
Aſt aliquo inter ſe ſpatio divulſa locentur,
Succedente aliquo & ſe mutua tempore pulſent;
Impulſum nam quodque movebitur, inde quieſcet
Impellens; aſt extremum cum pellere poſt ſe
Non habeat, quod poſſit, eo, quo pellitur, ibit
Perpetuo, & nullam poterit captare quietem.
Ut ſi improviſo perculſus fulmine belli
Effugeret trepidus ſupremo ex agmine miles,
Quem fruſtra revocent immotæ ad ſigna cohortes
Non agnoſcentem ſtrepitum, voceſque ſuorum,
Armaque, nec ſubita in formidine reſpectantem.
Sed genus [b] hoc alia, ut poſſis certamina noſſe,

Ad

itidem, & æqualibus velocitatibus regredientur; ſi eum imparibus advenerunt, cum æque imparibus, ſed permutatis redibunt.

a Hinc autem colligitur illud. Si diſponantur ex una parte multi globi æquales perfecte elaſtici in recta quadam, qui ſe contingant, tum in eadem recta alius adveniat, qui primum impellat; in hoc caſu is, qui advenit, & reliqui omnes quieſcent, præter poſtremum illum, qui abibit cum eadem velocitate, eum qua ille novus allapſus eſt. Si enim aliquo intervallo a ſe invicem diſtent ſinguli ſingulis totam ſuam velocitatem communicabunt, & quieſcent; poſtremus autem ſolus, qui nullum poſt ſe habet, abibit cum tota velocitate, quam recepit. Minuatur jam intervallum in infinitum, & habeatur pro nullo, ac res eodem modo ſemper ſe habebit.

b Hæc quidem de globis æqualibus, jam tranſit ad præcipua quædam, quæ pertinent ad inæquales. Primum autem eſt hujuſmodi. Si globus magnitudinis cujuſcumque in alium incurrat globum utcumque inæqualem, & elaſticitas perfecta ſit, erit ſumma maſſarum ad duplam maſſam incurrentis, ut ejus præcedens velocitas ad novam velocitatem alterius. Id theorema

Ad geminos, ſed non æquali corpore qui ſint,
Nunc te verte globos, quorum alter in alterum agatur
Immotum properans; deprendes namque recentem,
Gignitur immoto quæ corpore, mobilitatem
Tantam eſſe ad primam impellente in corpore, quantum
Hoc ipſum impellens, nimirum ſi geminetur,
Corpus erit, ſimul ad compactum corpus utrumque.
Hinc licet agnoſcas [a], ſi corpora terna globorum
Sint, quorum medium media quoque mole ſit inter
Altera bina, atque hoc ſi primo corpore corpus
Impellas medium; quod deinde ſubibit, iturum
A ſociis procul eſſe cita mage mobilitate,
Quam, medium ſi dimotum ſit corpus, abiſſet
Primi incurrente in ſe tantùm corporis auctu;
Aſt & adhuc fuga major erit, ſi certa ſit inter
Has ternas ratio moles, & mutuus ordo;
Quoque magis, genus hoc, creſcent diſcrimina, creſcet
Hoc magis extremi pariter fuga corporis illa.
Denique, diſponens ſi non tria corpora tantum,
Multa ſed inter ſe conjungas ordine certo
Perpetuùm variati auctùs quocumque globorum,
Efficies illo impulſu, mage corpore multo
Mobilitas ut adhuc extremo creſcat, & ipſe
Immensùm celeri ſeſe globus impete volvet
Illa nimirum præ mobilitate, tuliſſet
Qua ſeſe fugiens globus ipſe hic; primus ad illum
Expoſitus ſi tum incurſum, ſoluſque fuiſſet.

 Jam

rema patet ex eo, quod demonſtravimus ſuperius pro perfecte mollibus, & ex eo, quod perfecte elaſtica duplicent lucrum acquiſitæ velocitatis.

[a] Ex ſuperiori theoremate facile deducitur, quid conſequi debeat, ſi tres globi habeantur, & primus in tertium quieſcentem incurrat per ſecundum itidem quieſcentem. Si medius ille eſt major utroque, vel minor utroque, tertius minorem velocitatem accipiet per illum medium, quam acciperet immediate; ſi medius eſt æqualis utrilibet, tertius accipiet eandem, quam immediate acciperet; ſi eſt etiam magnitudine medius inter ipſos, accipiet majorem, & eo majorem, quo plures medii interſerantur. Poſtremum hoc hic Noſter innuit exprimendo illud, ubi multi intermedii ſint, poſtremum accepturum velocitatem majorem per ipſos, quam ſine ipſis immediate acciperet.

Eorum demonſtrationem exhibebo in ſupplemento, ut & horum, quæ conſequuntur, quæ quidem Noſter, ne infinitus eſſet, omiſit. *Si corpora ſint tria, maximam velocitatem accipiet tertius, ſi medius ille ſit geometrice proportionalis inter extremos. Si autem plura interſerantur, habebuntur*

hæc

Jam ſi [a], quod minimum eſt corpus, ſit in ordine primum
Perpetuo, incurrenſque ictum tranſmittat ad uſque
Extremum, magnumque (ducem velut agminis ejus),
Hoc aliqua certe procurrere mobilitate
Aſpicies, ſed ea multo, multoque minore,
Quam quæ mobilitas primi foret, exiguique;
Motus at ejus erit (non tantum mobilitate,
Verum & materia quem nos conſtare fatemur)
Auctus in immenſum præ motu denique primi.
Hinc noſcas non in corpus de corpore motum
Poſſe per impulſus transferrier; anteriores
Uſque ſed extingui motus, gignique recentes
Ictibus in cunctis vi, quæ reparare figuram
Cogit, in oppoſitas ea dum connititur oras.
Sin, qui primus erit globus, idem & maximus extet;
Quæ ſeſe tum per medios exinde propagat
Mobilitas, quam ſe magno efferet incremento?
Quantaque in extremo, minimoque recepta vigebit?
Sic itidem incuſſus primis legionibus, hoſtis
Adventu, timor, uſque magis ſuccreſcit eundo;
Dumque alios, alioſque invadit, ſeque propagat
Per peditumque equitumque globos, & murmura miſcet,
Horribilis magis extremos ſuper incubuiſſe

Ipſe

hæc tria theoremata. Primo quidem poſito eodem numero globorum, maxima poſtremi erit velocitas, ſi omnes ſint in continua progreſſione geometrica. Secundo, quo plures medii globi eum ea lege interſerentur, eo majorem velocitatem accipiet tertius ille. Tertio, erit tamen limes quidam, quem non poterit prætergredi velocitas poſtremi globi, & ad quem in infinitum accedet, ſi concipiatur globorum mediorum numerus auctus in infinitum; nimirum limes ille erit velocitas, quæ ad velocitatem primi corporis ſit in ratione ſubduplicata maſſæ hujus ad maſſam illius, ut nimirum ſi maſſa primi ſit quadruplo, vel noncuplo major, quam maſſa poſtremi, multiplicatis in infinitum intermediis accedat velocitas poſtremi in infinitum ad duplam, vel triplam velocitatem primi.

[a] Habetur & illud, quod hic Noſter commemorat: Si motus incipiat a minimo e pluribus continue proportionalibus, & ſatis inæqualibus, maximi velocitatem fore multo minorem, quam minimi illius impellentis, motum tamen, qui etiam a maſſa pendet, fore multo majorem, quam eſſet motus ipſius impellentis. Si vero motus incipiat a maximo, minimum accepturum quidem motum admodum minorem, quam fuerit motus primi, ſed etiam accepturum velocitatem multo majorem velocitate primi, quod quidem ſatis apta ſimilitudine illuſtrat metus per totam legionem a primis ordinibus propagati ad extremos, & aucti.

Ipſe ſolet, pedibus pernices addit & alas.
Atque [a] tibi ante oculos aliquo proponere pacto
Mobilitatis uti, genus hoc, tanta augmina poſſis;
Corpora jam centum proin decreſcentia parte
Semper dimidia componens ordine longo
Dirige, uti docui; tantus, tantuſque profecto
Denique centenos poſt ictus corpore curſus
Multiplicetur in extremo, minimoque, neceſſe eſt,
Ut nomen reperire ſuum ſuper accumulato
Immenſùm numero, clariſque exponere verbis
Non valeam; ſed ter conata, ter hæreat infans
Lingua, licet varias aſſueta inflectere voces,
Difficileſque diu res ſuavi efferre loquela.
Tute tamen per te rationem ut denique inire
Hanc poſſis, tantoſque tuam diſtendere mentem
Per numeros, ſine te facili deducier illuc
Exemplo: decies hominum centena tenentem
Millia proin aliquam, velut eſt Ægyptia Memphis,
Finge urbem; genus hoc, dein urbes mille ſub una
Florentes regni pariter ditione, quod ullis
Non repetas animo ex annalibus ante fuiſſe,
Quanquam olim Aſſyrios, Medos, Perſaſque revolvas,
Et rerum Dominos, qua non erat invia tellus,

Ro-

a Incredibilis videtur ſane multiplicatio velocitatis in caſu, quem hic Noſter exponit, in quo ſint 100 globi, quorum quilibet præcedens ſit duplus ſequentis. Si motus a maximo incipiat; omnino conſtat velocitatem poſtremi fore pluſquam millies, millies, millies mille vicibus majorem, quam primi. Nam erit ut ſumma maſſarum primi, & ſecundi ad duplam maſſam primi, ſive ut 3 ad 4, ita velocitas primi ad velocitatem ſecundi, & eadem erit ratio, quam habebit velocitas cujuſvis in hac ſerie præcedentis ad velocitatem cujuſvis ſequentis. Quare ad habendam poſtremi velocitatem oportebit rationem 3 ad 4 accipere continenter *99* vicibus, in qua continua multiplicatione notiſſimum eſt in immenſum augeri rationem ipſam, ut demonſtrabimus in ſupplemento.

Porro ut immanem illum exprimat numerũ millies, millies, millies, mille, ſive ut dicimus, millionem millionum, imaginem adhibet hominum, quorum in una urbe ſint decies centena millia, cujuſmodi urbes habentur utique, ſed pauciſſimæ. Londinum Angli, & vero etiam Pariſios Galli, eo cenſent pertingere, at infra eum numerum contineri videtur urbs utraque. In Aſia ipſum nonnullæ, atque in Sinis potiſſimum excedunt.

Noſter nominat Memphim, cujus loco proxima nunc eſt ea urbs, quam dicunt *Gran Cairo*, quam itidem ad eum numerum dicunt accedere. Univerſum autem Telluris globum plerique arbi-

tran-

Romanos; hominum ſiquidem tot millia regnum
Hoc aleret, quot vaſta, ſuum quacumque per orbem
Incolitur, vix nunc tellus ferat. Haud tamen iſtic
Siſtendum, ſed adhuc opus eſt, ea fingere mille
Regna, & tam late tot per florentia regna,
Quotquot erunt, hominum cunctorum condere cenſum:
Vix etenim quoque tunc numerum contingere poſſis
Optatum, rebuſque æqualem inducere noſtris.
Hic quoque [a], jam ſupera quod dixi mollia ſecum
Obliqua ſtatuens confligere corpora plaga,
Eſt opus, ut pariter dicatur, corpora, preſſæ
Scilicet ex ictu reparant quæ damna figuræ,
Obliquo in ſeſe incurrant ſi forte meatu,
Ipſum hunc in geminos motum debere reſolvi,
Et qui corporibus directos inferat ictus,
Et qui nec fugiat contactus, nec petat ipſos,
Propterea qui non turbetur ab ictibus ullis:
Ergo, quandoquidem primus mutabitur horum
Tantum a conflictu; quod poſt ſuperabit ab ipſo,
Cum motu, quem nil turbat, compone ſecundo;
Atque ita cognoſces, qualis poſt integer exit
Motus ab impulſu, quas & contendit in oras.
Conſimile [b] eſt media tranſverſa corpora navi
Directos, genus hoc, properent ſi concita in ictus;
Poſt plaga, qua pergunt, motuſque videbitur idem,
Sive abies portu maneat religata quieto,

Seu

trantur mille iis urbibus nequaquam incolarum multitudine æquivalere, ut Ricciolius, qui Europæ centum ejuſmodi miliones, Aſiæ quingentos, utrique Americæ ducentos tribuit, trecentis pro Terra Auſtrali incognita reſervatis, ut adeo numerus ille millionis millionum millies totius Telluris frequentiam excedat.

a Monet hic obliquos elaſticorum congreſſus haberi, reſolvendo, ut in mollibus, velocitates in duas, alteram perpendicularem ſuperficiebus ipſorum in puncto contactus, quæ nimirum habeat directionem rectæ jungentis centra, alteram parallelam ipſis ſuperficiebus, tum colligendo mutationem prioris, & eam cum poſteriore non mutata componendo.

b Hanc colliſionem obliquam confirmat exemplo motus facti in navi. Si nimirum in ea congrediantur directè bina corpora, eadem phœnomena accident, ſive ipſa moveatur, ſive quieſcat. Et tamen ſi agatur tranſverſim, motus utriuſlibet componetur ex illo motu communi navis, & ex ſuo peculiari motu intra navim, adeoque congreſſus erit obliquus, ſed ille motus tranſverſus nihil turbabit rem, ut hic motus ille ſuperficiei parallelus, ubi ſuperficies ſe contingunt, nihil rem turbat.

Seu curvo ruat ære ſalum; neque enim ille profecto
Proinde in diverſum tum motus corporum abibit,
Inter ſe navi haud quidquam turbatus eunte,
Quanquam compoſitus cum motu navis eodem.
Hinc [a] manifeſta fluit ratio, cur, maxima cui ſit
Vis ea, quam docui, ſi recto venerit ictu
Corpus in obſtaclum, quod non ſuperabile conſtet,
Exiliens recta pariter regione viai
Mobilitate pari redit illinc, ante ferebat
Qua veniens ſe: projectu jaculeris at ipſum
Si contra obliquo; pariter ratione meandi
Exſilit obliqua, redeundoque efficit æquum
Flexum illi, nuper quem fecit in objice duro.
Quod ſi non ea vis, quam dixi, maxima conſtet,
Sed quacumque minor menſuræ ſit ratione;
Hac ratione magis reditus langueſcat ab ictu
Exſilientis, & ipſe minor ſit flexus, oportet:
Inde globis [b], ſocios certantes inter, eburnis
Ludere qui ſtrato volventibus æquore gaudent,
Accidit, ut propter non æqua obſtacula ſpondæ
Sæpe, pilæ de parte nec omni vim ſaliendi
Æqualem, ſummamque, manu licet uſque perita
Impellant, tamen ambiguo fallantur in ictu,
Et proin ſperatæ doleant ſibi præmia palmæ

Ela-

a Explicat hic motum reflexum, qui ab elaſticitate oritur. Si globus perfectè elaſticus incurrat in planum immobile ad perpendiculum, reſilit itidem retro ad perpendiculum, cum eadem velocitate, ſi autem oblique incidat, obliquè reſiliet ex parte oppoſita, & angulus reflexionis erit æqualis angulo incidentiæ. Conſtat primum ex generalibus formulis colliſionum habendo planum immobile pro globo infinito, ſed evidentius conſtat ex eo, quod dum figura amittitur per compreſſionem, amittitur tota velocitas, quæ dum remanet, augetur ſemper compreſſio. Quare dum figura recuperatur, acquiritur nova velocitas æqualis priori, & contraria. Conſtat ſecundum, quia velocitas parallela plano durat, cumque regreſſus perpendicularis ſit æquè velox, ac erat acceſſus, diſtantia a plano eadem erit æqualibus temporibus ante, & poſt incidentiam, & proinde æquales erunt viarum inclinationes.

Quod ſi elaſticitas ſit imperfecta, velocitas in regreſſu erit in data ratione minor, quam in acceſſu, & proinde angulus reflexionis aliquanto minor.

b Indicat ludum trudicularem, quem dicimus *trucco*, *bigliard*. In eo ſolent ictus reflexos determinare per æqualitatem angulorum reflexionis, & incidentiæ. Sed aliqua ſpondæ, vel etiam globi inæqualitas, ut & defectus

Elabi, quæ tum comitum ferat æmula virtus.
Et dubitamus [a] adhuc, cum ſit deprendere, legem
Uſque adeo in multis rebus, quaſcumque tueri
Poſſumus, omnigenis præſertim in corporum eandem
Ictibus inter ſe quorumviſcumque, vigere,
Nempe agere æquali vi corpora, agique viciſſim,
Hanc ipſam per quæque extendere corpora legem,
Corporeamque ſub hac naturam includere cunctam?
At quædam pugnare videntur; & ordine legis
Non ſtabili, fixoque teneri: quæ tamen ipſa
Si bene percipias, & ab omni parte revolvas,
Haud obſtare quidem, at contra prodeſſe videbis,
Et firmo magis hinc ſtabiliri pondere legem,
Haud ſecus ac populi conſtanti more probatam.
Hoc genus eſt [b], medio cum ſaxi pondera fune
Fortis equus trahit antevolans; cum per vada ponti
Ducit agens poſt ſe ventis impulſa carina
Puppim exarmatam, ſpoliiſque ingentibus auctam,
Captam ex hoſte fero prædam in certamine longo;
Nam tardetur equus quamvis a pondere magno,
Puppis item a puppi; ſed equus tamen, ipſaque vincit
Prima ratis, quoniam ſequitur ponduſque, ratiſque
Altera: quare ubi ſunt illæ æquo momine vires,
Quæ ſeſe inter agunt, & aguntur? nonne videtur
Illa & proinde minus ſtabili fundata ſolo lex?
Verum [c], ne quid in his erres hic forte putandis

Vi-

fectus elaſticitatis, qui angulorum inæqualitatem inducit, rem perturbat. Globi etiam craſſitudo, niſi computetur, errorem parit. De his in ſupplemento.

a Regreditur ad legem actionis, & reactionis æqualium, quam hiſce colliſionibus corporum uſque adeo confirmatam iterum inculcat. Porro non inutile ad Inſtitutum fuit, tam multis hanc legem fulcire, a qua pendet maxima pars Newtonianæ Philoſophiæ, quæ gravitatis vim mutuam expoſcit. Idcirco ipſa expoſita, & confirmata, ea quæ obiici in contrarium poſſunt, & ab imperitis opponuntur in dies, diſſolvit.

b En difficultas. Cum equus fune lapidem trahit, retardatur quidem equus, adhuc tamen ipſe lapidem poſt ſe rapit, non ipſum lapis. Ergo non æqualem exercet actionem lapis in equum, & equus in lapidem. Idem accidit in navi, quæ velis promota navim captam poſt ſe trahit, majorem prima fronte actionem exercens, quam ipſa.

c Difficultatem ut amoveat, diſtinguit binas colliſiones in ſingulis illis caſibus, in quibus colliſionibus ſingulis

Viribus, adverte huc animum, atque age, collige mecum,
Quidquid agat vel equus, vel puppis, quidquid agatur.
Terram pellit equus pedibus, dum promovet artus,
Et lapidem, recipitque impulſum puppis ab auris;
Propterea celer ille magis procurreret, atque hæc,
Si nil a tergo retineret deproperantes:
Se pedibus movet ipſa retrorſum terra repulſa,
Atque hinc atque illinc terræ par motus, equoque eſt;
Quæque ferunt auræ puppim, deperdere motus
Tantundem debent pariter, quantum illa receptat.
Nonne vides agere hìc ambis vim partibus æquam?
Interea funis diſtenditur, æqualique
Victricem trahit hinc puppim molimine, equumve,
Prædam illinc, lapidemve, & tantum deperit illis
Motus propterea, quantum conceditur iſtis;
Nempe his, quidquid habent, totum conceditur, illis
Pars aliqua eripitur; quare ſuperare neceſſe eſt
Partem aliam; veluti cum corpus molle quieto
Occurrit, ſecumque rapit, licet utraque eandem
Contendant ſimul in partem, & communis utrique
Sit motus, non inde minus tamen urgeat æqua
Oppoſitas vis in partes utrumque, neceſſe eſt.
Quare, quam ſtatui, lex firmaque, certaque perſtat.
Nunc age [a], quod ſupereſt, poſtremum denique dicam

gulis ſua actionum contrariatum habetur æqualitas. Altera eſt equi cum univerſa terra, quam pedibus pulſat muſculorum ope connixus, altera ipſius equi cum lapide ope funis. In prima equus in totam tellurem agit, tellus in ipſum, per illos muſculos æquè utrimque agentes. In tellure tamen tanto majore perquam exigua velocitas gignitur, gignitur in equo major. Altera colliſio fit ope funis trahentis, & equum in lapidem, & lapidem in equum. Hæc aufert ab equo tantum motum, quantum tribuit lapidi, donec binæ eorum velocitates ad æqualitatem redigantur. Remanet equo aliqua velocitas acquiſita per primam colliſionem. Si eam non habuiſſet, progredi omnino non poſſet. Idem accidit in navi, quæ habet primam colliſionem cum vento per vela, ſecundam cum navi capta per funem, & in utraque habetur æqualitas contrariarum actionum. Victoria oritur, quia id, quod aliquem motum ex prima colliſione habet, non amittit totum in ſecunda, ſed eam amittit ejus partem, quam acquirit corpus fune tractum. Ibi idem accidit, quod in globo molli in aliud molle incurrenti, qui ipſum ſecum abripit illæſa actionum contrariarum æqualitate, quia jam ante habebat velocitatem quandam, cujus partem poſſet amittere, parte adhuc ſibi retenta.

a Delabitur jam Noſter ad poſtremam generalem materiæ proprietatem,

Corporis officium, nobis quod pluribus extat
Exemplis, quam cuncta, prius quæ nota, repertum;
Quandoquidem a terris, cæloque petuntur ab ipſo:
Acre quod ingenium tamen, aſſiduaſque repoſcit
Quærentis curas animi, qui noverit ante
Plurima, menſuras, rationes, pondera, motus,
Naturæ varias ſolers & adiverit artes.
Non fuit idcirco, licet & ſublimibus olim
Gentes ingeniis florerent, multaque diam
Paulatim in lucem proferrent abdita rerum,
Magnum hoc inventum munus, magnaſque gerens res;
Inter mortales donec te protulit unum
Ætas, ætherium velut inter ſidera ſolem,
Nevvtone; ingenii qui lumine colluſtrares
Naturam, inferreſque adyta in ſecreta ſagacem,
Divinamque tuam, quæ vinceret omnia, mentem.
Hac Natura tibi cum primum parte retecta eſt,
Omni a parte patens patuit, noſtriſque repente
Prodita tota oculis pene eſt mortalibus; inde
Audaces poſt te ingredimur cæleſtia templa;
Ire iter hoc tutis liquidum licet, aſtraque, certa
Qua via, conſequimur vaſtos tranantia tractus,

Et

tem, mutuam nimirum gravitatem in ſe invicem omnium materiæ particularum. Porro de ipſa affirmat primò, eam patere inductione ampliore, quam cæteras proprietates materiæ; patet nimirum & terreſtrium, & cæleſtium corporum inductione. Secundò, eam requirere ingenium acre, ſtudium intenrum, & cognitiones plurimas ex Geometria potiſſimum, ac Mechanica, quarum defectu complures cum præclariſſima Newtoni inventa non intelligant, in ea acrius invehuntur. Tertio, ingentes eam habere uſus, qui quanti ſint, ſequentibus conſtabit libris. Ea omnino eſt unica ad Aſtronomiam aperiendam clavis, ac ad alia ſexcenta. Quarto tamdiu mortalibus omnibus ignotam a Newtono demum admirabili quadam felicitate detectam. Fuerant ſane, qui ante ipſum gravitatem nominarent, & Keplerus, qui feliciſſimè leges motuum cæleſtium detexit Tychonianis potiſſimum obſervationibus uſus, earum cauſas explicare conatus eſt, per magnetiſmum quendam; verum iſta omnia tam incerta ratione deducta, & plerumque penitus arbitraria, tam vaga atque indeterminata, tam abſurda etiam fuerant, ut cum iis comparata, quæ Newtonus certiſſima methodo invenit, quibus tam multa accuratiſſime demonſtravit primus, quorum opera multa divinavit etiam nulli ante cognita, nulli cognoſcenda ſine mutuæ gravitatis invento, pro nullis omnino haberi debeant. Quamobrem quæ huc ad eum celebrandum, extollendumque congerit, ſunt quidem omnia tanto viro digniſſima.

Et ſpatia immenſi percurrimus orbis, & alte
Hærentes rerum tentamus tangere metas.
Atque [a] hoc materiam diffuſum munus in omnem
Cuncta movens vis eſt, qua corpora nempe videmus
Certa inter ſeſe trahere omnia lege, trahique;
Unde in natura, quæ fiunt, plurima pendent,
Tutemet ut facili poteris cognoſcere pacto,
Poſtquam ea conſtiterit qualiſque, & quanta poteſtas:
Gaudebis nodos diſſolvere poſſe prope omnes
Scilicet, & dubios labyrinthi noſcere ductus.
Protinus [b] e genere hoc gravitatem hanc eſſe profecto
Ipſe vides, deorſum in terram qua corpora circum
Contendunt; viſque hac de parti cognita ſemper
Iſta fuit; quis enim, terrai qui colat orbem
Hanc in corporibus vim multis eſſe ruendi
Deorſum, ubi linquuntur vacuis ea libera in auris,
Neſciat, & motum labentibus accelerandi?
Propterea magnæ rupes, evulſaque ſaxa
Præcipitant altis de montibus impete vaſto,
Imber & in gremium telluris labitur almæ,
Excuſſæque pluunt glandes, devexaque volvunt
Undique ſe pelagi depreſſum flumina in æquor.
Quæ niſi vis circum terræ conjuncta teneret,
Et compreſſa arcto terreſtria corpora vinclo,
Cuncta videremus turbataque, diſque ſipata,

Si

a Hic ipſam gravitatem generalem exponit, quæ ſit vis quædam mutua, qua omnes particulæ materiæ in ſe invicem tendant. Attractionem generalem dicunt, & uſurpatur paſſim attractionis nomen; at ipſo nihil aliud exprimitur, niſi determinatio, quam habent particulæ materiæ, ut ad ſe invicem tendant certa lege, ſive ea oriatur a natura ipſius materiæ, ſive a libera Conditoris lege, ſive ab alia cauſa quacumque. Ingentes hic ejus uſus celebrat, quos in iis videbimus, quæ conſequuntur.

b Ad gravitatem generalem pertinet etiam hæc noſtra terreſtris gravitas, qua videmus tam multa corporum genera in terram cadere. De hac hic ſibi agendum proponit Noſter. Fuit autem ſemper non Philoſophis ſolum, ſed & vulgo notiſſima, cujus effectus quoſdam eleganter ſanè Noſter commemorat, ac præterea notat, quid futurum ſit, ſi gravitas non adeſſet: quam facile tota telluris compages diſſolveretur: quam facile eſſet, quibus liberet, corporibus privare perpetuo humanum genus levi ipſis communicato motu nimirum, quo a nulla vi revocata, in infinitum abirent rectilineo curſu per vim inertiæ. Nos ipſi levi ſaltu elevati, perpetuo ſine ulla ſpe regreſſus in infinitum abiremus, niſi forte aſtrum occurreret, quo retineremur.

Si niſu commota levi ſint, ire per altum,
Et diſtracta procul noſtro ſe ſemper ad uſu
Eripere, & nunquam per ſe revocata reverti;
Ipſi nos etiam, minimo ſi corpora ſaltu
Concita projiceremus, in auras ejaculati,
Sublatique leves terra fugeremus ab ima
Æthera per vaſtum, tantos nec ſiſtere motus,
Obvia ni fuerint defeſſis aſtra, liceret;
Totaque paulatim diſſolvi terra per auras
Deberet, motu disjectis partibus ejus.
Hæc [a] igitur gravitas, quæ terræ corpora jungit,
Subjecta humanis fuerit cum ſenſibus omni
Tempore, non tamen ante ſuas patefecerat orbi,
Queis generat motus, atque urget pondera, leges,
Tyrrheni quam magna Viri effulſere reperta.
Suſtulit hic auſis præſtantibus ardua ſeſe
Regna in Naturæ primus, Pater ipſe profecto
Omnia circum avide luſtrantis, & experientis
Doctrinæ, quæ nunc ingentem excrevit in auctum;
Scilicet ipſe viam poſt ſe conſtravit ituris
Longius, & certo deduxit tramite veri,
Qui procul in ſummo ſiſtantur culmine demum;
At decorum primos tamen ipſe inſedit honores.
Ergo [b] diſcuſſis mens primum erroribus illa

Incli-

a Licet autem terreſtris gravitas ſemper cognita fuerit, tamen per omnes præteritas ætates incognitæ penitus, ut Noſter monet, fuerunt omnibus mortalibus leges, quas in accelerandis, vel retardandis motibus exercet, donec eas magnum illud Italiæ decus, immortalis famæ vir Galileus detexit, & protulit. Eum autem jure patrem appellat novæ doctrinæ, nimirum Phyſicæ experimentalis, & inprimis totius Mechanicæ, quà ipſa reſpicit motus viribus genitos, quæ quidem ſcientia poſt ipſum ab aliis pluribus, a Newtono in primis, mirum quantum provecta, ingentes habuit progreſſus, quorum omnium laus debetur ſane Galileo; primos ad hoc doctrinæ genus aditus aperienti. Cautè autem admodum loquitur Noſter, dum de Mechanicæ augmento dicit tantummodo *ingentem qua nunc excrevit in auctum*, ac deinde addit *viam poſt ſe conſtravit ituris. . . . qui procul in ſummo ſiſtantur culmine demum*. Licet enim ingentes progreſſus ſint habiti, adhuc tamen ita multa ſuperſunt incognita, & olim fortaſſe detegenda, ut ea, quæ novimus reſpectu eorum, quæ ſuperſunt, quemadmodum facile quidem demonſtrari poteſt, ſint fere nihil.

b Præcipua Galilei inventa commemorat, ut, qua lege gravia deſcendant, ſeu libere, ſive per plana inclinata, unde ipſe Galileus deduxit gravi-

tatis

Inclita, rebus in his hominum qui corda premebant,
Luſtravit vigilans, quo deorſum corpora pacto
Deſcendant, & qua, detexit, lege, quibuſque
Et ſpatii, & motus, & temporis incrementis,
Libera ſeu fuga ſit, declinatove retenta
Æquore; conſtantem deduxit corpore in omni
Unde, paremque ſibi gravitatem, & continuatos
Uſque exercentem niſus, oſtendere ſenſus
Quatenus id poterant vigiles nimis, intentique:
Præterea & curvos potuit ſignare meatus,
Corpora queis properant vacuas projecta per oras:
Ex hoc igniferi docuit Mavortis ad uſus
Certius æratis nova mittere fulmina belli
Longe e tormentis, & cuncta evertere miſſis:
Quin alia aggreſſus quoque multa eſt, unde venirent
Amplæ, & præclaræ mortalibus utilitates,
Ubertim vitam quæ ornarent, inſtruerentque.
Quæ tamen hic ad rem facientia noſcere noſtram
Par ſit, cuncta ſuo mecum dicenda recenſe
Ordine. Principio [a] gravitatem cernimus ipſam
Continuo urgentem conatu corpora deorſum,
Si quid & officiat lapſuris, illa prementem
Haud minus, æquali ſemper vi, ſive locentur
Altius in ſumma turre, aut depreſſius ima.
Nonne vides, cum nos corpus grave tollere terra
Cœpimus, ut gravitas obſtat, contraque repugnat?
Ut noſtrum in nobis, quo tum contendimus, ipſis
Sen-

tatis vim in quovis corpore conſtanter agere, dum corpora deſcendunt hic apud nos in exiguis intervallis: quas curvas lineas projecta corpora gravia deſcribant, nimirum Parabolam, cujus ope directiones invenit neceſſarias, ut globus data velocitatē emittendus e tormento bellico ad datum abeat ſcopum. Multa itidem alia, quæ ad uſum pertinent humanæ vitæ ſane utiliſſima ex iiſdem derivata ſunt Galilei inventis, ut ex. gr. quæ ad aquarum fluentium velocitatem ſpectant. Porro ex iis, quæ pertinent ad gravitatem terreſtrem præcipua quæque Noſter ex ordine perſequitur.

a Primo loco docet hic apud nos, nimirum in exigua diſtantia a ſuperficie terræ, & in eadem regione gravitatem exercere ſemper eandem vim, cum idem ubique ſentiamus pondus, ſi id manu, vel humeris elevemus. Illud *apud nos* neceſſario apponendum fuit, nam, ut infra videbimus, gravitatis vis alia eſt & in aliis diſtantiis a terræ centro, & in aliis terreſtris ipſius ſuperficiei partibus, minor ſub Æquatore, major ad Polos. Addit etiam, quantum ſenſu percipere licet, nos videre, continuam, non interruptam gravitatis actionem eſſe.

Sentimus niſum, quo ſimus cumque locorum ?
Sublatumque manu retinentes, pondere preſſam
Uno, eodemque manum pariter ſentire neceſſe eſt ?
Quapropter quovis in corpore cum gravitatem,
Quovis atque loco nos experiamur eandem,
Hic ipſam ſemper niſus nos inter oportet
Exercere [a] pares, paria & facere omnia in æquis
Temporibus, quæcumque facit; proin temporis omni
Par nova mobilitas, novus impetus adveniet par
Momento; ſimul & labente in corpore ſemper
Incrementorum numerus ſervabitur horum
Propter inertem vim, ſi nil tamen obſtet, & illo
Detrahat ex auctu, reſtando, atque officiendo.
Propterea cum non obſtans per inane feretur
Corpus, tempus erit quanto productius, ex quo
Labier incœpit, majorem creſcere tanto
Debebunt omnes in ſummam mobilitates;
Totaque temporibus reſpondeat illa, neceſſe eſt:
Proin breve per tempus quod decidit, illud, oportet,
Acquirat motum celerem minus; at mage longum eſt
Si tempus, videas properantius ire deorſum
In præceps: ideo tectorum a culmine ſummo
Sublimis vitam caſus rapit, oſſaque frangit
Allidens duræ corpus miſerabile terræ:
Lubrica ſed gradiens qui per loca labitur, aut ex
Offenſu, ſe tollit humo citus, incolumiſque,
Pluſque pudor, vulgi circum ridente corona,

Con-

a A pari vi, vel niſu gravitatis; deducit, ipſam æquales æqualibus temporibus effectus gignere, adeoque æqualia æqualibus temporibus advenire velocitatis incrementa; unde fit, ut gravium motus liber deorſum fiat uniformiter acceleratus, & ſurſum uniformiter retardatus. Ubi autem hic *momentum* temporis nominat, intelligit tempuſculum breviſſimum, quo incrementum advenit velocitatis, nam vero, ac indiviſibili momento temporis nulla fit velocitatis acceſſio, ut diximus in notis ſuperioris libri.

Porro cum nova ſemper æqualibus tempuſculis adveniant celeritatis incrementa, & vetera conſerventur a vi inertiæ, ſi ſecludamus reſiſtentiam aeris, vel in planis inclinatis frictionem etiam, aut quidpiam aliud, ut ſi in vacuo ſpatio motum fieri concipiamus, patet computatis temporibus in deſcenſu ab initio motus, in aſcenſu ad finem, fore velocitates totas, ut tempora ipſa.

Hinc nimirum creſcente eo tempore creſcit velocitas, unde etiam fit, ut caſus ex alto præcipitem ruinam, & membrorum confractionem ſecum trahat, ex humili plerumque innoxius ſit. Velocitas nimirum augetur in ipſo deſcenſu.

Contriſtat, quam, quem ſentit per membra dolorem.
Extemplo [a] parium conſtans hæc mobilitatis
Incrementorum ratio deducere poſſit
Te facile, ut videas, ſpatium, quod tempore certo,
Libera deſcendant ſi corpora, carpitur, eſſe
Prorſus dimidium ſpatii, quod tempore eodem
Conficerent eadem conſtanti concita curſûs
Impete, quo lapsûs ſe in fine illius agebant:
Scilicet aſpicies, alte ſi quattuor ulnis
Suſtollas ebur, & demittas deinde globoſum,
Sic ut (contigerit ſubjectæ cum ſola terræ)
Illa, qua cecidit, plano ſuper aſſere volvi
Mobilitate queat ſervata, & ſemper eadem;
Quod faciet, lapsûs ima ſi in parte revolvi
Incipiat ſe per declivia, at uſque ſupina
Illa magis, celeri fugiat qua impune volatu,
Aſpicies, inquam, non quattuor, ut prius, æquo
Tempore, at octonas curſum proferre per ulnas,
Majorique viæ duplo contendere tractu,
Quandoquidem duplo quoque major mobilitas eſt
Ultima mobilitate, cadens quam corpus habebat
Temporis in medio momento; ut tempora nam cum
Creſcat mobilitas, media eſſe in tempore debet
Dimidio; at lapſus metitur corporis ille
Tantum intervalli, quantum, ſi mobilitate
Hac media fieret conſtanti, & ſemper eadem.

Per

[a] Ex æquabili ſollicitatione, & velocitatis incremento infert hoc theorema: corpus grave libere deſcendendo dato quovis tempore ab initio motus computato conficit dimidium ejus ſpatii, quod conficeret, ſi toto eo tempore haberet velocitatem, quam habet in fine ejuſdem temporis. Id theorema demonſtratum jam eſt in ſupplem. lib. 1. ubi de motu uniformiter accelerato: hic autem ipſum Noſter prius experimento comprobare, docet, tum ratione etiam, quæ facile percipi poſſit, demonſtrat.

Experimentum eſt hujuſmodi. Demittatur corpus ex aliqua altitudine: ulnas 4 nominat Noſter, ſed quo major altitudo fuerit, eo melius experimentum ſuccedet: curandum autem, ut prope finem motus verticalis per curvam continuam deflectatur ad horizontalem. Deflectio per curvam continuam neceſſaria eſt, ne quid de velocitate jam acquiſita imminuatur, ut imminueretur, ſi in aliquo angulo deflecteretur motus, de quo inferius agendum erit, atque idcirco addit *qua impune fugiat*: obtinetur autem facile per canalem primo quidem rectilineum, tum verſus finem curvilineum, ſed curari debet, ut perquam exiguam altitudinem addat curvatura,

Perfacile * hoc e fonte queas deducere porro;
Cum per inane cadit corpus, celeratque deorſum,
Incipiens motùs a primo protinus ortu,
Tempora ſi numeres æqualia; tempore primo,
Quantum erit, ut ſpatii peragatur, deinde ſecundo
Tripliciter ſpatii tantundem fiat, oportet;
Quandoquidem primo finito tempore crevit
Tanto mobilitas labentis corporis auctu,
Ut, ſi præterea nihil adjiceretur, eadem
Iret per duplex, ut diximus, intervallum
Corpus idem; ſed item, quo poſſit currere ſolo
Simplex per ſpatium, ſuperadditur a gravitatis
Ictibus aſſiduis, in primo tempore factum
Ut fuit; idcirco ſpatium tranſcurret utraque

Ter-

ra, ne velocitas per novum deſcenſum illum curvaturæ ipſius augeatur ad ſenſum. Tum vero motus in plano horizontali fiet æquabilis, & ſi notatum fuerit tempus, quod impenditur in deſcenſu, & notetur intervallum, quod motu æquabili in plano horizontali conficitur eodem tempore, cum illa utique velocitate, quæ acquiritur in fine deſcenſus, invenietur ſemper duplum altitudinis ipſius, unde conſtabit theorema.

Ratio, quam innuit tantummodo, eſt hujuſmodi. Quoniam velocitas perpetuo æquè creſcit, in medio temporis momento ita erit media, ut ſi aſſumantur bina quævis tempuſcula æqualia æquè ab eo diſtantia, quorum idcirco alterum æque diſtabit ab initio, ac alterum a fine, velocitas in altero tantum deficiet a velocitate illa media, quantum illam excedet velocitas in altero; ac proinde & ſpatiolum illa ſua velocitate confectum priore tempuſculo tanto erit minus illo ſpatiolo, quod media illa velocitate conficeretur eodem tempuſculo, quanto majus eodem erit ſpatiolum ſua velocitate confectum tempuſculo poſteriore, adeoque bina ejuſmodi ſpatiola ſimul æqualia erunt binis ſpatiolis, quæ iiſdem binis tempuſculis percurrerentur media illa velocitate. Cumque id quidem omnibus tempuſculorum binariis commune ſit, ſumma omnium ſpatiolorum, ſive ſpatium toto illo tempore confectum æquale erit illi, quod conficeretur, ſi toto eo tempore habita fuiſſet velocitas illa media, cujus velocitatis cum ultima velocitas reſpondens ultimo temporis momento ſit dupla, ſpatium, quod hac ultima velocitate conficeretur motu æquabili, duplum erit ſpatii, quod motu uniformiter accelerato conficitur eodem tempore.

a Hinc facile eruit celeberrimum deſcenſum illum per numeros impares. Si nimirum grave libere deſcendens ſpatium quoddam percurrat quodam tempore computato ab initio motus, ſecundo ejuſmodi tempore conficit tria ejuſmodi ſpatia, tertio quinque, quarto ſeptem, & ita porro, per numeros impares. Nam ſi dicatur unus velocitatis gradus ea velocitas, quam corpus acquirit in fine ejus temporis, & ſpatium primo tempore

Tergeminum a cauſa; ſed tantum mobilitatem
Acquiret geminam, per quattuor intervalla
Pergere poſt alio qua ſola tempore poſſet;
Sola tamen non eſt, quoniam novus advenit ictus
Continuò gravitatis, eo ut delabier uno
Per ſpatium poſſit ſimplex; quo protinus illis
Quattuor adjuncto conſiant quinque, neceſſe eſt;
Poſt ſeptem, poſt deinde novem; ſic impare creſcent
Decurſi numero pro quovis tempore tractus.
Et [a] veluti ramus de ramo gignitur alter,
Atque alter ſeſe poſt hunc, alterque propagat
Alte diffuſis foliis, lateque vireſcens;
A vero pariter certo ſic ordine verum
Exit, & hinc aliud quoque, ſupremumque nec ullum eſt,

pore factum unum ſpatium; ſolo illo velocitatis gradu, ſi nihil præterea gravitas ageret ſecundo tempore, conficerentur ſpatia duo juxta theorema præcedens: agit autem gravitas tantundem ſecundo tempore, quantum primo, & eadem velocitatum incrementa producit, igitur accedet tertium ſpatium ob hæc continuata nova incrementa, & fient ſpatia tria. In fine ſecundi temporis jam duo erunt velocitatis gradus, quibus ſolis debebuntur tertio tempori quatuor ſpatiola, cum ſingulis duo debeantur, & quintum accedet ob continuatam gravitatis actionem, ut acceſſit tertium in ſecundo; atque ita porro agente ſemper gravitate æqualiter, & per ſingula tempora accedentibus ſingulis novis velocitatis gradibus, quovis ſequenti tempore accedent duo ſpatia primo æqualia, & numeri impares habebuntur.

a Satis idonea ſimilitudine utitur ramorum, qui alii ex aliis derivantur ordine, qui poſſit in immenſum etiam excreſcere, ſi ſatis ſucci radices ſufficiant, donec ad frondes deveniatur, & folia, ad oſtendendam veri ex vero derivationem tam multis theorematis fœcundam iterum quaquaverſum fœcundis, ut nullus omnino deducendi ſit finis.

Theorema, quod hic e ſuperiore deducit, eſt hujuſmodi: ſpatia integra a motus initio computata fiunt, ut quadrata temporum: & quadrata ipſa elegantiſſimè generaliter exprimit, cum dicit *toties tot*; cum nimirum quadratum numeri ſit numerus toties acceptus, quot unitates ipſe continet, ſive per ſe ipſum multiplicatus. Porro ipſum theorema evincit per inductionem a numeris imparibus ſumptam, quorum ſummæ ab unitate inchoatæ quadratos numeros efficiunt, ſic 1, & 3 efficit 4, & 1, 3, 5, ſunt 9, ac 1, 3, 5, 7, ſunt 16, nimirum bis duo, ter tria, quater quatuor, & ita porro. Generalem hanc numerorum proprietatem eſſe, notiſſimum eſt, & admodum facili methodo id ipſum in ſupplemento demonſtrabo.

Addit, menſuram eorum ſpatiorum haberi poſſe etiam ex velocitate. Cum enim velocitates ſint, ut tempora, & ſpatia, ut quadrata temporum, erunt ipſa itidem, ut quadrata veloci-

cita-

Ex quo non itidem produci plurima poſſint.
Cenſendis ergo in ſpatiis quam diximus eſſe,
Imparium ratio numerorum nos ea ducit
Ad noſcenda ſimul multa intervalla viarum,
Si percurſa velis ab origine noſcere prima:
Nam quoniam primo ſpatium fit tempore ſimplex,
Tempore ſed triplex alio; exit tempore duplo
Et ſimplex, & item triplex; quapropter eodem
Bis duplum eſt ſpatium; ſi jungas quinque, ſequenti
Tempore quæ fient; ter erunt tria tempore toto
Hoc triplici intervalla, quaterque quaterna repente
Temporibus quatuor prodibunt: proinde valebis
Intervalla viæ capere ipſo a tempore lapſùs,
Tempora ſi quot erunt, toties tot ſumere pergas
Decurſos tractus ſpatiorum: quibis eoſdem
Ex ipſa pariter metiri mobilitate,
Nam mutato æque mutari hanc tempore dixi;
Proin ea in his faciet, faciunt quod tempora, rebus.
Quare ſi centum pedibus locus altior extet,
Unde ruat corpus, quam quo deſcenderat ante,
Ad terram decies velociùs accidet imam,
Impendetque decem in tranando tempora inani.
At jacias certa ſi mobilitate deorſum
Impellens recta ad terram grave corpus, oportet,
Quæras, illa forent loca quam ſublimia, corpus
Unde cadens ipſa hac ſe mobilitate tuliſſet:
Omnes tum poteris, qui fiant, noſcere motus
Scilicet, ex illis ſi fingas ante quieta
Incœpiſſe locis per ſeſe pondera labi.
 Alta queas aſt ut loca non inquirere fruſtra,
Scire licet decies in ſexta temporis ejus
Parte, quod unius decies pars ſexta ſit horæ
Per ſe lapſa pedes ſemper decurrere deorſum
Pondera ter quinos prope, quos tuus accola novit,
Sequana, regalem tumidus qua præteris urbem.
Propterea quæ tum concreſcit denique tali
Mobilitas ſpatio confecto, deinde maneret

Si

citatum, unde conſequitur illud e contrario velocitates eſſe, ut radices ſpatiorum, ſive altitudinum, e quibus grave libere cadit, adeo ut ex centuplo majore altitudine corpus decidens velocitatem acquirat decuplo tantummodo majorem, cum decies decem ſint centum, & proinde ipſius centum radix ſit decem.

Si conſtans, duplex illo ipſo tempore ferret
Corpora per ſpatium, nimirum adjungeret unum
Percurſis pedibus ter denis, rurſus & unum.
Jam, quacumque velis, pro certa mobilitate
Noſſe queas, quantum ſuſtolli corpora par ſit,
Acquirant illam unde cadentia mobilitatem.
Sin contra, quæcumque velis, loca certa cadenti
Des lapidi, incertam, quantum concreverit illis,
Mobilitatem itidem deprendes, quæque, neceſſe,
Abſumantur uti labendo tempora: certa
At ſtatuas demum ſi tempora, & alta valebis
Noſcere, quantum opus eſt, loca, mobilitatis & augmen
Prendere ſupremum, perducere quo rationum
Te vis nempe queat, quas paulo oſtendimus ante.
Has [a] etiam præter rationes, res oculis eſt
Sæpe fidelibus hæc ſubjecta, repertaque, qualem
Monſtrabat ratio; multi dum turribus altis
Projicerent lapides, vel plumbi pondera deorſum,
Signatamque viam, & ſervarent tempora quæque;
Semper in his etenim ratio eſt tutiſſima rebus,
Si comes incedat fido experientia ſenſu,
Et ferat auxilium perſæpe, & fulciat ægram;
Quæ ſi abſit, neque nos rebus ſubmittimus ipſis,
Naturam cupidi dum quærimus; unde queamus
Verum haurire? An mens ipſa ex ſe cudere cœptet,
Veraque conſtituat, quæ finxerit, in numeroque,
Quæ conſtant, rerum ſtultè ſibi credula ponat?
Sic fuit, ut fama eſt, olim, de marmore qui cum
Finxiſſet trifidos jaculantem e nubibus ignes
Ore fero, horribilique Jovem, quem dira Gygantum
Seditio flammante tonantem armaverat ira,
Terreretque Dei proin vulgi pectora imago;
Demum opus ipſe etiam, quod rupe excidit inerti,
Formidare ſuum paulatim cœpit, & alta
Nube ſupercilii arceri, atque abſiſtere longe;
Quippe videbatur vibrari magna videre

[a] Experimentis hæc omnia comprobata eſſe, ait, quibus ſemper fulcienda ratio, & confirmanda ſit, ne ea, quæ nos nobiſmetipſis confinximus, fortaſſe a vera ſint Naturæ indole prorſus aliena, & noſtrum opus confictum, pro vero opere habeamus, ut olim ſculptorem quendam, cum videret ingentem toti vulgo terrorem incutere Jovis fulmen jaculantis ſtatuam

Jactu brachia fulmineo, atque audire tonans os,
Quod [a] ſupereſt, eadem contraria cuncta videbis
Illis, quæ docui, fieri, cum corpus in auras
Recta projicimus ſurſum, quia vertitur ordo,
Tranſit in aſcenſum deſcenſus; proinde ubi motus
Incipiebat, & aſſidue celerabat eundo;
Aſſidue tardans ibi deſinit, æquaque lapsùs
Incrementa prius quæ dixi, prorſus in æqua
Decrementa abeunt; quapropter, ut ante, neceſſe eſt,
Evolat in nubes cum cornu emiſſa ſagitta,
Mobilitate ſua ſtadium ſi permet unum,
Mobilitate eadem gemina bis dupla feratur
Per ſtadia, & geminum ſaliat per tempus; at iſtud,
Illaque ſi triplex ſit, ter per terna volabit.
Scilicet [b] hæc animo cum cerneret ille ſagaci,

Plus

tuam a ſe effictam, ipſum etiam paullatim terrore correptum, tanquam ſi verus Jupiter coruſcantem ignem vibraret, Galileus Dialogo 2. commemorat, quod quidem exemplum ipſe fortaſſe excogitavit, & confinxit.

Hujuſmodi experimenta primus omnium Galileus inſtituit, tum poſt ipſum alii quamplurimi, quos inter ex editiſſima Bononienſi Aſinellorum turri Ricciolius, experimento ſuccedente ſemper, dummodo ſatis ingentia pondera demitterentur, & ex altitudine ſatis edita, ne aut aeris reſiſtentia, cujus hic nulla habita eſt ratio, rem ſatis turbare poſſet, aut nimis exiguus tractus celeritate ipſa deſcenſus computationem temporum cum ſpatiis conferendorum adimeret.

a Expoſitis præcipuis theorematis, quæ ad liberum gravium deſcenſum ſpectant, ea innuit, quæ pertinent ad aſcenſum, quæ quidem eodem prorſus modo ſe habent, ſi tempora, & ſpatia non ab initio motus computentur, ſed a fine, ac velocitates aſſumantur debitæ, initio temporum quorumcunque pro iis, quæ aſſumebantur in fine. Nimirum ſi in plures æquales partes dividatur tempus uſque ad motus finem, poſtremo tempore percurretur dimidium ejus ſpatii, quod percurretur motu uniformi cum velocitate, quæ habetur initio. Spatia percurſa temporibus ante ultimum decreſcent in ſerie numerorum imparium, cujus ultimus terminus ſit unitas ultimo tempori debita. Spatia integris percurſa temporibus uſque ad finem aſcenſus computatis erunt, ut quadrata ipſorum temporum, ſive ut quadrata velocitatum, quæ habentur initio eorumdem temporum.

Horum omnium demonſtratio eſt facilis per regreſſum, cum per eoſdem gradus velocitates in aſcenſu deſtruantur, per quos gignebantur in deſcenſu. Ex hoc autem poſtremo theoremate conſtat, corpus projectum ſurſum cum dupla, vel tripla velocitate debere ad quadruplam, vel noncuplam altitudinem aſcendere.

b Ex theoremate ſuperiore occaſionem arripit pertractandi quæſtionem de Viribus Vivis tanta animorum contentione agitatam ubique gentium.

Lei-

Plus aliis quo ſe tollit Germania cive,
Cuique fuit tecum præclarum, haud regna, nec aurum
Propter, quæque ſolent magnos committere reges,
Certamen Nevvtone, repertum propter at ingens,
Vaneſcentia quo rerum diſcrimina adimus,
Orbe duas ſciſſo in partes; cum cerneret ergo
Non jam per duplex geminata mobilitate
Ire intervallum grave jactum corpus in auras,
Sed per bis duplex; certis opus eſſe putavit
Viribus, ignotis prius, & quas dicere vivas
Collibuit, quibus, in motu cum corpora perſtant,
Pollent, & quandam tum vitam agitare videntur,
Exanimiſque trahunt proprios quæ a viribus ortus;
Exanimas alias nam vires credidit eſſe,
Corpora nituntur queis ſollicitata moveri,

Nec,

Leibnitius eam invexit primus, occaſione arrepta ex hoc ipſo aſcenſu uniformiter retardato. Cum videret corpus cum dupla, vel tripla velocitate projectum ſurſum, aſcendere ad altitudinem quadruplo, vel noncuplo majorem, cenſuit diſtinguenda eſſe bina virium genera, illarum nimirum, quæ etiam ſine motu habentur, ut eſt vis gravitatis, vis magnetica, vis elaſtica, vis electrica, quæ puram preſſionem gignunt, ubi oppoſitis viribus impeditur motus, quas idcirco vires mortuas appellavit, & illarum, quas in corpore motum habente aliquem, & aliquam velocitatem admittendas eſſe, cenſuit, quarum effectus eſſet etiam ille quadruplus, vel noncuplus aſcenſus, reſpondens nimirum velocitatum quadratis, quas quidem *vires vivas* nominavit. Priores illas vires æſtimandas cenſuit a motu, quem dato tempore gignunt, nimirum a maſſa, in qua ſunt, ducta in ſimplicem velocitatem, poſteriores vero a maſſa ducta in quadratum velocitatis. Quadratum autem cujuſplam rei exprimit Noſter per phraſim *in ſe repetita*, ut nimirum toties accipiatur, ſeu repetatur, quot unitatibus ipſa exprimitur, quam phraſim in toto deinceps opere retinebit.

Porro Leibnitium innuit, cum eum inter Germanos eminere, ait, celebrem etiam contentione cum Newtono, quæ Germaniam univerſam cum Anglia commiſit acerrime. Agebatur autem de prima inventione ſublimioris calculi, quem Angli appellant fluxionum methodum, directam, & indirectam, ceteri autem paſſim calculum differentialem, & integralem. Id controverſiæ diuturnæ argumentum expreſſit Noſter per illud *vaneſcentia quo rerum diſcrimina adimus*; verſatur enim is calculus circa quantitates, quas concipimus infinitè parvas. Newtonus eas appellavit quantitates primo naſcentes, & ultimo evaneſcentes, Leibnitius differentias quantitatum variabilium infiniteſimas. Utraque methodus eodem demum recidit, ac ea videtur quidem uſus Newtonus multo ante Leibnitium, ſed eandem Leibnitius etiam ipſe per ſeſe inventam, ante quam Newtonus comperta ſua publici

Nec, moveantur uti, ſit opus, ſed ſæpe quieſcunt:
Hoc genus, eſt gravitas, tellure jacentia deorſum
Pondera quæ pellit, vel quæ magneſia ferrum
Pellicit ad ſeſe vis, vel cui reddimus ipſo
Nomen ab electro, vel qua reſilire repente
Corpora preſſa velint contra, pugnantque retenta:
Ille has metitur vires & corpore, quantum
Nempe ipſum eſt, &, quæ ſubito exorietur in auras,
Omnia ſi tollas obſtacula, mobilitate.
Æſtimat at vires, quas fingit vivere, quantum eſt,
Corpore, & in ſeſe repetita mobilitate;
Uno in corpore uti, duplo quod forte feratur
Ocyus, aut triplo, vis incrementa receptet
Bis gemina hæc vivens, triplicive ter ordine creſcat.
Fama [a] volat, totum nova nomina ſpargit in orbem,
Auctoremque refert; accedit protinus olli
Judiciis pars magna ſuis; creditque, probatque,
Ut reperiſſe, quod eſt, illum, haud finxiſſe reatur.
Prima manus & ſponte dedit Germania victas.
Obſtiterunt contra multi, excitique Britanni,
Pugnaceſque ſuas Galli junxere phalanges,
Et protecta Ducis clypeo gens utraque pugnat
Quæque ſui, magniſque audaces auſibus inſtant,
Quamque ſtruunt alii, certant evertere molem.
Italia inviſam non deſerit hic quoque ſortem,
Et ſequitur ſua fata; ſuas utrinque valentes
Jungit opes diviſa, alienoque excita pugnat
Pro decore, hinc atque hinc nullos latura triumphos.

Quid

blici juris faceret, cum Bernoullils fratribus mirum in modum provexit. Incredibile autem dictu eſt, quantos progreſſus hujus calculi ope, quam brevi habuerit univerſa Matheſis, ut adeo non leve, ſed graviſſimum extiterit totius controverſiæ argumentum.

a Mirum ſane, quam multas hujuſmodi quæſtio de Viribus Vivis contentiones excitavit, aliis ipſas menſurantibus a maſſa, & ſimplici velocitate, aliis a maſſa, & velocitatis quadrato. Pro quadrato velocitatis Leibnitiani omnes in Germania ſteterunt, pro ſimplici velocitate Carteſiani in Gallia, Newtoniani in Anglia. Apud Italos diviſa ſtudia, gentis more, quæ ubi etiam bellum ingruat, in partes abit diverſas. Singulos nominare infinitum eſſet, aliquos, quos Noſter verſibus innuit, nominabimus paulo infra.

Erit autem hæc digreſſio quædam, qua Galileanæ de motu gravium doctrinæ ſeries interrumpetur, at omnino non inepta, nec importuna, cum ibi fiat, unde omnis hæc controverſia originem duxit.

Quid tamen in vero numerus, regioque faventum
Ulla facit? præclara juvent quid nomina gentis?
At quoniam in partes magno fuit undique motu
Diſceſſum, & validis certatum viribus; eſſe
Hic operæ pretium noſtra divertere paulum
A gravitate rear, tantoſque referre tumultus
Doctrinæ, bellique novum genus, atque furores
Indecores animis ſublimibus: a gravitate
Præſertim cum ſint ea cuncta exorta, videntur
Ipſa locum noſtro hic in carmine poſcere, nec ſe,
Unde fluunt, propria disjungi ab origine velle.
Ergo [a] novis, genus hoc, contra qui viribus obſtant,
Id ſpatium, ſurſum quo ſcandunt corpora, vivis
Viribus inclamant non reſpondere, neque eſſe
Propterea has vires a mobilitate putandas,
Ut ſpatium, in ſeſe repetita, at ſimplice tantum,
Et ſimul a toto quoque tempore, corpora ſurſum
Quo tum conſcendunt; quoniam quo corpora major
Tollet mobilitas, hoc plus erit in ſaliendo
Temporis inſumptum. Quod ſi diverſa vigeret
Lex gravitatis, ut hæc non eſſet par ſibi ſemper
Scilicet, at quantum vacuas procul iret in oras
Terrai a medio fugiens lapis, hoc magis ipſum
Cogeret ad medium gravitas, æqualia ſemper
Tempora tum quoniam fluerent in quolibet illo

Aſcen-

[a] Refert Antileibnitianorum reſponſionem ad argumentum deſumptum ab aſcenſu gravium expoſito. Dicunt non eſſe menſurandas vires vivas ab illo aſcenſu, qui ſit earum effectus: habendam enim eſſe rationem temporis, quo idem effectus ſit. Corpus cum dupla velocitate ſurſum projectum ad quadruplam altitudinem aſcendit duplo tempore. Quid mirum, inquiunt, ſi dupla vis duplo tempore quadruplum effectum gignat, ut bini foſſores binis diebus quadruplum opus conficiunt ejus, quod unicus unico die? Hinc nimirum fieri, ut in lege gravitatis conſtantis tantummodo ad quadruplam altitudinem aſcendatur, in qua & duplum tempus impenditur. At ſi vis gravitatis ſit major, vel minor, prout majores, vel minores ſunt diſtantiæ a puncto infimo; tum vero deſcenſus ex quavis altitudine fiunt eodem tempore, & ex dupla altitudine dupla tantum velocitas acquiritur, ut oſtendi in ſupplemento libri primi, & infra etiam videbimus, ubi agetur de pendulis; ac proinde corpus in ea gravitatis hypotheſi cum dupla projectum velocitate ad duplam tantummodo altitudinem aſcendit eodem tempore; unde ſit, ut hic, ubi tempus eſt idem, effectus velocitatibus ſimplicibus reſpondeat, quem idcirco aptiorem putant ad virium æſtimationem.

Aſcenſu; tantum ſpatia ipſa increſcere, creſcit
Quantum mobilitas, non plus, opus eſſe videres.
His tamen [a] haud alii, quos concitat æmulus ardor,
Demittunt acres animos, victique recedunt;
Sævius inſurgunt contra, majoraque cogunt
Subſidia audaces, opibuſque recentibus armant,
Inſtaurantque acies. Creta, aut pinguedine terram
Conſtratam feriunt minus alta, magiſque cadente
Per loca vel plumbo deorſum, ferrove rotundo.
Protinus aſpiciunt impreſſam a pondere foſſam,
Quæ tanto ſit major, & in latera amplior omnia,
Unde globus cecidit, quanto fuit intervallum
Altius; in ſeſe repetita, ut diximus ante,
Quam nos proin ſit opus metiri mobilitate:
Æqua erit idcirco cauſæ menſura quoque ejus,
Per quam, nimirum vivam vim, foſſa cavata eſt.
Præterea volvens per terram ſe grave pondus,
Efficiunt, multa æra valenti ut verbere pulſet,
Æra in lamellas tenuata, plicataque multis
Flexibus; inflecti nam quattuor illa repente,
Mobilitate ubi ſint geminata impulſa, tuentur,
Ut fuit inflexum prius ipſa a ſimplice ſimplex:

Qua-

[a] Tria hic argumenta Leibnitianorum conjungit, quæ deſumuntur a foveis in argilla, vel ſebo excavatis, ab elaſtris compreſſis, a conſervatione virium vivarum. Sunt & alia plura, quorum præcipua cum aliis multis, quæ ad hanc quæſtionem pertinent, exponam in ſupplemento. Hic ea tantummodo perſequar, quæ Noſter proponit.

Primo quidem in mollem materiam idem globus ex diverſis altitudinibus demiſſus eſt, & notata magnitudo foveæ, nimirum totum ſpatium in longum, latum, & profundum, quod contuſione illa excavatur, ac habet formam ſegmenti ſphæræ materiæ dimotæ locum ſubeuntis. Ex foveæ hoc pacto menſuratæ inventæ ſunt proportionales altitudinibus: globus nimirum ex quadrupla altitudine cadens, quadruplam foveam excavavit. Porro altitudines illæ ſunt juxta expoſitas leges Galileanas proportionales quadratis velocitatum in illo caſu acquiſitarum, cum quibus velocitatibus globus ille foveas excavare incipit, adeo ut ex quadrupla altitudine dupla tantummodo velocitas acquiratur. Quare foveæ ſunt, ut quadrata velocitatum; unde inferunt, vires vivas, quarum effectus ſint ipſæ foveæ, eſſe itidem, ut ſunt velocitatum quadrata.

Secundò globi cum diverſis velocitatibus projecti ſunt contra plura elaſtra, & globus, qui unum elaſtrum compreſſit uſque ad certam diſtantiam cum quadam velocitate in ipſum incurrens, idem cum dupla velocitate æque compreſſit quatuor elaſtra, cum

mi-

Quapropter tum bis geminatam vim quoque rentur.
Nec minus exultant, cum queis reſilire poteſtas,
Corporibus faciunt pulſari corpora; namque
Si tum particulæ cujuſvis mobilitates
In ſeſe repetas; omnis quæ prodit, oportet,
Summa eadem ſit poſt conflictus, quæ fuit ante.
Certum hinc indicium contendunt, ſcilicet æquas
Servari vivas vires, & ſemper eaſdem,
Harum proinde petunt a mobilitate vigorem,
In ſeſe ſed quam repetas, ut diximus ante.
Hæc ſuper * agglomerant etiam permulta; ſuaſque
Multiplici circum vallant velut aggere vires.
Deſpiciunt alii contra molimina tanta
Protinus, atque levi turbant hæc omnia niſu,
Sive, quòd id nimium cupiunt, turbare videntur.
Hic etenim non vim dicunt ſatis eſſe tueri
Ut ſolam, ſolumque, ſubinde quod exit ab illa;
Aſt opus eſſe etiam, quanto quid tempore fiat,
Inſpicere, atque moras cauſæ cognoſſe vigentis.
Cum faciem pila lapſa ſuam, argillave tenaci,
Unguine vel molli ſuper imprimit, æreve flecti
Cogit ob impulſum, revolutum per ſola pondus;

tripla novem, & ita porro. Inferunt igitur vis, quæ elaſtra comprimit, reſpondet quadrato velocitatis, non ſimplici velocitati.

Tertio utcumque globi elaſtici in ſe invicem incurrant, productum ex quadrato velocitatis in maſſam invenitur idem poſt colliſionem, quod erat ante. Id demonſtratur in ſupplemento, ubi de colliſionibus elaſticorum corporum agitur. Inferunt igitur eſt aliquid in corporibus reſpondens maſſis ductis in quadrata velocitatum, quod illæſum remanet, & ab uno ad aliud corpus migrat, vis nimirum viva, quæ conſervatur.

a Sunt & alia, ut monui, quæ in ſupplemento perſequar. Interea proponit primo loco reſponſionem Antileibnitianorum ad prima duo experimenta, quæ eſt eadem, ac pro gravium aſcenſu, nam tertium nulla reſponſione indiget, cum poſſit factum ex maſſa, & quadrato velocitatis conſervari in corporibus perfecte elaſticis, quin idcirco ulla ſit vis, quæ illi facto reſpondeat, eo effectu pendente a ſola natura elaſticitatis, & ab actionis, ac reactionis æqualitate, per quas ſolas in ſupplemento demonſtratur. Sed de hac conſervatione hic iterum in ſupplemento ipſo innuam ea, quæ pertinent ad rem præſentem. Ajunt autem elaſtra flecti, mollem materiam comprimi longiore tempore ab illo globo, qui cum majore velocitate devenit: adeoque non eſſe mirum, ſi effectus magis augeatur, quam in ratione vis ipſius, cum dupla vis duplo tempore quadruplum debeat effectū producere. Huic

Mobilitas ſi vividior ſit, & impetus ejus,
Tempus item quoque erit productius, & mora major,
Ipſam qua ſit opus paulatim mobilitatem
Illo ex offenſu minui omnem, & proinde perire.
Propterea cum vis mage longo obſtacula vincet
Tempore, majus erit, quod ab illa prodit in auras.
Sic & Aratores gemini, cum jugera ferro
Invertunt, duro geminis ſi forte diebus
Inſudent operi, ſubigent plus tum quater arvi,
Unus idem quam ſi per lucem exerceat unam;
Nec cujuſque ideo vis ipſo a tempore creſcit.
  Haud minus aſt immota gradu pars altera perſtat,
Utque nihil rebus facientia tempora in iſtis
Rejicit, & ſolis, quocumque ea tempore fiant,
Credit ab effectis cauſas debere putari.
Sic & ſuppoſitis humeris qui pondera transfert,
Ut procul advectis cum mercibus advenit urbes
Aucta ratis Batavas, & vocibus exonerantum,
Et ſubeuntum humeris, onera & pretioſa ferentum
Certatim portus late, ripæque reſultant;
Ego via qui fert, inquit, grave pondus eadem,
Ipſe gradu cunctante ferens eat, aut properante,
Impendet vires æquas, parilemque laborem.
  Hoc at majores contra ſub mole videntur
Abſumi vires, quo tardius itur, onuſque
Plus humeros premet, & nervos intendere coget,
Et mage proinde viri laſſari membra ferentis;
Qui pariter ſub eo immotus ſi pondere perſtet,
Ingemit, & longo vix tempore ſuſtinet artus.
Denique cur ea vis haud exoriatur, ut omnes
Res in natura, quarum ortus reſpicit unà
Cauſam ipſam, cauſæque moras, & tempus agentis?

Cur

Huic ſolutioni difficultatis reponunt Leibnitiani, nullam temporis habendam eſſe rationem: vim impendi in effectu gignendo, quæ a ſolo effectu æſtimari debeat; ut cum bajulus humeris onus defert per quoddam ſpatium, temporis conſiderationem, dicunt, ineptam eſſe, ſi vires in ea translatione impenſas requirimus.

Adverſarii contra excipiunt, in eo ipſo exemplo temporis diuturnitatem maxime computandam eſſe, cum etiam ſine motu defatigetur, qui onus ſuſtineat. Ubique autem, ubi effectus cauſarum æſtimandi a cauſis ſint, haberi rationem cauſæ ipſius, & temporis, quo agit: idem igitur hic etiam præſtandum.

Verum quo potiſſimum pacto temporis

haben-

Cur ſibi Natura hìc non conſtet, ut omnibus una
Lege tenax in rebus, ut ipſa in mobilitate?
Cur ita non generet vires, non deſtruat ipſas?
His [a] aliiſque diu, genus hoc, contenditur armis
Hinc, atque hinc, & mille volant projecta per auras
Tela, & mille viris miſcentur fortia fruſtra
Prælia: præcipue tot nomina cernere pulchrum eſt
Magna, tot heroas lato concurrere campo,
Et nimium ancipitis belli tentare pericla
Undique collectos varia de gente per orbem,
Et conjuratos, media velut Aulide Reges.
Hic geminos etiam videas, capita ardua, Fratres,
Ut quondam Atridas, mediiſque in millibus ardet
Irrumpens non jam pelta protecta, nec enſe,
Ut fuit ad Trojam, ſed vi rationis, & uſu,
Altera Penteſilea, viroſque impellit, & urget
Præſidiumque ſuis, rebuſque labantibus ingens.
Quantam fœmineo virtutem in pectore verſat?
Quantum audet? Quantum pulchro irritata furore eſt?
Ne Fortes, ne tanta animis committite bella;
Vincat amor veri, & diſcordia pectora jungat.
Nec [b] tam difficile eſt tantas diſſolvere lites,
Tollimus e medio ſi vis nova nomina vivæ:
Nam quæ nil peragit, nec proin queat utilis ullas
Eſſe ad res; illi cur vitam agitare ſinamus?
Scilicet a ſola pendere hìc omnia noſcas
Mobilitate: hac tu percepta in corpore quovis
Percipies etiam ſpatium, quo debet id ipſum
Corpus momento quocumque in temporis eſſe:
Hinc venit & tractus, per quem tum nempe ſalitur,

habenda ſit ratio in iis experimentis, ut & in aliis aliquantiſper diverſis, videbimus in ſupplemento.

[a] Infinitum eſſet, ut ſupra monui, Auctorum catalogum texere: ſatis eſt eos nominare, quos Noſter innuit, Geminos fratres, qui facile agnoſcuntur, nimirum Bernoullios, Jacobum, & Joannem, ſummos viros, qui ſententiam a Leibnitio propoſitam omnium maxime divulgarunt, & confirmarunt. Matronam itidem lectiſſimam *Du Chatellet* nemo non novit, quæ de virium vivarum menſura cum Mairanio ſummi ingenii, ſummæ doctrinæ viro controverſiam habuit, in qua meo quidem judicio Mairanius ipſe omnia Leibnitianarum rationum momenta, quæ ipſi objecta fuerant, penitus diſſolvit.

[b] Meam hìc ſententiam amplectitur, & paucis exponit, quam ego in Diſſertatione de Viribus Viris edidi anno 1745, ubi propoſui litem hanc vel,

Et cava foſſa, & quæ rebus ſunt cætera in iſtis.
Ipſa at mobilitas porro a vi pendet inerti,
Quæ ſervare ſtatum connititur uſque receptum,
Pendet & a cauſis mutare valentibus ipſum,
Exanimas etiam liceat quas dicere vires.
Quapropter ſatis eſt, ſi cum vi jungis inerti
Exanimas vires; aliis nil viribus ultra
Uſus erit, niſi forte velis confingere inanes.
Aſt in reddunda rerum ratione, neceſſe eſt,
Inſpicias, quo tum debet, ne protinus erres,
Ordine mobilitas, ſeu naſci, ſive perire,
Totaque cauſarum noſcas effecta, quot extant.
Sic cum projicitur ſurſum lapis, infinitum
Iret per ſpatium infinito tempore ſcandens
Propter inertem vim, atque impreſſam mobilitatem,
Tempore qua in tractus æquali curreret æquos.
Officit at gravitas ſubito, contraque repellit
Ictibus aſſiduis ſalientem, & decutit omnem
Paulatim ſurgente a corpore mobilitatem.
Quod petat alta lapis, dum profugit, ejaculatus,
Mobilitatis id eſt, atque, unde educitur ipſa,
Cauſarum, ſed quod non ultra aſcendat, & uſque
Pergat, ut incœpit, niſi ſit gravitatis id ipſum,

Cujus

vel *componendam*, vel *dirimendam*, vel *amovendam*, amovendam autem eſſe, cenſui, affirmando *vires vivas in natura nullas eſſe*, cum cenſeam eſſe prorſus inutiles, ad explicanda phœnomena. Ea enim omnia pendent a modo, quo velocitas gignitur ab actionibus potentiarum, quas quidem actiones, ego vires mortuas appello. Ipſam velocitatem, convenit apud omnes, gigni proportionalem vi, quæ agit, & tempori, quo durat actio. Illud omnino eſt evidens; ſi rite notetur ſeries tota velocitatum, quæ generantur, vel deſtruuntur a mortuis viribus, ſive a potentiarum actionibus, computando ipſarum incrementa, vel decrementa a vi, quæ agit, & tempore, quo agit, haberi debere omnium phœnomenorum determinationem, adeoque & explicationem. Nam omnia phœnomena pendent a loco, quem dato tempore occupant omnia materiæ puncta, & ea loca determinantur determinatis punctorum motibus, qui motus pendent a ſola velocitate, & tempore. Velocitas autem ipſa nihil eſt aliud, niſi inertiæ vis a ſtatu indeterminato quodam ad determiatum traducta per omnes circumſtantias, in quibus a Mundi exordio ipſa extiterunt materiæ puncta, ut pluribus oſtenſum eſt, ubi in primo libro de velocitatis idea, & generatione egimus. Quare omnia phœnomena pendent a ſola vi inertiæ, & actionibus momentaneis potentiarum, ac lis de Viribus Viris inutilis omnino eſt, quæ nimirum e phœnomenis dirimi nullo modo poterit unquam.

Porro

Cujus erit, pauſa toties, totieſque ſine ulla
Quæ pellit, pellenſque fugam ſic demetit omnem?
Quæ vivæ jam vi ſuperabunt denique partes?
Sic etiam cum foſſa cavatur, motus in illo
Unguine non tantum producitur, argillave
Dimotis primò magis altis partibus, imis
Deinde per has, queiſcum denſantur deſuper actæ;
Verum etiam quatitur, quod fulcit, totaque tellus
Excipit impulſum. Quare omnes hic tibi motus
Cauſarum ſint tota, opus eſt, effecta ſuarum:
Foſſ1que propterea, quod tanta eſt, pendet ab illo
Ordine, quo motus gignuntur ſcilicet omnes.
Denique ſi ſpectes vario exſilientia ab ictu
Corpora, percipias, opus eſt, ibi vim reparantem
Amiſſam frontis ſpeciem, notamque figuram,
Æquos oppoſitas quæ motus gignit in oras,
His animadverſis per cuncta exempla repente
Diſcurrens, quotquot vario a tentamine ſurgunt,
Solvere tute queas ſine viribus omnia vivis.
Nam me non multam hìc operam conſumere par eſt,
Propoſitiſque tenere procul te rebus, & extra
Ire per ambages varias longumque morari.
Hæc tamen [a], hinc prius ac divellar, me ſine pauca

Ad.

Porro in phœnomeno lapidis aſſurgentis, ait, altitudinem, ad quam aſcenditur, non eſſe effectum vis cujuſpiam vivæ in corpore reſidentis. Quod aſcendat provenit a velocitate, quæ, ſi maneret illæſa, aſcenderet in infinitum percurrens ſpatia æqualia temporibus æqualibus; quod non aſcendat ultra altitudinem quandam effectus eſt gravitatis ea lege paulatim detrahentis aliquid de velocitate, ut totam non extinguat, niſi quadruplo ſpatio abſoluto.

Pro foſſa excavata notat, effectum non eſſe foſſam, ſed motum totius fulchii cum tota terra, qui gignitur ab illo impactu. Foſſæ occaſionem id præbet, quod motus non eodem tempore toti materiæ molli, & fulcro, & terræ imprimatur, ſed primis partibus prius, quæ idcirco accedunt ad remotiores, in quo ſita eſt foſſa: ſit autem acceſſus is, donec omnia ad æqualem velocitatem redigantur, quod non accidit, niſi ubi foſſæ, cæteris paribus, quadratis velocitatum reſpondeant.

Pro omnibus elaſticorum corporum incurſibus, ex quibus plura argumenta peti ſolent a Leibnitianis, illud generaliter præcipit, ut notetur, vim elaſticam ſemper gignere motus contrarios æquales. Horum motuum ſummâ conſideratâ, phœnomena omnia redibunt ad notiſſimas leges, per quas vires mortuæ velocitatem gignunt, ſine aliis viribus vivis.

[a] Duo addit argumenta extrinſeca, quæ evincunt, litem non eſſe de re

qua-

Adjicere, hiſce fidem quæ totam demere poſſint
Viribus, atque animos ab eis avertere noſtros,
Tot nobis patuiſſe putes ulla ſine vivæ
Vis opera omnigeno de motu poſſe reperta
Hactenus, atque ejus nihil eſſe, ut debuit, actum
Auxilio in rebus, ſi rerum exiſteret ipſa
In numero? Qui nos, genus hoc, per plurima duxit,
Quæ canimus, quique hac naturam parte recluſit,
Num vivas vidit, num nomine compellavit
Vires, diſcurrens tamen undique, & omnia vincens?
Deinde tot ingeniis cum tanto tempore earum
Quæratur menſura, neque ortis litibus ulla
Finis adhuc; nonne ambiguis ſtant omnia verbis,
Nil veri quibus eſt, certique ſubeſſe fatendum,
Poſſe nec ipſam rem tantas diſſolvere lites,
Quæ neque ſit rerum in numero, nullamque ſubire
Menſuram valeat, neque jam, niſi ficta, cluere?
Et [a] quoniam docui, quo temporis, atque fugai
Ordine, quo ſpatii pariter grave corpus in oras
Aſcendat rectà ſuperas, rectàque viciſſim
Deſcendat; quali properet nunc, percipe, curſu,
Obliqui jaculamur idem cum tramite motùs.

Nem-

quapiam, quæ in natura ſit, & certam habeat menſuram. Primo quidem tam multa deprehenſa eſſe in Mechanica, a Newtono imprimis, ſine ullo virium vivarum præſidio, quas ne nominavit quidem uſquam. Secundò litem de virium vivarum menſura tamdiu duraturam non fuiſſe in hac mathematicarum diſciplinarum luce apud homines tanta ingenii vi, tanta doctrina præditos, ſi vires vivæ eſſent aliquid in natura exiſtens, & ſuam certam menſuram habens.

Sunt quædam, quæ per principium conſervationis virium vivarum faciliorem ſunt nacta ſolutionem problemata; at ea æque facile ſolventur, ſi aſſumatur illud, conſervari, in perfecte nimirum elaſticis, non aliquid, quod ſit vis viva, ſed factum ex maſſa, & quadrato velocitatis. Quod ſi huic facto tribuere quis velit nomen vis vivæ, & ipſius nominis hanc definitionem aſſumat, ut brevius id ipſum exprimat, haud ego quidem abnuerim, dummodo profiteatur, ſe non aliquod novum Leibnitii inventum expromere, antiquiorum oſcitantiam corrigentis, ſed quorumdam jam cognitorum certæ conjunctioni arbitrarium nomen adjungere, quod ipſum nomen ſi quis alius tribuere velit potius velocitati in maſſam ductæ, eodem utetur jure, & illi priori facto aliud nomen debebit procudere, vel id ſine peculiari nomine efferre per *factum ex maſſa, & quadrato velocitatis*.

[a] Poſt digreſſionem hanc, quæ ad vires vivas pertinet, redit ad motum gravium, & quoniam expoſuit, quid fieri debeat, ubi corpora per rectam verticalem aſcendunt, vel deſcendunt, hic

expli

Nempe a projectu quod iter ſit, & a gravitate,
Tum coit, atque viam via jungitur utraque in unam.
Solo ex projectu corpus cum fertur, oportet,
Æquali properet lapſu, & ſpatia ipſa viai
Non aliter, quam queis properatur, tempora creſcant.
At ſola gravitate probatum eſt poſſe viarum
Non aliter tractus aptari, quam repetitis
In ſe temporibus: quare ſimul utraque cauſa
Si lapidem impellat, ſimul hic parebit utrique,
Curvatoque viæ contendet proinde meatu,
Cujus contingit projectùs ſemita dorſum:
Ac tunc in ſpatiis, jactùs æqualia in oras
Quæ capias, lapſus ſervari temporis æquos,
At prodit removente quod a gravitate, videbis
In ſe temporibus repetitis jungier aptum.
Verum, hujus natura viæ quæ conſtet, & unde
Cognita ſit primùm mortalibus, atque reperta
Ipſa, aliæque etiam ſimul una ab origine cretæ,
Dicendum eſt, quoniam peperere ſagacibus amplas
Notitias animis, nobis erit uſus & harum
Plurimus in rebus clarandis his, aliiſque.
Percipe [a] principio perſtare liquentibus auris

Or-

explicat, quos motus habere debeant oblique projecta, quæ eſt pars altera Galileanæ doctrinæ.

Notat autem Noſter motum corporis oblique projecti componi ex duplici, altero æquabili ſecundum directionem projectionis, altero uniformiter accelerato ſecundum directionem gravitatis, in quorum primo ſpatia reſpondeant temporibus, in ſecundo quadratis temporum.

Hiſce motibus ſimul compoſitis, oritur curva linea, quam Parabolam dicimus, & eſt una e tribus Coni ſectionibus. Ut eam lectori exhibeat, exponit conum, ac ejus ſectiones multiplices, & diverſam ipſarum ſectionum naturam, qua non hìc tantummodo indiget, ſed multo etiam magis indigebit inferius. Horum autem ipſa ſchemata exhibebimus in ſupplemento.

[a] Coni recti originem hìc explicat. Eſt autem conus figura ſolida rotunda, & ex altera parte in apicem deſinens, ex altera circulari baſi inſiſtens per rectas lineas ab èa ad apicem illum ductas, ut meta quædam, in quam formam & ſaccharum ſolent compingere. At hìc conus concipitur ultra ipſam baſim in infinitum productus ex parte altera, ex altera ultra verticem continuatis lateribus geminatus, & itidem in immenſum productus, quos etiam binos conos oppoſitos dicunt: formam autem refert, quam habet horologium conſtans binis ampullis vitreis conicæ formæ in ipſo ſe vertice conjungentibus, ubi minutiſſimus pulvis ex altera in alteram labitur per tenue foramen, & tempus deſignat. Dicitur autem conus rectus, cum vertex mediæ baſi ad perpendicu-

lum

Orbem aliquem, nitida qualem ſignare papyro
Suemus, ubi gemini nodo pendentis ab uno
Pars immota manet, pars circumducitur æris
Altera, & æqualis linquit veſtigia diſci.
Tum ſuper hunc media longe regione locetur
Impendens aliquod, quod finge immobile, punctum,
Unde per immenſos tractus procurrere utrinque
Concipias rectum filum, & ſubtile, rigenſque
Ex adamante velut: tum filum hoc radere fines
Si facias ſe flectentes, circumque ferentes
Orbis, at ut nunquam puncto non hæreat illi,
Includes ſpatium ſub tali denique gyro
Hinc, atque hinc, quod ſi pergas confingere mente
Repletum ſolida natura ſive metalli,
Seu duri libeat lapidis, lignive, neceſſe eſt,
Protinus aſpicias animo conſurgere mole
Ingenti geminas utraque a parte figuras,
Quarum quæque ſuo finitur acumine tenui
In medio puncto, quod tantum nectit utramque:
Inde recedendo paulatim craſſior exit
Utraque, & excurrit ſpatiis latiſſima magnis,
Acquiritque ſuum ſemper magis augmen eundo,
Hæ ſpecie metas, & coniferas cupreſſos
Sejunctæ referunt, conos dixere vocantes.
Ergo [a] horum alterutrum ſi deorſum a vertice ſummo
In-

lum imminet, obliquus, cum ipſe vertex ad latus jacet.

Porro ipſius coni recti geneſim ſic exponit. Concipiatur circulus quidam in plano horizontali ſitus, cujus centro verticaliter immineat punctum quoddam immobile: ſi id ad latus poſitum eſſet, conus obveniret obliquus, ut in ſupplemento dicam, cum rectum tantummodo hic conſideret. Recta quædam linea in infinitum utrinque producta, ſemper tranſiens per punctum illud immotum ita convertatur, ut circulum ipſum perpetuo perradat. Omnino patet, hanc rectam eo motu debere deſcribere ſuperficiem binorum conorum oppoſitorum ſe in illo puncto tanquam communi vertice contingentium, a quo puncto, alter ſurſum, alter deorſum, in immenſum extenduntur perpetuo craſſiores.

[a] Si conus ille inferior ſecetur plano per verticem deorſum demiſſo, patet, ſectiones ejuſmodi debere in ſuperficie deſcribere binas rectas lineas coeuntes in illo communi vertice, & in infinitum utrinque productas. Quod ſi ſectio fiat infra verticem, ſed parallela ſit, ſive æquidiſtans baſi illi circulari, ipſa circulum itidem deſignabit. Haſce hic ſectiones, quarum natura etiam ſine cono jam conſtat ita, ut per eas ipſius coni ideam habeamus, hic non conſiderat, nec nomine Conicarum ſectionum, quarum in re præſenti eſt opus, intelligit.

Incipiens ſectum reputes; in partibus hinc, atque
Hinc geminis facies exſurget plana, duobus
Intra limitibus concluſa, receptaque rectis,
Qui coeunt una de parte in acumine puncti,
Ultra & producti flexus ad verticem, ut ajunt,
Oppoſitos formant inter ſe mutuà, & æquos;
Aſt parte ex alia ſine fine per avia currunt
Diverſi, atque ſinus magis amplos pandere pergunt.
Intacto ſecuiſſe velis ſin vertice conum,
Ut nova ſic oriens æquo frons undique tractu
Diſtet ab orbe, fuit quem circa mobile filum
Verſum, plana alium pariter frons præferet orbem
Olli conſimilem prorſus, ſeu forte minorem,
Majoremve, minus puncto ut tum forte, magiſve,
Quàm prior, accedet, conum cum mente ſecabis.
Quid docet at ratio frangendi hæc utraque coni,
Quod nequeas alia nota magis, exque pedita
Scire via? Quare, quod refert, ſegmina coni
Quas alias formas præmonſtrent, inſpiciendum eſt,
Neglectoque, quod hìc nullis eſt uſibus, ipſas,
Quarum ope proficias, res excolere inſtituendum.
Sic diſperſa ſuo cum ſemina multa recepit
Terra parens gremio, ſuccos convertit alentes
Tantum in quæ poſſint paulatim extenſa foveri,
Lactentemque deinde tumentia creſcere in herbam:
Unde bonæ veniant poſt fruges, dives & annus.
Ergo age [a] jam conum obliquo ſi incipe ductu
Dividere, ut poſſis oras te ferre per omnes
Hæc peragens, latera & tranſire per omnia circum;
Quæ fuerit facies ex illo plana reperta,
Orbis erit, ſed de parti productior una
Tantum, atque hinc ovi referens ab imagine nomen;

[a] Obliquas igitur ſectiones perſequitur, ut moris eſt apud Geometras de Conicis Sectionibus agentes, quæ triplicis ſunt formæ. Prima eſt cum obliquo ductu totus tranſverſim ſecatur conus, lateribus omnibus rectilineis illis, quæ a vertice in immenſum producuntur, reſciſſis. Ea ovalem quamdam figuram refert, & in eo diſcrepat ab ovi figura, quod, qua binæ ejus frontes producuntur hinc, & inde, eandem prorſus utrobique curvaturam habeat, & craſſitudinem, dum ovum altera parte craſſius, altera exilius eſt. Hanc Geometræ Ellipſim dicunt, Noſter a Græco vocabulo apud latinos inuſitato abſtinet, & primam Coni ſectionem vocat, ſeu primam formam.

Quantumvis forma paulum quoque diſtet ab ovi;
Nam quibus excurrit laterum productior oris,
Flectentes ſe circum æque curvatur in arcus,
Nec magis hinc craſſus, magis hinc ſubtilis, ut ovum eſt.
Præter at hoc ovi nomen, nos poſſumus illum
Effigiem ſecto de cono dicere primam,
Aut formam, aut etiam ſpeciem, primamque figuram.
Quo minus [a] obliqui, cum pergis frangere, ductus
Sint, opus eſt, æquum paulatim accedat ad orbem
Orbis hic, & tandem, terga excurrentia longe
Nempe minutatim minuendo, congruat olli,
Tranſitus ut celer hic, longeque breviſſimus extet,
Nullaque proin velut in medio confinia reſtent.
Propterea ſimilis non æqui eſt orbis, & æqui
Ortus; & hinc multis natura utriuſque, neceſſe eſt,
Prodeat in rebus ſimilis quoque; multaque conſtent
Hujus, & illius communia munera formæ.
Sin contra obliques ductus magis uſque ſecantes,
In geminum tergum magis uſque excurret utrinque
Orbis, & ingentes longiſſimus ibit in oras.
Nec finem ſtatues ullum, quin tendere poſſis
Ulterius, gracilemque magis proferre figuram;
Alter enim queat uſque obliquior eſſe priore
Ductus, & exortam plus longe ducere formam,
Donec ad immenſam ventum ſit, & infinitam.
Nam [b] ſi tam obliquo tentes proſcindere ductu
Conum infinitum, latus ut contingere nunquam

Op-

[a] Si hæc obliqua ſectio ad illam circularem parallelam accedat, in illam demum deſinit, adeoque Ellipſis abit in circulum, cum quo idcirco plures habere debet proprietates communes. At ſi e contrario deorſum inflectatur, manifeſtum eſt, ipſam debere oblongari ita, ut licet craſſitudo ejus creſcat, in immenſum tamen magis creſcat longitudo, ac proinde craſſitudo reſpectu longitudinis in immenſum ſit minor; quam ob cauſam Noſter cum oblongatione in immenſum aucta conjunxit illud, *gracilemque magis proferre figuram*, ipſa quidem non evadit magis gracilis, ſed forma gracileſcit decreſcente ratione latitudinis ad longitudinem.

[b] Hic jam oritur ſecundæ ſectionis idea, quam Geometræ *Parabolam* dicunt. Hæc habetur, ubi illa ſectio in infinitum oblongata evadit ita parallela lateri coni oppoſito, ut ne in infinitum quidem producta totum ſecet, nec vero in infinitum itidem producta ſurſum offendat conum ſuperiorem illum oppoſitum. Hujus a ſuperiore diſcrimen eſt ingens in eo, quod non in orbem redit, ſed unicum habet ramum binis cruribus in infinitum productis, & a ſe invicem ſemper magis recedentibus in infinitum.

Oppoſitum poſſis, neque formam reddere fini,
At ſuperet ſemper, quo poſſis ducere eandem;
Nec tamen ex alia protenſo parte per oras
Hoc ductu immenſas, alium, qui tollitur alte,
Delibare queas adverſo vertice conum;
Exſurget ſpecies multum diverſa priore
Curva, quòd in ſeſe non ſe, velut illa, revolvit,
Nec redit in gyros ſua per veſtigia flexos,
At magis hinc atque hinc ſeſe dilatat eundo,
Ingentique velut ramo protenſa pateſcit;
Ramus enim late duo brachia, crurave pandit,
Qui magnis ſpatiis a ſe magis uſque recedunt.
Dicetur ſpecies proſciſſi hæc altera coni.
  Denique [a] ſic pergens ductus converte ſecantes,
Ut, quod non licuit nuper, modo fiat, ut alter
Jam non incolumis penetretur tum quoque conus;
Protinus hinc geminos atque hinc diſcurrere ramos
Conorum ſciſſa in facie oppoſitaque videbis;
Brachiaque oppoſitas procul utrorumque per oras
Extendi immensùm gemina, atque æqualia prorſus.
Illi dimidias referunt, longeque figurant
Effigies coni primas, quas diximus ante;
At diſtant etiam, quoniam non mutua ſeſe
Reſpiciunt, tergo obverſo, averſique feruntur
In ſpatia infinita, ſinu magis uſque patente.
Alteram item referunt olli, propiuſque figuram

[a] Ulteriori ſectionis converſione tertia prodit forma, quam Geometræ Hyperbolam appellant, cum nimium ſectio utrumque e binis oppoſitis conis ſecet. Hæc binos habet hiantes ramos oppoſitos, quorum alter deorſum, alter ſurſum in infinitum protenditur, binis uterque cruribus. Innuit autem Noſter, in quo Hyperbola cum ellipſi, & cum parabola conveniat, in quo diſcrepet.

Bini rami Hyperbolæ ſunt æquales inter ſe, & referunt binas veluti ſemiellipſes, ſed quæ in infinitum protendantur, & dorſum ſibi invicem, ac convexitatem obvertant, non vero concavitatem. Unicus autem Hyperbolæ ramus hiatu illo, & binis cruribus in infinitum protenſis Parabolæ ramum refert, ſed quo magis illa crura protenduntur in ipſa, eo magis ad rectæ cujuſdam poſitionem accedunt ſingula ita, ut ad eam rectam accedant magis quam pro quacumque determinata diſtantia utcumque parva, & licet accedant perpetuo magis, nuſquam tamen in ipſam recidant, quæ eſt mira illa proprietas, ob quam græco vocabulo illæ rectæ eorum arcuam dicuntur aſymptoti, quæ binæ ſunt pro ſingulis hyperbolis, & earum ſingulæ binis binorum oppoſitorum ramorum cruribus communes.

Contingunt, ramo quæ longe diffugit uno;
At ſunt & multis diverſi in rebus ab illa,
Præcipue quod, eunt cum longius, ire neceſſe eſt
Hos minus incurvos, ſic ut videantur in auras
Aeris ingentes tandem procurrere recti.
Proin recti poterunt atque hinc atque inde meatus
Signari gemini, ramo qui ſemper utrique
Accedant magis, in medio breviora relinquant
Et ſpatia extra omnem tenuata minutaque finem;
Sed non trajiciant unquam, mirabile dictu,
Brachia ramorum, tangenteſve oſcula jungant,
Quantumvis tractu pergas diſtendere magno.
Quare ſi incipiant digito non amplius uno
Diſtare inter ſe rami, rectique meatus,
Ima exinde licet de terra ad ſidera currant
Ultima, pluſque, animi quam poſſint prendere noſtri,
Inter ſe tantum nunquam inclinentur, oportet,
(Non ceſſent rami licet inclinarier illi)
Uſque aliquid digito medium ut non reſtet ab uno.
Tertia proſciſſi eſt hæc forma, figuraque coni.
Tres [a] igitur ſunt de cono, cum ſcinditur, ortæ
Hæ ſpecies grajis multùmque, diuque ſubactæ
Ingeniis quondam; proin &, quibus ante vocatæ,
Graja ferunt præ ſe nunc nomina, nempe petita
Quadam a menſuræ varia ratione; figura
Deficit in prima namque, extremaque redundat,
At, quoniam in medio eſt, manet una eademq; ſecunda.
Illas [b] præterea mille induxere per uſus,
Abdita Naturæ facerent dum ſacra potenti,
Non pateris, non thure pio, non ſanguine, & aris,

Sed

a Nomen Ellipſeos a cujuſdam menſuræ defectu, Parabolæ ab æqualitate conſtanti, Hyperbolæ a redundantia e græco idiomate deſumptum eſt. Quæ ea menſura ſit, videbimus in ſupplemento. Inter veteres Græcos Apollonius illas Pergeus fusè admodum ingenti volumine eſt perſecutus, & Apollonianæ dicuntur.

b Uſus quoſdam harum *Sectionum* commemorat, & primum in Gnomonica, quæ de horologiis agit per umbras Solares denotantibus horas. Cum radius per ſtyli verticem tranſiens binos opppoſitos conos deſignet habentes pro baſi circulum motu diurno a Sole deſcriptum, coni ultra verticem ipſum jacentis occurſus cum plano, per quem umbra excurrit, oſtendit viam verticis umbræ ipſius, quæ idcirco eſt Coni Sectio. Oſtendam autem in ſupplemento, quando eſſe debeat Ellipſis, quando Parabola, vel Hyperbola. Erit autem aliquando & recta, aliquando & circulus.

Digitized by Google

Sed quibus ipſa modis, quibus utitur inſtrumentis,
Omnia dum peragit: propria olli eſt arte litandum.
Illis præſertim magnus tribus uſus, opuſque eſt,
Dum projectarum quovis ſuper æquore lævi
Deſuper infixi ſupremo a vertice ferri
Umbrarum ſolis motus ſignamus, & horas;
Solis nam radius, dum ſummas terminat umbras,
Sole movente diem, deorſum illo a vertice ferri
Circumiens conum facit alma luce carentem;
Quem varie planum, quod dixi, intercipit æquor,
Ut varie varias mundi ſe inclinat ad oras,
Exceptumque ſecat; tum de tribus una, neceſſe eſt,
Signetur ſpecies, & circum finiat umbras.
  Uſus [a] at eſt primæ præ cunctis maximus unus,
Dum ſequimur late vacuo vaga ſidera cælo;
Nam primos coni hos ipſos correpta per orbes
Solem obeunt medium, ſpatiiſque feruntur in illis.
Æthera per magnum formæ non parva ſecundæ
Eſt etiam utilitas, quia cernimus uſque Cometas,
Cum ſolem prope ſunt, ſimili properare meatu;
Hinc facile & ſpatia, & curſus numeramus eorum.
  Cernimus [b] hoc etiam projecta volare meatu
Corpora, per ſeſe nec ea deflectere poſſe,
Cum properant obliqua, via; quia ſcilicet illi
Hoc proprium eſt, quo nos aliis dignoſcere ſuemus;
Curvantem ſeſe ut ſi puncto ſemita in uno
Contingat directa, repente recedere lege

De-

[a] Superior quidem uſus eſt omnium trium Coni ſectionum, at Ellipſis in Aſtronomia deſignat omnium Planetarum orbitas, ut ſuo loco videbimus. Cometæ autem in Ellipſibus moventur ita oblongis, ut in arcubus vertici, adeoque & Soli proximis, fere nihil ad ſenſum differant a Parabolicis arcubus, in quos abire Ellipſes maximè oblongas vidimus perquam exigua ſectionis converſione, quæ nimirum in ipſo initio ſub ſenſum non cadat. Sed de his multo inferius, ubi de Cæleſti syſtemate in ſecundo tomo agendum erit.

[b] Delabitur jam ad propoſitum ſuum motus corporum gravium obliqua directione projectorum, a quibus Parabolam deſcribi demonſtrat. Eſt enim hæc Parabolæ proprietas, ut in ſupplemento videbimus, ut ſi recta quædam in quovis puncto contingat perimetrum, & abſcindantur a contactu plura tangentis ſegmenta, a quibus uſque ad perimetrum ipſum ducantur lineæ rectæ parallelæ cuidam alteri rectæ lineæ, quam diametrum dicimus, ſint hæ inter ſe, ut illorum ſegmentorum quadrata, cujus theorematis inverſum etiam theorema eſt verum; ſi nimi-

Debeat hac arcum tangens via, ducere ab ipſa
Ut quos curva velis rectos ad tergora tractus
Una omnes eademque plaga, in quam brachia currunt,
Tractùs tam varij quæque intervalla queamus
Partibus in ſeſe repetitis aſſimilare,
Partibus illius, quæ tangit nempe, viai,
Puncto interceptis, & tractu quolibet illo.
Quæ ratio geminis conſtat quoque motibus, unde
Obliquus conſit, quo pergunt corpora jacta,
Scilicet ut tibi nos jam paulo oſtendimus ante.
Ergo quod per iter projecta ita corpora tendunt,
Illud idem eſt, ſpecies quod dicitur altera coni.
Inde [a] educta recens ars, qua fera pondera plumbi
Ære tonante procul jacimus, certamque per auras
Inferimus cladem, atque imitamur murmura cæli,
Iratumque Jovem, e nimbo cum fulmina ſontem
Projicit in terram, minuitque cacumine montes.
Nec ſat noſſe fuit trifida Salmonea flamma
Ambuſtum, ut Superum nolit ſævire furore.
Audax Iapeti certe genus: ah male damno
Pollemus proprio Mortales, funeraque in nos
Vertimus, atque novis Libitinam inſtruximus armis.
Ergo tonante globi cum projiciuntur ab ære,
Si plaga certa prius fuit, & vis cognita jactans,

Scire

mirum id accidat, curvam lineam, ad quam illæ parallelæ terminabuntur, fore Parabolam, cujus prior recta ſit tangens, & diameter parallela rectis illis inter ſe parallelis. In motu autem corporum gravium oblique projectorum, ad habendum motum compoſitum ex motu projectionis, & gravitatis, in directione ipſa projectionis aſſumenda ſunt ſegmenta, quæ deſignent motum æquabilem ex ſola projectione ortum, quæ ſunt ut tempora, tum demittendæ rectæ directionem gravitatis exprimentes, adeoque parallelæ inter ſe (nam ob exiguum tractum convergentia ad Terræ centrum tam remotum pro nulla haberi poteſt), quæ ſint, ut quadrata temporum, adeoque ut quadrata illarum tangentium, unde conſequitur, ut curva motu compoſito deſcripta ſit ipſa Parabola, nimirum ſecunda e Coni ſectionibus ſupra expoſitis.

a Hinc artem profluxiſſe ait emittendi globos e tormentis bellicis, ac affirmat, ſolvi poſſe ſequentia problemata. Data vi, & directione projectionis, invenire totam viam globi emiſſi, & punctum, in quo ad datum planum appellit. Dato uno jactu, invenire jactus cæteros eodem tormento, eadem pulveris pyrii quantitate factos cum ejuſdem magnitudinis globo. Dato ſcopo directionem ejuſdem tormenti invenire, qua globus ſcopum feriat. Eorum ſolutionem in ſupplemento exhibebimus.

Scire licebit item, quo quivis devolet ictus,
Quid feriat; quoniam noto via flectitur arcu
Non alio, quam quo ſpecies ſeſe altera flectit.
Si tubus eructans idem ſit proinde, globique
Pondus idem, certuſque modus quoque pulveris intus
Sulphurei, dabitur cunctos prænoſcere ab uno
Ictus, in quaſcumque plagas, altamve, humilemve
Ærea convertas dirum ora vomentia fulmen.
Scimus item, ſi quid ferro evertiſſe volante
Tentamus, cæli quas projiciamus in oras,
Et quas [a], jactus uti fiat longiſſimus; ultra
Certos nam nequeat tum ferrum excurrere fines,
Tuque impune queas contra conſiſtere, quanquam
In tua converſas proſpectes pectora glandes.
Hos tantum attingit tum ferrum miſſile fines
Extremos, cum dirigitur reſonantis hiatus
Ille globi medias cæli ſurgentis in oras,
Scilicet inter eas, quæ noſtro deſuper alte
Impendent capiti, & quas circum terminat imis
Finitor ſerpens regionibus: a mediiſque
Iſtis quæ cæli diſtant æqualiter oris
Sublimes, humileſque plagæ quæcumque, per æqua
Intervalla ferent ea ferri, aut pondera plumbi
Miſſa, in eas ſi forte tubi direxeris ora.

Jam

a Alterius problematis ſolutionem ipſe hic innuit, quam olim Joannes Bernoullius ex longe generaliore theoria, methodo multo ſublimiore deduxerat, ego autem longe alia, & multo expeditiore via ad ipſam delatus exhibui in Diſſertatione *de motu corporum projectorum in ſpatio non reſiſtente* edita anno 1740. Eſt autem problema hujuſmodi. *Determinare omne ſpatium, quod intra jactum continetur globi cum data velocitate e tormento emiſſi directionibus quibuſcumque.* Porro ad generalem problematis ſolutionem quædam alia primum præmittit.

Concipiantur e puncto projectionis binæ rectæ lineæ, verticalis altera, altera horizontalis, & ſint binæ directiones in eodem earum plano, quarum altera tantum recedat deorſum a recta verticali, quantum altera ſurſum ab horizontali, & cum utrâque globus ad idem horizontis punctum deveniet. Directio autem unica, inter eas media, & ab utrâque æque diſtans, omnium longiſſime globum feret in plano horizontali, cujus longiſſimi jactus diſtantia a puncto projectionis erit dupla ejus altitudinis, ad quam globus ipſe ſurſum verticaliter projectus aſcenderet.

Capiatur jam hinc, & inde in horizonte in eodem verticali plano duplum hoc intervallum, & concipiatur Parabola tranſiens per illud punctum, ad

quod

Jam ſi tantundem, quantum, cum rectus in auras
Conſcendit globus a ſucceuſo pulvere, conſit,
Bis capias ſpatii, & campo diſtendier æquo
Fingas, illud erit medii longiſſima jactus
Menſura: oppoſitas iterum hanc diſtende per oras
Directam menſuram, & fines finibus apta
Hujus, & illius, duplex ut denique fiat;
Ac tunc extremas via fac curvata per oras
Tranſeat, a cono quæ ſcilicet altera ſciſſo eſt,
Et medio exſurgens tantum ſe vertice tollat
Exinde in nubes, quantum globus inſiluiſſet
Aerias ſurſum rectà projectus in auras;
Circumſer porro, medio velut axe manente;
Intus clauſa ſinu tibi quæ ſunt cuncta cavato,
Sunt infeſta loca, & male tuta, inſidaque circum.
Mille [a] aliis in rebus item deprendere poſſint,
Hos quibus eſt animus curvos ſervare meatus;
Præſertim latices, genus hoc, ſpectacula præbent;
Incluſi latices cum, qua via facta, ſub auras
E plumbo erumpunt, & fila liquentia flectunt,
Ut properantis aquæ fons effluat uſque perennis.
Nam quævis cum gutta gravis ſit, flectitur arcu
Illo ipſo, quo projectum grave corpus agit ſe;
Excipiatque ſequens cum guttam gutta priorem
Perpetua ſerie, ſignatur trames aquai
Perpetuus liquidis, quibus ejaculatur, in auris.
Propterea, Nilus qua vertice decidit alto
Æthiopum, totum quia flumen in aere flectit;

Quon-

quod globus verticaliter aſcendiſſet, & per extrema illa duo puncta jactus maximi in horizonte aſſumpti hinc, & inde, quæ Parabola per ea tria puncta tantummodo ſatis determinatur; tum hac circum acta concipiatur quidam veluti tholus, qui eo curvilinei orbis gyro oritur, & ad omnia puncta intra hujuſmodi tholum ſita poterit devenire globus, extra ipſum prodire omnino non poterit. Solutionis ſimplicisſimæ & elegantiſſimæ demonſtrationem exhibebo in ſupplemento.

[a] Ex iis, quæ præmiſit, eruit Noſter id, quod ſponte conſequitur ductum aquæ e vaſis foramine prodeuntis, vel oblique effluentis e tubo debere Parabolæ formam induere, cum ſingulæ guttæ Parabolam deſcribant. Ejuſmodi curvaturam paſſim videmus: tradunt autem etiam, ubi integer Nilus præceps ex alto demittitur, cataractas Nili appellant, aquas in ingentem olim arcum inflexas, jucundum ſub ipſo arcu aſſidentibus ſpectaculum præbuiſſe pluribus etiam monumentis ibidem erectis: prærupto nunc labro defluit ingens aquarum vis etiam ad perpendiculum.

Quondam erat hos arcus impune ſubire liquentes,
Et ſiccum ſupra caput amnem cernere magnum
Labi, atque undiſonas ſubter ridere ruinas,
Quin fabricare domos, monumentaque tollere multa,
Proſpiciunt nunc mortales veſtigia quorum
Longe, namque via eſt prærupta, atque obſita prorſus;
Scilicet ut memorant, loca qui per inhoſpita tendunt.
Aeris [a] at liquidis in campis motibus aer
Undarum officiens plus detrahit inde, rotundis
Quam cum vel lapidum, vel ferri molibus obſtat;
Nimirum quantum ſenſus queat afficere ipſos;
Impete mobilitas nam primo impreſſa per auras
Langueſcat paulatim, & plus tenuetur eundo,
Eſt opus; hinc formæ quod iter ſignare ſecundæ
Continuo deberet, eo divertere ſenſim
Cogitur aeriis offenſibus unda; ita cedens
Accedit propius, propiuſque meatibus illis,
Tertia queis coni eſt ſpecies, ut diximus ante.
Nam rectæ propior ſemper propiorque viai
Fit cuidam; ſed non unquam ſic pervenit illuc,
Ut tangat, tactamve ſecet, tranſcurrat & ultra.
Nunc [b] quid fiat, ubi labuntur libera non jam

 Cor-

a Quæcumque huc uſque dicta ſunt, locum habent, ubi motus fiat in ſpatio non reſiſtente. At aeris reſiſtentia rem omnem perturbat, & quidem plurimum, ſi globi exiguum habeant pondus cum ingenti ſuperficie conjunctum, vel ad ingentem diſtantiam emittantur. Ea computata deſcribitur curva, quæ a Parabola recedit plurimum, & ad Hyperbolam accedit. Habet nimirum aſymptotum, ſive rectam quamdam, ad quam in immenſum accedat, nec ipſam unquam contingat, ut etiam in plano horizontali lævigatiſſimo projectus globus, ita motum paulatim amitteret ob aeris reſiſtentiam, ut certum limitem a velocitate projectionis pendentem ſuperare omnino non poſſet. De eo itidem aliquid in ſupplemento.

b Expoſitis, quæ pertinent ad motum gravium liberum, ſive fiat in recta verticali, ſive extra ipſam projectione obliqua, tranſit ad motum in planis inclinatis, ubi itidem Galileana comperta perſequitur. Quod autem attinet ad plana inclinata, ipſe, ut cæteri communiter, per virium reſolutionem id expedit, quod a me quidem in mea theoria per compoſitionem præſtari docui in ſupplemento libri 1, ubi de motuum reſolutione eſt actum.

Reſolvit igitur vim gravitatis in partes duas, quarum altera planum perpendiculariter premat, quod etiam ſi fragile ſit, ut e vitro, poſſit diffringere, altera corpus grave ſecundum directionem plano ipſi parallelam urgeat ad deſcenſum, quæ quidem pars pro variis planorum inclinationibus varia (eo enim eſt minor, quo

Corpora, ſed ſola per variarum ſtrata viarum,
Ponderis illorum queis pars retinetur, agamus.
Incipiens plana a facie, quæque æquore lævi eſt,
Noſce, inclinatum per iter deſcendere corpus
Si grave deberet, gravitas fore deſuper illud
Una ut parte ſui premeret, qua, ſi via conſtet
Subtili fragilique e vitro, rumpere poſſit.
Et quia, quæ premit, incumbat vis recta, neceſſe eſt,
Deſuper; idcirco gravitatem corporis omnem
In geminas, opus eſt, pergas disjungere partes,
Queis illa a ſeſe diviſis polleat æque;
Altera ſubjectum recta vi comprimit æquor,
Altera agens corpus fert, impellitque ſecundum
Æquor idem; quo tum reſtante elliditur illa,
Hæc illæſa manens obliquis pulſibus urget
Corpus, & accelerat; ſic omnem ſola gerit rem.
Hanc tanto agnoſces tota gravitate minorem
Eſſe, minus quanto ſpatium eſt ſublime viai,
Quam longum; quare via cum inclinatior exit,
Et proin alta minus, prima creſcente, neceſſe eſt
Hanc aliam partem decreſcere vis, minuique,
Ut major fiat majore, minorque minore
Pro flexu, quo ſe devexum dirigit æquor;
Nam minus atque magis tunc officit id gravitati.
At, quocumque viæ flexu uno, eodemque manente,
Altera vis ſpatium manet haud mutata per omne,
Æquaque, parque ſibi, nec agens non ictibus æquis.
Illis propterea peraguntur legibus iſdem
Hic quoque cuncta, quibus vacuo grave corpus agebat
Aere ſe, recto ſurſum deorſumve volatu.
Hoc [a] diſcrimen erit tamen unum, tempore eodem

Quod

quo planum a verticali ad horizontalem poſitionem accedit magis, ſive quo magis inclinatum eſt, ut facile patet), in eodem plano eſt conſtans, adeoque motum gignit uniformiter acceleratum cum iis iiſdem legibus, quas in libero deſcenſu, & aſcenſu expoſuimus. Nimirum erunt velocitates ut tempora, ſpatia ut quadrata temporum, vel celeritatum, ſpatium percurrendum finali velocitate eodem tempore, quo deſcenſus eſt factus, erit duplum ejus, quod eſt percurſum.

a Comparat hic deſcenſum in plano inclinato cum deſcenſu in verticali recta, & notat diſcrimen illud, ex quo omnia reliqua huc pertinentia profluunt: nimirum, Vis reſpectiva, quæ deſcenſum obliquum ſollicitat, ad plenam gravitatem, eſt ut altitudo plani ad longitudinem. Plani autem altitudo dicitur diſtantia perpendicularis

limbi

Quod minor exoritur loca per declivia tanto
Mobilitas, obliqua minor vis eſt ea quanto
Totius illæſæ gravitatis viribus ipſis;
Nimirum ſpatia illa minus ſublimia quanto
Sunt, quam longa, ſoli devexi: exinde neceſſe eſt,
Cum par tempus erit, vel idem, ſi plurima flexu
Æquora declines diverſo, longa ſed æque,
Orta ut mobilitas minor, & decurſa minora
Sint ſpatia, alta ubi ſunt minus hæc clivoſa viarum.
Omnia verum æque ſi ſummo vertice ſurgant,
Æque longa tamen non diſtendantur, oportet
Per mage longa, minus ſpatii, minus atque fugai,
Corpora cum facimus devolvier, aſpiciamus:
Atque illic nos hæc metimur tractibus altis,
Tractibus hic longis metimur, at ordine verſo,
Hoc mutantur enim duplici declivia pacto.
  Hinc [a] avidam veri nimium oblectantia mentem
Plurima menſores deducunt, hi, quibus almæ
Naturæ cupidis aditus datur ire per omnes.
Delibare juvat quædam nos; cætera noſce
Illinc, ſi libeat, quæ ſunt permulta, animumque
Tutemet hæc volvens rationibus inſtrue veris.
Principio caſus finem cum corpora tangunt,
Quæ veniunt reſupina viai æqualiter altæ
Per loca, quantumvis non æque longa, nec æque
Inclinata inter ſe flexu, mobilitates
Omnes eſſe pares, quæ tum crevere ruendo,
Aſpicies, terramque pari contingere curſu

 Cor-

limbi ſuperioris a plano horizontali tranſeunte per inferiorem. Hoc theorema facile demonſtratur, & hic in ſupplemento demonſtrabitur.

Duo inde corollaria Noſter infert, quæ ſponte conſequuntur, quorum primum pertinet ad altitudines variatas data longitudine, alterum ad longitudines data altitudine. Si plana ejuſdem longitudinis diverſas habuerint altitudines, acquirentur in iis dato quovis tempore velocitates proportionales altitudinibus; quod ſi altitudo ſit eadem, longitudines vero diverſæ, acquirentur dato itidem tempore velocitates longitudinibus reciprocè proportionales, ſive eo minor velocitas, quo longitudo ſit major. Facile patet, cum velocitates dato tempore acquiſitæ debeant eſſe, ut vires, & vires ex ſuperiori theoremate majores ſint in primo caſu, quo altitudines majores ſunt, & in ſecundo, quo longitudines ſunt minores, quibus imminutis, inclinatio quoque minuatur, neceſſe eſt.

[a] Plurima alia theoremata inferri ex ſuperiore illo præcedentis notæ, affir-

Corpora. Quapropter de culmine corpus eodem
Si cadat, aut recta; aut quæcumque per æquora labens
Prona, pari ſemper terram venit impete ad imam;
Non par tempus erit lapsùs tamen, & mage longum
Per ſpatium qui fit, caſus diuturnior ille eſt;
Nam cum vis tanto minor eſt, quanto amplius ipſum
Eſt ſpatium curſus, eadem tunc ultima conſtat
Mobilitas, ſpatio tempus reſpondet at illi.
Propterea tenſo populi in ſpectacula fune
Devolat ex alta tenues qui turre per auras,
Ipſe ruet deorſum pernicior, obſtantemque
Aera diſrumpet violentius accelerato
Impete præcipitans, fuerit ſublimius ipſum
Si turris, cœpit demittier unde, cacumen,
Atque iter aerium, contracto fune, feratur
Obliquum minus ad terram; mage proinde cavendum eſt,
Ut molli excipiant objectu vellera lapſum,
Ne ſubito tanta illidantur membra ruina.
Præterea [a] quendam confingas intus inanem
Mente globum, medium quem ſummo a vertice ad imum
Mente tua quoque confictus pertranſeat axis;
Hujus ab extremo ſi ducas culmine multas
Hinc atque inde vias, directo tramite quamque,
Convexa illius quas ultima finiat orbis

Ora,

affirmat, ope Geometriæ, quorum aliqua ſe hic prolaturum profitetur. Plura & nos in ſupplemento, ubi accuratas omnium demonſtrationes exhibebimus; interea veſtigiis ipſius inhærebimus, paucis adjectis, quæ iis facilius intelligendis utilia ſint.

Primum theorema, quod infert, eſt hujuſmodi. Ubi altitudo planorum utcumque inæqualium fuerit æqualis, velocitas in fine plani erit ſemper eadem, tempus autem, ut longitudo ipſa plani. Utrumque facile deducitur ex eo, quod qualiber vis uniformiter agens producat velocitatem proportionalem ſibi, & tempori, quo agit. Ubi enim tempus eo majus ſit, quo minor vis, velocitas in fine motus debet eſſe eadem, & quoniam ea velocitate motu æquabili percurreretur eo tempore duplum ejus ſpatii, quod percurritur, ſpatium erit proportionale illi tempori, adeoque ubi ſpatium fuerit eo majus, quo minor vis, velocitas pariter in fine ſpatii erit eadem, & tempus erit proportionale ſpatio. Ex utraque autem theorematis parte ſatis patet, quam, ad rem oculis ſubiciendam, ſit aptum exemplum, quod Noſter adhibet hominis ex editiore turri per funem obliquum demiſſi, cum velocitas finalis ab altitudine, brevitas temporis a funis brevitate pendeat.

[a] Celebre Galilei theorema hic effert temporis æqualis in deſcenſu per

dia-

Ora, vel ex ipſis faciei queiſlibet oris
Undique diverſas convertas axis ad imum,
Quo coeant omnes, punctum; tum ſive per illa,
Sive per hæc grave corpus eat declivia quæque;
Æquo quamque viam decurri tempore cernes,
Illo nimirum, pondus demitteret axem
Quo ſe per totum ſupremo a vertice ad imum;
Cum quanto magis una recedit ab axe viarum
Quæque, magis tanto brevis eſt obliquaque, tanto
Denique vis minor eſt, per eam quæ pellit & urget.
Ex [a] his prona via eſt rationibus ad rationes,
Queis tenui ſeſe vibrant pendentia filo
Corpora, curvatos & eunt, redeuntque per arcus;
Nam ſocio pariter nexu junguntur utræque.
Qui prior invenit, ſtudioque ſubegit utraſque
Ante alios, fertur Fortunæ munere primos
Huc feciſſe gradus, ſuaque inſtituiſſe reperta.
Nec ſit Fortunæ magnum & memorabile nomen
Rebus in humanis? argenti nempe vel auri
Tantum, & non veri videatur ſuppeditare
Theſauros, mentemque opibus ditare repoſtis?
Quiſnam adeo inventum ſapiens ſe jactet ob ullum,
Quod non ipſa ſibi Fors arroget ante, ſuumque
Eſſe velit munus? Noſtris quam multa profecto
Sæpe

diametrum verticalem circuli cujuſcumque verticaliter erecti, & per chordam quamvis ipſius circuli ductam ab ima, vel a ſumma diametro circuli ipſius. Si nimirum a ſumma diametro, vel ab ima ducatur ad quodvis ejus circuli punctum recta linea, quæ ipſius circuli chorda dicitur, idem tempus impendet grave illud in percurrenda hac chorda, quod impenderet in diametro percurrenda. Rationem Noſter innuit, quo enim a diametro illa magis diſtabunt chordæ, eo & obliquiores erunt & breviores, adeoque vis, quæ per ipſas oblique urgebit, eo minor erit, quo ſpatium conficiendum erit minus, ex quo æqualitas temporis ſponte profluit.

[a] Jam ad agendum de oſcillationibus pendulorum ſe comparat, ubi non per unicum planum inclinatum deſcenditur, ſed per curvam lineam, quæ inclinationem perpetuo mutat; quam ob rem in ipſum deſcenſum per curvas lineas primum inquirit. Porro Galileus ipſe, qui primus hanc omnem gravium theoriam detexit, ad eam ex ipſa circulatium oſcillationum conſideratione delatus eſt. Is autem caſu in eam meditationem incidit. Cum enim Medicinæ operam daret, cogitaretque de methodo aliqua, qua certo inæqualitatem pulſuum arteriæ in febribus cognoſceret, forte lychni pendentis in templo oſcillationes animadvertit æque diuturnas, ſive multo majores eſſent,

Sæpe animis offert, & ſenſibus? Irrita cuncta
Torpentes at abire ſinunt, & ſpargier auris,
Semina littorea veluti ſparguntur arena;
Sin rebus vigiles ſenſus, intentaque mens ſit,
Forte quod objectum eſt, rapiunt, recoluntque, foventque.
Sæpe iterum auxilio fors advenit, atque ſecundat
Conatus, artes & ſubſtruit exorituras,
Succeſſuſque datis amplos ſucceſſibus addit.
Ergo vir ille, animo cum tempora volveret acri,
Excita queis prodit vibrati arteria cordis
Impulſus; quæ pendebat de fornice templi,
Concuſſam forte huc lucem procurrere & illuc
Vidit, & æquali conjecit tempore poſſe
Procurrentis itus peragi reditusque; nec, illa
Quanquam primo amplum, porro contractius uſque
Signaret ſpatium, diuturnior ante videri
Procurſus poterat, citior poſt: namque viai
Cum brevitate minor conjungitur impetus uſque.
Hæc nova tum ſpecies cupidiſſima pectora veri
Illexit; curas agitat, volvitque recentes
Ille; novam auſpiciis donec felicibus artem
Intulit, excoleret quam plus tamen, exque poliret
Poſteritas, vitæ & magnos aptaret ad uſus.
Hinc tua vis animi Batavis effulſit ab oris
Nobis, inclite Vir, qui tempora certius, ac ſol,
Metiris, ſol ipſe dies qui ducit, & annos,
Et nobis pater eſt ſæclorum, & temporis auctor.

Sed

ſent, ut initio ſolent, ſive breviores multo, ut in fine, amplitudine itineris compenſata per celeritatem ortam ex majore altitudine, & minore ſub initium oſcillationis inclinatione ad horizontem. Inde vero occaſionem arripuit inquirendi in ipſum gravium deſcenſum, & totam hanc theoriam detexit, quam hucuſque expoſuimus; uſque adeo in iis etiam, quæ ad doctrinam pertinent, fortuna poteſt, ſi, quæ caſu objecta ſunt, conſilio, & diligentia excolantur.

Porro Galileus ipſe novæ artis, nimirum Mechanicæ, quæ agit de motu corporis vi conſtante ſollicitati, fundamenta poſuit definitis iis, quæ pertinent ad aſcenſum, & deſcenſum liberum, ad motum per plana inclinata, ad motum gravium utcumque oblique projectorum. At eam artem alii poſtmodum auxerunt mirum in modum, inter quos maximam promeretur laudem Chriſtianus Hugenius nobilis Batavus, quem hic Noſter innuit, Geometra ſuperioris ſæculi plane ſummus, qui totam pendulorum theoriam mirum in modum excoluit, ac ad humanæ vitæ uſus traduxit, horologiis ope ſuorum pendulorum ad æqualitatem redactis

mirum

Sed prius ad motus quam corporis accedamus
Suſpenſi, ſternenda via eſt, moreſque videndi,
Queis volvunt curvo ſe corpora miſſa meatu.
Primum & nunc æqui nobis volvenda per arcus
Orbis, dein aliis poſt flexibus inſinuanda
Carmine erunt alio, queis ſcilicet uſus, opuſque.
Denique de molli filo vel pondera virga
Suſpendemus, ut huc commota agitentur, & illuc,
Commotiſque ſuas leges, ſua certa canemus
Munera, pro variis conſtant quæ prodita rebus.
  Nunc [a] quoniam, ut nuper cecini tibi, cum via multa
Diverſis orbis de partibus axis ad imum
Ducitur (has, ſiquidem flectentes eſſe videri
Chordæ arcum poſſint, chordarum nomine dicunt)
Æqua, per has properat queis corpus, tempora conſtant;
Ne tu forte putes etiam per quoslibet arcus,
Parva tamen qui ſint pars circum totius orbis
Æquis temporibus volventia corpora ferri,
Scilicet ut multi, quanquam haud ingloria rebus
Nomina in his, illa ducti ratione putarunt:
Nam ratio, dicunt, qua fit, peragantur ut æquis
Chordæ temporibus, quas imus terminat axis,
(Se variæ licet inter, inæqualeſque) profecto
Exiguis eadem quoque debet in arcubus eſſe,
Cum prope quique ſuis æqui ſint denique chordis;
Proinde itidem æquali procurſus tempore quoſque
Exiguos peragi, cum ſcilicet itque, reditque
Exiguos, at non æquales, corpus in arcus.

Hi

mirum in modum, quæ, uti in ſuperioris libri notis innuimus, Solem ipſum poſſint inæqualitatis arguere.

a Hic ut ad oſcillationum theoriam ſibi viam ſternat agere incipit de deſcenſu per curvas lineas, ac primo quidem demonſtrat illud, deſcenſum per arcus exiguos ejuſdem circuli utcumque inæquales idem ad ſenſum tempus requirere, quod Galileus male cenſuerat accurate æquale in arcubus omnibus majoribus. Verum in ejus theorematis demonſtratione oſtendit, adhiberi non poſſe eam methodum, qua Keillius eſt uſus, qui alios plures in errorem induxit. Hunc errorem ego fuſius perſecutus ſum in diſſertatione de inæqualitate gravitatis in diverſis Terræ locis edita anno 1741. ex qua hic derivabo nonnulla in ſupplementum.

Hoc autem pacto ratiocinabantur. Deſcenſus per chordas omnes ex Galilei doctrina idem tempus requirit. Sed arcus exigui pro exiguis chordis aſſumi poſſunt, quibus æquipollent. Igitur etiam deſcenſus per arcus exiguos idem tempus requirent.

Hi [a] procul a vera lapſi regione feruntur,
Nam licet exiguus, longeque breviſſimus arcus
Par chordæ prope ſit, multiſque in rebus haberi
Ille queat tanti tumor, ut contemnere poſſis,
Attamen hic, vires ubi ab ipſis flexibus imam
Pendent obliquis ad terram pluſve minuſve,
Ipſa hæc contemni nequeant diſcrimina flexus.
Negligere iſta queas, & non errare profecto,
Rebus ubi magnis referantur tenuia; verum
Non ita, ſi parvis æque de rebus agatur,
Aut etiam fortaſſe minoribus; iſta neceſſe eſt
Non vaneſcentem tum partem totius eſſe.
Nunc igitur, chordam quoniam quamcumque per omnem
Pars eadem gravitatis agit tenuiſſima quamvis,
Æquis mutatur fuga corporis ictibus æque;
Aſt omnem gravitas oritur diverſa per arcum,
Quandoquidem variant ibi puncta per omnia flexus:
Eſt ubi nimirum punctum ſublimius, illic
Amplior ad terram duplo eſt hic flexus in arcu,
Quam chordæ per iter, medioq; in tramite par eſt;
Aſt exinde minor, vaneſcit denique in imo, &
Deſinit in nihilum puncto; ſic ipſa, neceſſe eſt,
Et gravitas duplo ſit pene valentior, arcu
Incipiente ſuper, quam per declivia chordæ,
Æquet at in medio vires, effœtaque demum
Fiat, & imbellis, neque pulſu polleat ullo.
Hinc tibi mobilitas quoque primò exorta per arcum
Bis ſuperat, quæ fit per chordam, mobilitatem,

Per-

[a] Erroris fontem hic aperit. Arcus exigui chordis ſuis longitudine quidem ferè æquales ſunt, ſed poſitione diſcrepant, nimirum aliam inclinationem habent ad horizontem in aliis ſuis punctis, eandem quidem in medio, ac chorda, at majorem in initio, minorem in fine. Pendet autem ab inclinatione ipſa etiam gravitas reſpectiva, ſive vis urgens obliquum deſcenſum, quæ eo eſt major, quo major eſt angulus cum horizonte; & quidem in exiguis arcubus eſt illi ipſi angulo quamproxime proportionalis, cum ubique ſit proportionalis accuratè iis, quos in Trigonometria dicimus ipſorum angulorum ſinus.

Hoc inclinationis diſcrimen inter arcum, & chordam in arcubus exiguis exiguum eſt, eumque in arcubus, qui longe diſtant ab imo puncto, totus angulus cum horizonte ſit ingens, diſcrimen illud inter inclinationes arcus, & chordæ reſpectu totius exiguum eſt: at in arcubus exiguis in imum punctum deſinentibus totus angulus eſt exiguus, adeoque diſcrimen illud non eſt exiguum reſpectu totius; quin immo in eo caſu

Perpetuoque illic oritur nova major, ad oras
Dum ventum medias fuerit; propulſaque proinde
Illinc concipiunt procurſus pondera longe
Majores; licet a medio tum deinde deorſum
Uſque minora fugæ ſint incrementa, per arcus
Corpore, per chordas quam, delabente; tamen ſic
Ille prior vincit decurſus, ut, altera motus
Pars hæc cum fiat breviori tempore, jam vim
Propter conceptam, nequeant diſcrimina proinde
Denique penſari ſic temporis illa prioris.
Arcum propterea breviori tempore multo
Nonne opus eſt carpi, quam chordam, corporis omni
Illo in procurſu, pars arcûs quamlibet ipſa
Totius circum ſit longe parva meatus?
Qualia ſed chordas per, & arcus temporis omnis,
Atque fugæ ſemper diſcrimina, quantaque conſtent,
Si libet, eſt alio rationum a fonte petendum.
Sed prius aggrediar quam rem quoque cominus ipſam,
Pergam uſus varios imitarier agricolarum;
Qui prius ac mandent fœcundæ ſemina terræ,
Exurunt tribulos, & ſontes funditus herbas
Evellunt, ſubiguntque ſola, invertuntque, fimoque
Inſpergunt calido, pluviiſque feracibus aptant;
Sic mihi multa opus eſt prævertere, remque parare,
Ut facile inde queas vera ratione potiri;
Non etenim tibi mos alieno vivere ſenſu,
Et ſapere, ut multis, alieno pectore tantum,
Quos labor ingenii quivis perterret inertes,

caſu demonſtratur accuratè, & id ipſum in ſupplemento demonſtrabimus, initio quidem ipſius arcus cum angulum eſſe duplum anguli, quem chorda habet ubique conſtantem, in medio æqualem eſſe, verſus finem in immenſum decreſcere, ac demum penitus evaneſcere. Quare etiam vis, quæ ad deſcenſum obliquum ſolicitat, ubi agitur de arcubus longe diſtantibus a fine, erit ubique in arcu exiguo, & ſua chorda fere eadem, at in arcu deſinente in punctum imum, vis erit initio deſcenſus duplo major, quam in chorda, in medio æqualis, circa finem in infinitum decreſcet, & demum penitus evaneſcet.

Hinc autem illud conſequitur, poſſe id diſcrimen contemni in arcubus exiguis ab imo puncto magis diſtantibus, non autem in iis, qui infimo ipſi puncto ſunt proximi, vel in id deſinunt; nam exiguæ quantitates contemni quidem poſſunt reſpectu ingentium, non autem reſpectu exiguarum, & multo minus reſpectu earum, quibus etiam majores ſint, ut hic accidit. Quamobrem patet, admodum diverſum debere eſ-

Proin ut habere fidem, quam res inquirere malint.
Jam primo [a] cognoſſe neceſſe eſt, cum grave corpus
E declinato declivius æquore in æquor
Tranſit, non tota transferrier incolumique,
Qua primi ſub fine ruebat, mobilitate,
Verum aliquam illius decuſſam perdere partem,
Quantum conceptis tum ſcilicet officit æquor
Motibus excipiens; quapropter, ut ante peractum
Sæpius eſt, motum in geminos diſſolve retexens,
Alter ut hoc aliud rectus ſuper incidat æquor,
Alter at ipſius ſtratum ut declive ſecundet;
Prima perit pars, offenſuque extinguitur illo,
Altera ſola infert nova in hæc declivia corpus,
Quæ minor idcirco eſt totius mobilitatis
Impete, diſcrimenque quod eſt, decreſcere debet,
Si quoque decreſcat flexus, quo ſe æquora nectunt;
Qui ſi infinito tum denique decremento
Vaneſcat prope, differitas oritura viarum
Declinatarum, quæ tempore ſcilicet æquo
Quolibet intacta cum mobilitate ſeorſum,
Cumque ita pauxillum tenuata conficerentur,
Vaneſcet pariter ſimul, & prope deſinet omnis,
Reſpectuque viæ decreſcet ad infinitum;

Quin

re eſſe tempus in arcu exiguo imo, ac in chorda. In arcu exiguo, qui in infimum deſinat punctum, velocitatis incrementa paribus tempuſculis duplo majora ſunt initio, quam in chorda, æqualia in medio, minora in immenſum in fine. Velocitas major initio acquiſita, cum per totum tempus duret, tempus totius deſcenſus in arcu ita contrahit, ut a minoribus incrementis celeritatis ſub finem, ubi jam motus eſt celer, & tempus breve, non compenſetur.

Quæ autem ſit accurata ratio inter utrumque, demonſtraturum ſe Noſter pollicetur præmiſſis nonnullis, quod & præſtabit, quantum ſine Geometria præſtari poteſt. Nos, quæ ex ipſa Geometria deſiderantur, in ſupplementis addemus de more.

a Primo loco hic agit de deſcenſu gravium per plura plana inclinata, ut ab eo gradum faciat ad deſcenſum per curvas, ubi errorem vitat, quem Galileus admiſit, & vero etiam Hugenius videtur admiſiſſe, quemadmodum oſtendam in ſupplemento, qui error, forte fortuna, ubi a planis inclinationem aliquam habentibus ad ſe invicem tranſitur ad curvas continuas, penitus evaneſcit, quod nimirum in mutatione planorum illæſa perſeveret velocitas jam acquiſita. De ea enim deperditur aliquid, quod quantum ſit, & quomodo in curvilineo motu penitus evaneſcat, Noſter diligentiſſimè exponit.

Ubi igitur mobile quodpiam in quodam plano delatum cogitur mutare planum, concipiatur velocitas,

quam

Quin & adhuc magis ad nihilum decurret inane,
Ut parvis infinite ſit tenuior ipſa
Rebus non novies, deciesve, ſed infinitè,
Scilicèt infinitum aliud contingat ut infra.
Quare, ita mutato quæ perditur æquore quoque, eſt
Tantula mobilitas, devolvier infinite
Ad parva ut ſit opus, rurſuſque ad parva; ſecundo
Ordine proin poſſit ſita dicier infinitè
Exiguorum. Admirari tam tenuia nobis
Hæc licet, & multis non irrita credere rebus;
At non, qualia ſint, noſtræ ſupponere menti.
Quin & adhuc magis e parvis certiſſima conſit
Interdum ratio, & mentem demittimus infra.
Ordine ſic alia infinitè tenuia longo
Fingimus eſſe itidem genera, & regionibus illis
Admiſſi miras latitantis prendimus artes
Veri, & tam tenui filo producimus extra, &
Vitamus laqueos errorum, & frangimus omnes,
Quorum aliter par eſt conſtringi compede victos,
Sed quæ ſentiri nequeat, captivaque turba
Tum ferimur, tamen ut victores plaudimus, & nos,
Occiſo Pythone velut, jactamus ovantes.
Scilicet illa animo comprendunt, vis quibus acris
Ingenii eſt, fictumque luto meliore ſalit cor,

quam in fine habebar, reſoluta in duas, alteram perpendicularem novo plano, alteram habentem directionem plani ipſius. Illâ priore collidetur cum plano ipſo, quod nitetur de loco ſuo dimovere, quod quidem eum immobile ſit, & ab omni hic corporis urgentis elaſticitate abſtrahamus animum, illius velocitatis effectus omnis elidetur. Poſteriore autem illa plano poſteriori parallela, quæ minor eſt, quam tota prioris plani reſoluta velocitas, ſubibit hoc ipſum planum poſterius. Hujus poſterioris velocitatis diſcrimen ab illa, quam in priore plano in fine habuerat, & quam haberet, ſi nihil ille flexus plani obeſſet, hic conſiderat.

Hoc diſcrimen eo minus eſt, quo angulus prioris plani cum poſteriori eſt minor, is nimirum angulus, quem continet alterum productum, cum altero non producto, quo alter ab alterius directione continuata deflectit. Si is angulus minuatur in infinitum, minuetur in infinitum pariter differentia velocitatum, & differentia ſpatii, quod percurretur in ejuſmodi planis a ſpatio, quod eodem tempore percurreretur in eodem plano continuato. Ita autem minuetur in infinitum ea differentia, ut reſpectu quantitatis infiniteſimæ infiniteſima ſit, ſive infiniteſima ſecundi ordinis, quod in ſupplemento demonſtrabo, ubi etiam de ipſorum agam infiniteſimorum natura, & diverſis ordinibus, quos hic Noſter indicat, & quorum notio ad evitanda plurima errorum pericula eſt admodum neceſſaria,

Nocturnæ vitant volucres fulgentia ſolis
Spicula; fert diam lucem *Jovis* armiger ales.
Ergo [a] vel hæc numero ſola conſtent innumerali,
Atque infinito declivia; mobilitatis
Omnis erit quæ tum deperdita ſumma, neceſſe eſt,
Sit ſine fine minor finita qualibet omni;
Proinde impune adeo parvam rem temnere poſſis.
Jam ſi concipias, numero velut infinito
Augentur, ſic & longo decreſcere ductu
Æquora, uti demum curventur plana viarum;
Nil perit e tota, quod conſtet in ordine rerum,
Mobilitate, quod & nihili non limina tangat.
Nil igitur corpus, dum ſignat curva viarum,
Perdit ob id, quia curva viarum ſunt loca, per quæ
Labitur. Idcirco per curvos accidit arcus
Illud idem, accideret quod tum, per plurima lapſus
Æquora ſi fieret flexu inclinata viciſſim
Multiplici, nil & de motu tranſitus ullus
Decuteret: quare quid fiat, quantaque flexu
Mobilitas pro tam vario tribuenda, videndum;
Perfacile extemplo curvos veniemus ad arcus.
Sic ubi deveniunt equites ſpumantis ad undæ
Obſtantes ripas pluviis torrentibus auctæ,
Alpinaque nive, ut nequeant tranſire, ſoluta;

Dece-

[a] Infert e præcedenti theoremate, ubi exiguorum planorum numerus in infinitum augeatur, & flexus, ſeu declinatio in infinitum minuatur, ſummam omnium jacturarum velocitatis, quæ fiunt in ſingulis flexibus, fore adhuc infiniteſimam; nam numerus infinitus primi ordinis quantitatum infiniteſimarum ſecundi, ſummam efficit infiniteſimam. Hæc autem ipſa ſumma penitus evaneſcit, ubi flexus ipſi penitus evaneſcunt, & curva evadit continua. Nam quantitas, quæ ab alia pendet ita, ut illa decreſcente in infinitum decreſcat pariter in infinitum, illa penitus evaneſcente, oportet, penitus evaneſcat.

Huc ubi delatus jam eſt, facile de motibus curvilineis aget. Conſiderabit nimirum, quid fieret, ubi per multa plana ad ſe invicem inclinata grave deſcenderet, ſi in ingreſſu in novum quodlibet planum totam præcedentem velocitatem conſervaret. Aucto enim in infinitum planorum numero, ut in curvam demum continuam deſinant, eadem poſtrema concluſio habebitur, cum illa detrimenta ſingulorum flexuum, quæ contemnuntur, revera in curva continuata contemni poſſint, & penitus in nihilum deſinant. Hoc autem pacto cum curvas lineas, & curvilineos motus immediatè per Geometriam tractare non poſſimus, ambitu quodam per linearum rectarum, & planorum proprietates ad eas devenimus, unde conſtat, quam apta ſit ſimilitudo hic a Noſtro adhibita.

Decedunt, retroque abeunt, campumque relinquunt
In medio, per quem porro decurrere poſſint,
Quadrupedeſque ciere; illi interjecta repente
Corripiunt curſu ſtadia, & non amplius, oram
Cum fluvii tetigere, minis retinentur aquarum
Labentum, celeri vibrant ita corpora ſaltu,
Nam tum ipſe ad ripam fert impetus ulteriorem.
 Si duo a propterea ſuperextruis æquora, quæ ſint
Obliqua ad terram, & ſe mutua non ſine flexu
Excipiant; ſimul & primum, inferiuſque quod extat,
Surſum confingas ſi rectà continuari,
Ad loca deveniat donec ſublimia tantum,
Quantum aliud ſublimi a terra vertice ſurgit;
Sive per iſtius tum partem continuati
Corpus agi grave deinde libebit, ſive per illud,
Perveniet parili ad confinia mobilitate
Illa, ubi ſe junctis duo finibus æquora nectunt;
Namque utrinque locis æque deſcendet ab altis:
Quare etiam inferius volvens ſe deinde per æquor,
Recta ſive via; ex alio ſeu venerit illuc
Æquore, ut in flexu ſed nil amiſerit ipſo,
Terram imam parili pertinget mobilitate.
 Perſtat & hæc, quotcumque velis conſurgere ſurſum
Æquora, perpetua ſibi ſuccedentia mole,

Inco-

a Demonſtratur jam hic in deſcenſu obliquo per curvam quamcumque, debere corpus in fine acquirere eandem velocitatem, quam acquireret in libero deſcenſu ex altitudine eadem, atque id quidem hoc ordine.

Sint primo bina plana ad ſe invicem inclinata, & concipiamus planum inferius recta ſurſum produci ad eandem altitudinem, in qua illud ſuperius verticem habet. Si deſcendiſſet per hanc ſecundi producti partem in ejus fine haberet eandem velocitatem, quam in fine primi, cum per bina plana inclinata utcumque, ſed ejuſdem altitudinis, velocitas acquiſita in fine ſit eadem. Quare ſi e primo in ſecundum illæſa ſua velocitate tranſeat, per ſecundum eodem modo fiet motus, quo fieret, ſi ex eadem altitudine utrique plano communi deveniſſet per unicum planum illud ſecundum ad partes ſuperiores continuatum.

Si jam ſit tertium ejuſmodi planum, & alia, atque alia quotcumque, velocitas autem jam acquiſita concipiatur illæſa in mutatione planorum, eadem prorſus ratione motus fiet per poſtremum poſt illa ſuperiora, ac fieret, ſi deveniſſet per ipſum poſtremum unicum ſurſum productum uſque ad altitudinem eandem. Quare in fine poſtremi plani eandem habebit velocitatem, quam haberet, ſi per ipſum unicum planum deſcendiſſet, quæ eadem eſt, ut vidimus, ac velocitas, quam acquiſiviſ-

Digitized by Google

Incolumis ratio, qua vincimus omnia demum
Incrementa fugæ, ſi nil ſubtraxerit inde
Multiplex, variuſque (licet quod fingere) flexus,
Eſſe eadem prorſus, quæ tum eſſent, illa per unum
Æquor ſi ruerent æque alto pondera caſu,
Exinde aut recta deorſum ſi lapſa venirent.
Tum conſtructarum numerus, brevitaſque viarum
Si tantum increſcant, via deſinat omnis in unam
Ut curvam, flexamque viam, non flexus ubi ullus
Hilum de tota delimat mobilitate;
Agnoſces, quales grave corpus cumque viarum
Deſiliat curvos per ductus, inſiliatve,
Tum fore nimirum, fugiens potiatur ut æqua
Mobilitate locis pariter ſublimibus æque.
Hæc [a] ſat erunt, tempus poſſis ut noſcere, corpus
Cum grave per curvos ibit quoſcumque meatus,
Si poſitus horum, & naturam ſciveris ante;
Parvula quandoquidem, queis perquam parvulus arcus
Conficitur quicumque ruendo, tempora pendent
A ſpatiis arcûs, quæ corpus conficit, atque a
Mobilitate ipſa, proin ſcire licebit eorum
Momentorum omnem quoque ſummam, & tempora tota.
At facili magis hac alia ratione putabis
Tempora curvatum per iter quodcumque ruendi,
Si

ſiviſſet in libero perpendiculari deſcenſu ex eadem altitudine. Multiplicatis igitur in infinitum planis, & eorum ſerie abeunte demum in curvam continuam, in fine ipſius curvæ velocitas erit eadem, quæ haberetur pariter in deſcenſu illo perpendiculari: quod fuerat propoſitum.

a Duas methodos hic innuit determinandi leges motus curvilinei. Prima methodus eſt, ut conſideretur elementum infiniteſimum curvæ binis rectis horizontalibus interceptum, & altitudo perpendicularis initii motus ſupra eas rectas. Hæc altitudo exhibet velocitatem, cum ſit proportionalis quadrato velocitatis ipſius, illud elementum curvæ exhibet ſpatiolum tempuſculo illi reſpondente deſcriptum. Cum igitur tempuſculum ſit directè ut ſpatiolum, & reciprocè ut velocitas; habebitur expreſſio ipſius tempuſculi, & per Geometriam, vel calculum infiniteſimalem, habebitur demum ſumma omnium tempuſculorum, ſive tempus totius deſcenſus.

Secunda methodus eſt, ut definiatur in ſingulis punctis curvæ lineæ vis reſpective urgens ad obliquum deſcenſum, & conſideretur motus in recta linea, in cujus ſingulis punctis illa eadem virium lex obtineret. Per illas enim generales leges deſcenſus rectilinei accelerati, quas in primo libro perſecuti ſumus, habebitur motùs in hujuſmodi curva.

De utraque hac methodo agemus in ſupplemento. Hæc autem ſecunda methodus

Si quocumque viæ punčto diſtinguere pergas
A tota gravitatem illam, ſolamque relinqui
Si fingas, quæ tum regiones tendit in illas,
Uſque alias, aliaſque, in quas infle&titur arcus,
Seſe obliquantem varie, vique impare agentem,
Perpetuoque a ſe diverſam; percipiaſque
Sic animo, corpus rečtà ſurſumve, deorſumve
His ipſis variæ gravitatis ab ičtibus ire.
His animadverſis, arcus, quos totius orbis
Partem eſſe exiguam ſtatuas, cognoſcere poſſis,
Æquis temporibus carpi quoſcumque meando,
Quantum ipſi monſtrare queant, & prendere ſenſus;
Tractus inæqualis ſit eorum quamlibet omnis:
Exigui [a] nam cum ſignat revolubile corpus
Circuitus partem, curſum fateare, neceſſe eſt,
Queislibet in punčtis tanto magis eſſe, minuſve
Obliquum ad terram, quanto mage puncta recedunt,
Aut minus hæc medio de punčto, ſcilicet imo.
Propterea, remanet cum duplo hic longior arcus,
Aut brevior, duplo flexus tunc amplior ille,
Tenuior aut contra eſt, ille, inquam, quem plaga motus
Producta ad terram cum terra conficit æqua;

At

thodus plerumque difficilior eſt, cum difficile plerumque ſit habere determinationem vis reſpectivæ per curvam lineam redactam ad rectam. At in noſtro caſu multo facilior eſt, ubi circuli arcus ſint exigui, ut pariter, ubi de Cycloide agitur. Invenitur enim vis in Cycloide accuratè, in arcu exiguo circuli proxime proportionalis arcui percurrendo uſque ad finem, unde iſochroniſmus facile derivatur, ut jam patebit, ac ipſum etiam tempus haud difficulter determinatur, quæ quidem duo hìc Noſter determinanda proponit.

a Demonſtrat jam hìc illud, quod in ſuperiore nota innui, ubi arcus circuli exiguus percurritur, eſſe vim gravitatis, qua obliquus deſcenſus ſollicitatur, proportionalem arcui reſiduo uſque ad imum punctum. Demonſtratio autem hinc petitur. Vis illa, ubi angulus plani inclinati cum horizonte eſt exiguus, eſt quamproxime proportionalis angulo ipſi juxta notam ad verſum 1686. Anguli autem, quem arcus efficit cum recta horizontali, eſt menſura arcus, qui ſupereſt uſque ad punctum imum, quod quidem Geometria facile demonſtrat, ut videbimus in ſupplemento.

Inde autem eruit tempora deſcenſuum in iis arcubus exiguis ita determinari, ut determinaretur deſcenſus ad centrum aliquod, ut ad centrum terræ, ubi concipiatur gravitas decreſcere in eadem ratione, in qua decreſcunt diſtantiæ ab eodem centro. Atque hoc pacto ſe paulatim ad problematis, ſibi quidem, nimirum Poetæ latino, ardui ſane, ac difficilis, ſolutionem obliquis itineribus ſemper propius accedere profitetur.

At ſupera a dictis deduces vim gravitatis
Perpetuo ſeſe obliquantem, ut diximus ante,
Exigui cum ſunt hi flexus, flexibus ipſis
Reſpondere, pari minuique, & creſcere pacto
(Quæ ratio, magni ſi fiant, diſperit, arcus).
Quapropter vis hæc reſpondet & arcubus ipſis,
Nempe intercipiunt quos pondus, & infimus axis.
Ergo ita conficitur curſus, quoſcumque libebit,
Per, genus hoc, arcus, ut conficeretur ad oras
Terrai medias, ſi libera corpora tali
Vi gravitas urgeret, ut ictus fortior eſſet,
Quo magis a mediis diſtarent finibus illa,
Contractiſque æque ſpatiis langueſceret æque.
Qui tibi quo fiat jam lapſus tempore, noſce,
Poſſis rebus ab his ut ad illas ſcandere notis:
Sic quoque prærupti qui tendit ad ardua montis,
Aſcenſu non ferre audet veſtigia recto,
Præcipiti nam ſæpe ruens pede devoluatur;
Aſt huc atque viam ſinuatam molliter illuc
Ingreditur, celſique legit latera utraque dorſi
Alternans, dum paulatim ſe in culmine ſiſtat:
Sic itidem adverſo obſtantem cum flamine in Auſtrum
Luctatur ratis, haud proram convertit ad oras
Æſtiferæ regionis; ea nam protinus aura
Retrorſum abriperetur; at hinc obliqua ſub Eurum
Dirigitur, Zephyros illinc converſa tuetur,
Aut ſedes, furit unde nigrantibus Africus alis,
Velaque dextrorſumque, ſiniſtrorſumque revolvit.
Corpora [a] diverſa facito regione locata

Ut

[a] In eo caſu, in quo gravitas corporis libere cadentis ſit proportionalis diſtantiæ a centro, facile admodum demonſtratur eodem tempore e quavis diſtantia deveniri ad centrum. Si enim bina ſint corpora, quorum primum triplo magis initio motus diſtet a centro, quam ſecundum; erit vis primi triplo major, quam ſecundi, adeoque triplam velocitatem primo tempuſculo acquiret, & triplum ſpatiolum percurret. Quare & triplum itidem reſiduum erit, nimirum tripla iterum diſtantia. Igitur & ſecundo tempuſculo triplam velocitatem novam acquiret, & triplum ſpatiolum tum præcedenti velocitate, tum nova vi percurret; unde conſequitur, ut tripla ſit pariter tota velocitas jam acquiſita, triplum totum ſpatium jam percurſum, tripla diſtantia reſidua, adeoque tripla vis nova, tripla novo tempuſculo nova celeritas acquiſita, triplum ſpatiolum novum percurſum, tripla nova diſtantia, & ita porro.

Patet igitur poſt quodvis tempus diſtan-

Ut duo concipias, ſpatiis tribus alterum ut extet
Disjunctum magis evectumque, & utrumque propellat
In medium hæc gravitas; vi, quod plus diſtat, agetur
Subtus tergemina, triploque propinquius, una,
Quod proin dum ſpatium quodcumque ita conficit unum,
Per tria carpit iter triplo velocius illud,
At non tripla minus ſpatia olli, viſque, neceſſe eſt,
Tripla relinquatur: rurſus vicinius oris
Ad medium quibus accedet, dum truditur intro;
Volvetur ter per totidem disjunctius oras;
Olli & rurſus erit triplex via, viſque ſuperſtes:
Atque ita poſt quævis continget tempora ſemper,
Ut mage disjunctum id triplici ruat impete corpus
Per triplices pariter regiones, ternaque reſtet
Et vis, & peragenda via. At cum denique puncto
Accedet, quod erat vicinius, ut prope tangat;
Alterum item medio prope adeſſe videbitur illi,
Cui tria tum ſpatii brevis intervalla ſuperſint.
Jam media terræ primum in regione locet ſe,
Tempore & illuc ſe tum transferet alterum eodem;
Nam ſuperare triplex quæ tum vis, & via debet,
Utraque vaneſcet prorſus, quia viſque, viæque
Utraque nullius triplex eſt, nullaque proinde.
Temporis idcirco nullum eſt diſcrimen in illo
Amborum ſic per loca non æqualia caſu;
Mobilitatis at eſt; quoniam, velut ante cadebat
Triplo per triplices regiones ocyus alterum,
Impete ſic medium pertinget triplice punctum.

ſtantiam primi fore triplam diſtantiæ ſecundi, ac proinde imminuta in infinitum hujus diſtantia, illius quoque diſtantiam in infinitum imminui opus erit, cum debeat eſſe ejus tripla, nec illa poterit evaneſcere, & corpus ſecundum ad centrum pervenire, quin evaneſcat & hæc, ac primum itidem eodem ſimul deveniat. Tantummodo id erit diſcriminis, quod primum deveniet cum tripla velocitate; unde illud etiam facile deducitur, ſi primum corpus e centro projiciatur cum tripla velocitate, debere ad triplam altitudinem aſcendere eodem tempore, cum eadem vis in aſcenſu eodem ordine velocitatem extinguat, quo in deſcenſu genuerat. Quod autem de ratione tripla dictum eſt, patet generale eſſe rationi cuilibet, nimirum in quacumque proportione major fuerit diſtantia primi corporis, quam ſecundi, eodem ſemper tempore ad centrum devenient cum velocitatibus, quæ proportionales ſint diſtantiis, quas initio habuerant, & ſi inde diſcedant cum velocitatibus quibuſcumque, aſcendent eodem pariter tempore ad altitudines proportionales ipſis velocitatibus.

Nunc fac, ut egrediantur ab hoc, unaque recedant
Ejaculata pari, qua tum venere ruendo,
Mobilitate, patens ratio, manifeſtaque prodit,
Ad ſua quodque, fore, ut redeat loca tempore eodem,
Nimirum inter ſe ſpatiis diſtantia ternis:
Nam motum minuent redeuntibus, elidentque,
Quo genuere prius venientibus ordine, vires.
Denique de triplici quod conſtitit intervallo,
Corpora queis diſtant, ſpatiorum, transfer ad omne,
Quod tibi cumque libet (ratio par omnibus extat.)
Multiplex ſpatium: manet immutabile verum
Scilicet, atque unum ſervat per cuncta tenorem
Exempla, atque uno claudit paria omnia gyro.
Semper erit, ſpatiis queis corpora cumque locentur
Bina, ut percurſi tractus ab origine prima,
Atque fugæ incrementa pari pro tempore, & ipſæ
Vires, quæque viæ tranandæ deinde ſuperſint,
Ordine ut hæc inter ſe ſingula ſtent ſpatiorum
Illo, quo media a terræ regione recedunt
Corpora; proinde pari delabi tempore debent,
Delabi, ſeu forte illinc ejecta ſalire
Ad loca prima, pari ſimul ordine mobilitatum.
Jam [a] facili ad curvos ratione referrier arcus
Poſſumus, unde ſumus digreſſi, & noſcere, parva
Circuitûs in parte, prope æquas temporis ejus
Eſſe moras, quo ſe labentia corpora volvunt.
Jam quoniam, ut docui, quæ pellit in arcubus imis,
Eſſe opus eſt parvam quos partem totius orbis,
Obliquans ſeſe gravitas flectentia curſum
Corpora, par olli eſt, quæ quantum diſtat ab imo,
Viribus increſcit tanto majoribus urgens;
Hic etiam aſcenſus ſunt tempora, deſcenſuſque
Omnia, inæquales ſint arcus quamlibet, æqua.
At quæ eſt mobilitas punctis ſublimibus æque,
Imæ aut valle viæ, toti, quod corpora tranant,
Reſpondet ſpatio; hanc ipſo metimur & arcu,

Nam

[a] Determinato æquali deſcenſu, & aſcenſu in illa recta, in hypotheſi vis decreſcentis in ratione diſtantiarum, jam nullo negotio fit tranſitus ad deſcenſum in arcu exiguo circulari. Ibi vis eſt ad ſenſum, ut diſtantia a puncto infimo computata in arcu percurrendo, in quo ex velocitate per ejuſmodi vires acquiſita nihil deperditur, & motus habetur prorſus, ut in illa recta. Igitur ſinguli & deſcenſus, & aſcenſus ſunt temporibus ad ſenſum æqualibus.

Nam via majori penſari mobilitate
Major, ut exiſtant paria omnia tempora, debet.
Ergo [a] age, finge etiam; per fictas nempe valemus
Ire quoque ad verum res; nam via ſternitur illuc
Sic facilis ſæpe, & clara, & certiſſima longe.
Quis vetet idcirco confingi poſſe quid ipſis,
Quæ vere exiſtunt, ſimile, unde educere pronum
Plurima ſit, veris aptare, & nectere deinde
Quæ valeas rebus, peragis quas, ſive revolvis,
Quæque alio nequeant facili miteſcere cultu?
Sic quoque cum magnos captura palatia reges
Apparat, aut populi plauſum auditura theatra
Ædificare Faber, laxiſve educere templa
Porticibus, celſaſque tholo contingere nubes,
Multa prius movet in rebus, ſimulacraque parva
Conſtruit, & tenues pulchro locat ordine partes;
Multa ſimul; magnaſque trabes educit, & altas
Suſpendit moles, tabulataque longa per auras
Inſtruit uſque novans, artiſque operoſa retentat
Inſtrumenta ſuæ, quibus alte marmora tollat,
Ingenteſque locet ſolido ſuper ære columnas,
Flectat & expanſos numeroſi fornicis arcus:
Omnia quæ quamvis opere evertenda peracto
Sint, nullam ſiquidem molis factura ſuperbæ
Partem; at non ideo fuit irritus uſus eorum,
Stat quibus ars, & tractatis quibus omnia condit,
Langueretque quibus velut exarmata negatis.

[a] Ut jam ipſum tempus determinet, quo per arcum exiguum deſcenditur, fingit ſibi (quem fingendi uſum ad veras deinde in iis, quæ te ipſa accidunt, rationes determinandas, comparat cum iis, quæ ad ædificia conſtruenda parantur prius, nulli futura uſui, ubi ædificium ipſum conſtructum jam fuerit) fingit, inquam, duo corpora, quæ idem ſpatium percurrant, & alterum quidem urgeatur in centrum poſitum in fine ejus ſpatii vi conſtanti, alterum vi decreſcente, ut decreſcunt diſtantiæ, ita tamen, ut initio vis hujus ſit duplo major, quam illius vis. Affirmat inventum iri, velocitatem utriuſque in fine motus eſſe eandem, ſed tempora diverſa, & tempus quidem prioris ad tempus poſterioris fore, ut eſt circuli diameter ad quadrantem circumferentiæ. Porro id demonſtratum eſt in ſupplemento libri 1, ubi de motu accelerato egimus. Ea autem ratio, ſi Archimedeis numeris uti libeat, ut ſit diameter ad circumferentiam, ut 7 ad 22, erit ut 14 ad 11.

Cum igitur arcus, & chorda longitudine æquales ad ſenſum ſint, vis autem in deſcenſu per chordam ſit conſtans, in deſcenſu per arcum decreſcat in

Quapropter confinge animo, duo corpora eodem
Lapſa loco ſimul in medium protrudier intro;
Alterum ut illorum conſtans conatibus æquis
Omnibus uſque locis gravitas propellat, at alterum
Haud conſtans, verùm quæ decreſcentibus æquè
Decreſcat ſpatiis; tamen hæc in origine motus
Ut duplici fuerit, quam prima, valentior ictu;
Supremi metam curſùs contingere utrumque
Mobilitate pari mediam debere repertum eſt,
Non par eſſe tamen tempus: quod nempe prioris
Labitur in curſu, toties ſuperare videbis
Alterius tempus, quoties via recta per orbem
Quæ tranſit medium, parteſque hunc ſcindit in æquas,
Quartam oræ exſuperat partem illius, ambitus æqui,
Quem modo ſcindebas, qua ſe circumtulit orbis.
Jam parvi cum ſint arcus, chordæque prope ipſæ
Æquales, per & has gravitas agat ictibus æquis
Conſtans, pro ſpatiis mutetur ubique per illos
Mutatis; ſed ibi quia duplo fortior extat
Vis in principio; par demum in fine, neceſſe,
Deſcensùs ut mobilitas ſit; at impare utrinque
Tempore deſcendatur; uti minus effluat arcu
Temporis in curvo, quam chordæ in tramite recto,
Ut minor eſt pars quarta oræ, qua clauditur orbis,
Ductu illo, medium hunc ipſum qui dividit orbem.
Aſt ᵃ quid erit, ſi non pars orbis parvula conſtent,

Di-

in ratione diſtantiarum ab infimo puncto, & vis in arcus initio ſit dupla ejus, quæ habetur in initio chordæ, idem habebitur in hoc caſu vero, quod in illo confiсto, nimirum erit tempus deſcenſus per arcum exiguum ad tempus deſcenſus per chordam, ut eſt quadrans circumferentiæ ad diametrum, ſive proxime, ut 11 ad 14

Quoniam vero idem eſt tempus, per chordam, ac tempus per diametrum, nimirum per duplam longitudinem fili ſuſtinentis pondus oſcillans, & oſcillatio quævis ex aſcenſu, ac deſcenſu componitur, duplicato deſcenſus tempore, ſponte jam hinc conſequitur in exiguis oſcillationibus fore tempus unius oſcillationis ad liberum deſcenſum per fili longitudinem, ut eſt dimidia circuli circumferentia ad diametrum, ſive proxime, ut 11 ad 7. Atque hinc reliqua omnia, quæ ad pendulorum proprietates pertinent deduci poſſent. Sed ea in ſequenti libro Noſter exponit poſt Hugenianum Cycloidis iſochroniſmum.

ᵃ Quærit hic, quid futurum ſit in majoribus arcubus? Affirmat illud unum, diſcrimen inter deſcenſum per arcum, & per chordam fore minus, tempus nimirum per arcum ipſum longius fore, quam per arcus exiguos idcirco, quod aucto arcu, vis augeatur minus, quam pro ratione arcus aucti, quod theo-

Diſtenſi verum, atque ampli quantumlibet arcus?
Quod diſcrimen erit per chordas temporis, atque
Per, genus hoc, arcus demiſſo pondere lapſi?
Id minus invenies, quam parvos eſſe per arcus
Nimirum, quoniam debetur longius illis,
Majores qui ſunt, tempus, quos nempe videmus
Curvari majore ſinu, atque recedere chordis
Quos magis à propriis, ut iter quoque longius extet.
Adde, quod hìc non eſt, ut parvo conſtat in arcu,
Incipiente duplex flexu, velut eſſe neceſſe eſt,
Vis gravitatis, at hæc uſque imbecillior exit,
Quo mage ſurgit, & a dupla plus deficit uſque.
Verùm hæc qui propius velit, interiuſque tueri,
Atque alte penitus ſcrutarier inſinuatus,
Plus opus eſt rerum, quàm poſſint ſuaviloquenti
Muſarum per dulce melos quæ inflectier ore.
Quin vix ſufficiant, Veteres quos rebus in iſtis
Invenere modos, ſueti & quibus utier olim,
Certe difficiles, implexique, inque pediti,
Atque per ambages ducti, longoſque meatus;
Prorſum at deficiant illis, quæ deinde ſuperſunt
Plurima præterea, genus hoc, dicenda, neque apti
Multorum clarandam ad vim ſint, exque plicandam

Na-

theorema demonſtrabimus in ſupplemento. Ad id autem tempus accurate determinandum impares eſſe verſus, & vix ipſas Veterum Geometrarum methodos pares eſſe, ſi forte ſint pares, quas quidem jure admodum implexas vocat, & ſibi viam ſternit ad digreſſionem ſatis opportunam, ſed ſublimem de calculo differentiali, & integrali, quorum ope hoc ipſum problema facile ſolvitur. Porro eorum hic naturam exponit, eoſque jure ſane optimo Veterum methodis omnibus longiſſime præſtare aſſirmat.

Notandum interea ante ipſum calculi differentialis, & integralis præclariſſimum inventum, Hugenium alia aliqua methodo inter veteres, ac recentes intermedia, cujuſmodi plures adhibuit noſter Gregorius a S. Vincentio, Valliſius, Hugenius ipſe, & alii ſuperiori ſæculo non pauci, qui calculo illi ipſi quodammodo veluti proluſerunt, inveniſſe rationem determinandi in numeris tempora deſcenſuum per arcus circulares quoſcumque, utcumque proxima veris, ut ipſe teſtatur in immortali ſuo opere de Horologio Oſcillatorio in ipſo initio, & quidem tempus deſcenſus per quadrantem circuli ad tempus caſus per arcum minimum inveniſſe quamproximè ut 34 ad 29. Cum igitur oſtenderimus, tempus per arcum minimum ad tempus per ſuam chordam, quod eſt idem, ac tempus per aliam chordam quamcumque, eſſe proxime ut 11 ad 14, erit tempus caſus per quadrantem ad tempus caſus per ſuam chordam, ut 34×11 ad 29×14, ſive ut 374 ad 406, quæ tempora vix una duodecima ſui parte a ſe invicem differunt.

Naturam; longe ſunt infra quippe relicti.
Proinde alia ingeniis patefacta recentibus extat
Nunc via doctrinæ, & compendia mira reperta,
In rerum per quæ penetratum eſt innumerarum
Naturam, & vires, & munera multa, latebant
Quæ prius humanis animis impervia prorſus.
Jam [a] proſpectus in infinite tenuia rerum
Ille ubi tentatus primùm, quæ, quantaque nobis
Non ſubito recluſa, oculiſque patentia noſtris
Vidimus, & tenebris disjectis clara relicta!
Unde magis, quàm de tripode, & reſonantibus alte
Oracla ex adytis veri manifeſta petuntur,
Et non mendaci reſponſa interprete proſtant.
Iſtic ſigna quidem, referant quæ plurima paucis,
Magnaque item parvis adhibemus, non imitantes
Pyramidum varias diverſa in fronte figuras,
Aſt animi ſuſtentantes & percipientis,
Et memoris vim, noſtra queat diſtendier auctu

Im.

a Novæ Recentiorum methodi infiniteſimarum quantitatum conſiderationi innituntur, de quibus paulo ſupra egimus. Sola ipſarum conſideratio pluribus compertis occaſionem dedit, & ſola Veterum demonſtrationes contrahit mirum in modum, qui methodo quadam alia, quam exhauſtionum appellant, ſunt uſi, de qua aliquid in ſupplemento, ubi inquam, quid infiniteſimorum methodus a methodo exhauſtionum diſcrepet, & in quo ipſi præſtet.

Porro methodus ipſa immenſum incrementum aſſumpſit, ubi ipſi calculus adjectus eſt. Calculum exprimit, cum indicat ſignis rem peragi, quæ ſigna mentem plurimum juvant. Nam imaginationi conſulunt in primis, cui quantitates, & veritates maxime abſtractas, dum eas oculis ſubiiciunt, facile percipiendas proponunt. Conſulunt autem & memoriæ, cum pauciſſimis notulis exprimant veritates jam inventas, unico nimirum obtutu inſpiciendas. Juvant ipſa ſigna & intellectum, ac inveniendi vim, cum multa ſimul, quæ facile combinari poſſint, obiiciant, & ipſorum ope per meras combinationes certa, & generali methodo factas nova theoremata eruantur, ac problemata abſtruſiſſima ſolvantur, in qua problematum ſolutione calculus oraculi cujuſdam vices gerit, & iis, qui interrogare norint, ac algebraicum idioma didicerint, reſponſa ex intimis ſcientiæ additis reddit certiſſima ſaltem in iis omnibus caſibus, pro quibus ea ars ſatis hucuſque exculta eſt. Et quidem ea omnia communia ſunt tam finitæ algebræ, quam infiniteſimali calculo, ſive differentialis ſit, ſive integralis. In eo autem præſtat finito calculo infiniteſimalis, quod ad quamplurimas quæſtiones, quibus ſolvendis finita Algebra eſt impar, ſe longiſſime extendit. Quamquam ſunt aliæ multæ, quibus is ipſe, quantum huc uſque patuit, in dies autem excolitur magis, impar deprehenditur, & ſunt aliæ

for-

Immani ut ratio, ſimul & comprendere multa.
Scilicet eruimus multa hinc, ſed plura ſuperſunt,
Quæ retegi ſemper valeant: inventa labores
Exacuunt, cumulantque nova, & majora relinqui
Oſtendunt; ullus non diæ terminus arti eſt,
Fertur ubique patens, ſeſeque per omnia laxat.
Illa quidem noſtro non poſſit carmine claudi,
Non ſi Pierio primos in colle dediſſem
Vagitus, & Mnemoſyne me Mater ad amnem
Pegaſeum Muſis germanum ſuderit ipſis.
Attingam paulùm tamen, atque in limine ſiſtens
Secretos aditus monſtrabo, adeundaque paucis
Qua ſint hæc delubra via, &, quæ prima, docebo.
Protinus [a] (omnis eo ratio eſt ſubnixa elemento)
Rerum, perpetuo nos fingere quas variari
Poſſumus, & veluti fluere, hæc diſcrimina nobis,
Haſque vices tenues, quæ parvo in tempore longe,
Scilicet infinitè in parvo tempore fiunt,

Eſt

fortaſſe, ad quas non noſtræ ignorationis vitio, ſed ſuæ propriæ virtutis defectu non perringit.

Porro calculum infiniteſimalem verſibus perſequi omnino non licet. Satis eſt ſi ejus idea quædam exhibeatur, & diverſa genera diſtinguantur, ac id, quod maxime in eo cavendum eſt, attingatur, quæ tantummodo ſibi Noſter propoſuit.

a Primo quidem ait, totam infiniteſimalis methodi rationem conſiſtere in eo, ut conſiderentur quantitatum perpetuo variabilium, ſive perpetuo veluti fluentium differentiæ, nimirum incrementa, vel decrementa tempuſculis infiniteſimis debita, & inter ſe conferantur. Porro id binis modis fieri poteſt. Vel enim cognita finitarum quantitatum variabilium relatione ad ſe invicem invenitur relatio differentiarum infiniteſimalium, quibus deinde aliæ finitæ quantitates proportionales ſunt, adeoque harum relatio definitur, & tunc habetur methodus, quæ dicitur directa, & qua etiam continetur calculus differentialis, cujuſmodi eſt is, in quo curvarum tangentes definiuntur, aut plurima ſolvuntur problemata de maximis, & minimis. Vel immediatè habetur relatio differentiarum infiniteſimarum, & ex hac relatione deducitur relatio inter quantitates finitas, quæ ſunt harum infiniteſimarum differentiarum ſummæ, & hæc appellatur methodus inverſa, ac ipſa etiam integralis calculus continetur. Ea utimur, ubi ex tangentium proprietatibus quibuſdam datis, curvarum proprietates inquirimus: ea etiam utimur, ubi motus acceleratos, & retardatos definimus, ex relatione inter incrementa, & decrementa velocitatis, ſpatiola percurſa, & tempuſcula, quibus percurruntur, ac ex iis relationibus determinamus relationes inter tempora integra, vires, celeritates, ſpatia, ac in aliis ejuſmodi caſibus quamplurimis. Mirum autem, quantum hæc ars huc uſque profecit, mirum, quantum adhuc ulterius progredi poteſt.

Eſt expendere opus, quoque ordine, qua ratione
Mutua ſeſe inter referantur quæque, videre.
Primùm igitur partes, refert cognoſſe, fluentes
Quæ, qualeſque ſient, inter ſe cum referuntur:
Tum ratione ex hac, qua ſeſe mutuà partes
Reſpiciunt, infra quæ ſunt, deſcenditur illa
Ad diſcrimina; & hinc ratio quoque certa, neceſſe eſt,
Quæratur, qua ſe reſpectant ipſa viciſſim:
Scilicet his parvis, infiniteque minutis
Reſpondere aliæ ſimiles res invenientur
Finitæ, quæque infinito proinde recedant
Intervallo ab eis: tibi ſic diſſolvitur ergo
Nodus, ubi illorum rationem inveneris, omnis.
Hac ex parte ſuum mira ars pervenit ad augmen.
Ex alia ſed parte, ubi de rationibus iſtis,
Quas prius a rerum natura propoſitarum
Noveris, ad rerum rationem nempe fluentum
Ordine commigras inverſo, illaſque requiris
Tenuibus, in quæ jam diſſolveris, ex elementis
Unam compoſitis in ſummam (namque elementis
Eſt opus ex iſtis conſtare fluentia cunctis)
Ex hac parte, inquam, quantum ars proceſſerit iſta,
Immane eſt, quantum & late diſtenſa pateſcat;
Haud nimus at nunquam valeat tamen exhauriri,
Cum nova ſuppeditet ſemper, potioraque multo
Auctior, inque dies adjuncto robore major,
Nec queat ætatis ſummum proin tangere culmen,
Nec, queiſcumque valet, cunctas educere vires.
Artis * & hinc itidem pars proficit utraque multum,
Quod valeas quiddam contemnere, nec numerare

Im-

* Tradita directæ, & inverſæ methodi idea, monet, utrique plurimum prodeſſe illud, quod quantitates infinitesſimæ ordinum inferiorum contemni poſſint reſpectu quantitatum ordinum ſupe iorum. Hic quidem contemptus occurrit ubique in metodo infiniteſimali. Eam conatur evitare methodus huic maximè affinis, quam Angli Fluxionum methodum appellant, & Newtonus ipſe in differentiis adhibendis conatus eſt ipſum evitare, ut in ſupplemento notabimus. Verum is & in ſynthetica, & in analytica infiniteſimali methodo plurimum prodeſt. Cavendum tamen, quod Noſter etiam monet, ut rite fiat. Fieri enim aliquando poteſt, ut cum iis, quæ infiniteſima ſunt, alia connexa ſint vel finita, vel itidem infiniteſima, ſed ordinis ſuperioris, quæ omiſſa in errores maximos inducant. Sed de iis omnibus in ſupplemento.

Impune in rebus, tibi quod ſit nempe neceſſe
Tum conferre alii, collatumque uſque tuaris
Deficere immensùm, atque infinite exſuperari.
Nam ſine fraude queas geminas res eſſe putare
Æquales, quarum diſcrimen ſit minus ipſis
Uſque adeo rebus, deorſum ut deſcendere pergat
Infinitè. Animum tamen hìc adverte ſagacem,
Contingat ne fors, ut cum diſcrimine parvo
Quantumvis aliquid conjungi non ita parvum
Poſſit, eo ſpreto ſimul ut ſpernatur & illud,
Quod ſperni porro non debeat, utpote majus
Hoc infinite diſcrimine, & e genere ipſo,
Illæ quo res ſunt, quas tute inquirere tentas:
Nam te aliter turpes errorum, ut diximus ante,
Eſt opus, immitas in nodos omnia turbans.
Rebus [a] ab his igitur tribus omnis ſurgat, oportet,
Hæc Ars, hæc Ratio, quo noſtri educitur ingens
Vis animi; ſimili primùm ordine magna figurat
In parvis; rebuſque refert pertenuibus amplas;
Deinde retro res integras inquirit, & ipſam
Summam a particulis tenuatis omnibus omnem
Colligit, atque una junctis metitur eandem:
Denique contemnit ſemper, tenuiſſima longe
Quæ remanent ipſas juxta res, quæ peraguntur,
Nilque quod interſit, nihilum locat inter inane.
Sed quibus in rebus, quibus artibus utilitates
Non aliis magnæ hoc triplici referantur ab uſu?
Nonne videmus enim, cum laxa per atria late
Herculeas pulchro vires ſimulare colore
Apparat, aut belli Trojani incendia Pictor,

 Sive

[a] Cum hanc infinitesimalem methodum reduxerit ad hæc tria principia, conſiderandi in infiniteſimorum rationibus rationem finitarum quantitatum, colligendi ſummas infiniteſimorum ipſorum, & ſummarum relationes ad ſe invicem, ac ad utrumque facilius præſtandum contemnendi quantitates ordinum inferiorum, cavendo tamen, ne illa, quæ contemnuntur, conſectaria ſecum trahant graviora, opportuno epiſodio finem huic libro imponit, eorum omnium exempla proferendo plura ad rem illuſtrandam aptiſſima.

Pro primo utitur exiguis in pictura exemplis ingentium tabularum, Geographicis, & Aſtronomicis chartis tam magna in parvo referentibus, ſeminibus, & ovis totius plantæ, & animantis ſtructuram, ac lineamenta continentibus.

Pro ſecundo exercitum adhibet, e ſin-

Sive tuos Cæſar devicto ex orbe triumphos,
Sive ignes Galatea tuos, per cærula ponti
Quæ veheris Siculi, flagrantia deſuper altis
Nubibus Idalii Pueri dum ſpicula vibrant:
Scilicet ut parva prius omnia ficta tabella
Deſignet vero contingens quæque colore,
Diſponatque ſitu; rebus locus omnibus, & vis
Eſt ſua; quiſque illo, quo par eſt, perſtat in actu?
Ingens quam nobis tellus eſt noſtra, profundo
Quam late diſtenſa mari, quantumque patentes
Et campi, & nemora, & montes tenuere? Sed ipſam
Scimus in exiguo magnam nos orbe referre,
Cernereque aſpectu ſic omnem poſſumus uno.
Noſcimus hinc fines ditionum, regnaque quantum
Cuncta extendantur; quas oras abluat æquor,
Flumina quà currant; montes, ſilvæque, lacuſque,
Et campi, & valles, loca culta, incultaque qua ſint
In regione; illic inquirimus oppida, & urbes,
Et quantum inter ſe diſtent, metimur, iterque
Tum peregre in tabula nobis ſignamus ituris.
Quin cæli vaſtas ſic ſcandimus in regiones,
Sideraque in parva cognoſcimus alta papyro,
Surgentemque polum, ſolemque, vagantiaque aſtra,
Et motus, variaſque vias, atque inde labores
Poſſumus & lunæ, & ſolis prædicere certos.
Semina præterea, quibus aut procera cupreſſus
Provenit, aut quercus frondoſis maxima ramis,
Atque arbuſta alia, & frutices, herbæque virentes,
Quid multis ſunt viſa, niſi arbos parvula longe,
Aut herbæ, aut fruticis conductæ, conque volutæ
In ſeſe effigies tenuiſſima, nec tamen ulla
Parte carens? Unde ipſa animantum ſæcla creantur,
Eſſe quid ova putent, niſi eorum exilia ſtructa,
Et tenuiſſima jam membrorum elementa, ſed æquo
Quæ tamen ordine ſint, ſimilique, ut magna, figura?
Deinde ubi non rerum ſummas a partibus ipſis

Col-

ſingulis militibus, greges, ac opes multiplices e ſingulis ovibus, nummis, ac aliis ejuſmodi, e pluribus conflata.

Pro tertio guttam in æquore, lapillum in monte, ſtipulam in campo, exigua in bello obſtacula quædam congerit tuto contempta.

Contemptus autem non impune fa-

cti

Colligimus? Populi quis opes prius æſtimet; ejus
Quam varios ſeorſum per cenſus, atque viritim
Per capita ipſa eat ordinibus comprenſa? Quis armis
Quam valeat ſumptis exercitus, autumet ante,
Quam cujuſque ſciat vires, animoſque cohortis,
Aut turmæ, peditiſque etiam cujuſque, equitiſque,
Bellandique modos varios, artemque cruentam?
Paſtor oves numerat, proprias cognoſcere cum vult
Divitias, tauros & jugera durus arator.
Demum in rebus ubi non ſemper tenuia magnis
Deſpiciuntur? ut in vaſto gutta æquore ponti
Unica, diruptis ut in Alpibus addita ſaxi
Pondera, quæ digito moveas, & ut una per agros
Flaventes ſtipula, ut bellis obſtacula parva.
Attamen hìc opus eſt intentis eſſe, quid ingens
Ne de tam parvis, contemnendiſque oriatur
Interdum, magna & rerum momenta ſequantur;
Dira ut ſæpe ſolet cælum turbante procella,
Protinus & fluctus maris attollente ſonoros,
Per rimas immiſſa ratem cum prægravat unda,
Una ſat eſſe, gravem ut mergat, maris ultima gutta:
Utque ſolet motus ventis, pedibuſve lapillus
Incipere aerio ſaxoſi vertice montis
Labi, & maiorum ſubito turbare quietem
Impulſu lapidum, qui per declivia pendent;
Hi quoque præcipitent per dorſum ut montis; eoque
Impete dimotæ rupes tum, vulſaque montis
Fragmina dent magnos ſonitus, vaſtamque ruinam
Per nemus antiquum, & ſata valle virentia culta,
Excidiumque ferant ſubjectis urbibus ingens;
Ut quoque ſcintillam excipiens ſtipula una propagat
Protinus ingentem campis flaventibus ignem;
Uruntur ſegetes, & ſparſa mapalia late
Paſtorum, ſilvis & flamma exuberat altis,
Involvitque diem nimbo, & caligine fumi.
Parva nec in bellis obſtacula, nec mora parva

cti exempla adhibet plura: ultimæ guttæ mergentis navim, lapilli e ſummo cadentis monte, & immanem inferiorum lapidum ex æquilibrio dimotorum ruinam trahentis, ſcintillæ ingens excitantis incendium, exiguæ quandoque in bello negligentiæ, quæ hoſti occaſionem præbeat rei bene gerendæ, & rem propriam funditus perdat.

Contemni perſæpe queant impune; vel hoſtis
Interea elapſus flumen trajecit, & altos
Tranſmiſit montes citus, in tutoque reſedit;
Vel celeri ſine ſubſidio deleta tuorum
Agmina, capta vel ars longo circumſita marte;
Denique cunctantem vel te quoque percutit hoſtis
Protinus adveniens, circumventumve paratas
Ducit in inſidias, cogitque occumbere victum,
Turpiter abjectis captivum aut dedier armis.

LIBER TERTIUS.

NAturæ [a] variam cupidus dum perſequor artem,
Et leges Mundi, & rationes, Inclite SILVI,
Per quas conditus hic ſummai fulgurat ordo,
Perculſam veluti tam grandibus, attonitamque
Rebus, ad humanas interdum vertere mentem,
Quæ mage conſpicuæ nos inter, magnificæque,
Res libuit; queis ſe flectant, quæ publica conſtant,
Nempe modis, & quæ coeant in fœdera gentes,
Qualiſque in populos ſit late invecta poteſtas;
Atque ita res rebus componens, æquiparanſque,
Protinus has illis longe diſtare fateri
Cogor, & immenſo prorſus decedere tractu,
Utpote divinis humanas; ſcilicet illæ
Invictæ, ſtabiles, pacatæ, æquæque, bonæque,
Turbatæ hæ contra, incertæque, leveſque videri,
Semperque inter ſe variæ, & plerumque nocentes.
Quo mihi nunc paulum tecum diſcurrere aventi,
Summatim & multas regnandi attingere formas,

Per-

[a] Rurſum hic compellat Silvium Cardinalem Valentium, cui totum opus nuncupat, ac ut in exordio, & in exitu librorum omnium ſolet, Lectorem amœnioribus detinet, ut animum ad ſeveriora abſtruſioris Philoſophiæ præcepta præparet, vel iis plus æquo defatigatum reficiat.

Occaſionem autem arripit a perpetuis, firmiſſimis, & generalibus Naturæ legibus, ac inde ad varias, incertaſque humanarum legum vices divertit, earum in primis, quæ ad Reipublicæ conſtitutionem, & regiminis formam pertinent, quod argumentum Cardinali ipſi Valentio gratiſſimum fore arbitratur, homini nimirum in iis ipſis artibus exercitatiſſimo, qui legationibus ampliſſimis apud exteras nationes functus in Belgio, & Hiſpania, ac a Summo Pontifice in totius Chriſtiani Orbis regimine adminiſter ſibi

ad-

Perſicile eſt, quoniam per te quoque plura valebis
Sufficere ipſe tibi; quis enim te certius ipſo
Noverit hæc, uſu qui tractas publica longo,
Diverſaſque olim qui non privatus adiſti
Sidere mutato regiones, quique per ævum
Anteactum, atque alias diſcurris mente per oras:
Rebus ab oppoſitis ut conſpicienda nitebit
Naturæ ſpecies tum clarior, illicietque
Plus animos, quidquid quam magnum ubicumque videtur!
Ergo ades, atque hominum hæc præclara negotia luſtra.
Quid a magis interſit, quàm jungi fœdere velle
Inter ſe populos uno, quæque optima conſtant
Jura ſequi? Quæ non contra diverſa probari
Aſpicis? Imperio quantum diſcrimen in omni eſt?
Unius hic flecti moderamine publica rerum
Cernimus, aſt illic multorum. Subditur uni
Quæ gens, ire putat melius plerumque ſibi res,
Hunc præfert aliis dominatum, noſque doceri
Hunc a Natura putat ipſa, quæ jubet uno
Semine progenitos uni parere parenti,
Monſtrat & in mundo ſimili res ordine ferri,
Unus cum moveat totum, qui condidit, Orbem:
Propterea ſanctos exemplo, & jure ſuperno
Inſtitui Reges, terreſtria numina, Divum
Eſſe genus, vix non aris, & thure colendos.
Num tamen idcirco eſt hoc regni nomine in uno
Vis eadem in variis ditionibus? Eſt, ubi tantum
Arbitrio Rex cuncta ſuo movet, & ſuper ipſas
Supremum leges caput extulit, omnia vertens
Pro lubitu: eſt contra, antiquis ubi legibus ipſa

Inni-

adlectus, & adjutor, totam fere vitam in publicis adminiſtrandis negotiis conſumpſit.

Porro, quæ in hoc exordio, & vero etiam pleraque ex iis, quæ in hujus libri fine adhibet Noſter, excerpſit ex opere Domini Monteſchioù *L' Eſprit des Loix*, periculoſo quidem, ac noxio, ſed & eruditione multa, & quadam rerum comprehenſione celebratiſſimo.

a Conſiderat autem in ipſo exordio Monarchiam, in qua unus imperat, & Poliarchiam, in qua multi. Priorem illam in binas dividit, quarum alteram *Diſpotiſmum* appellant, altera generale illud Monarchiæ nomen retinuit. In illa is, qui imperat, ſummum exercet in ipſas leges imperium, omnia vertens pro lubito, in hac legibus quibuſdam, quæ imperii formam conſtituunt, paret Rex ipſe, & ex earum ſta-

Innixa eſt ratio regnandi; Rex ubi mutis
Scilicet addit vim, recipitque a legibus, atque
Utraque ſe media ſic temperat arte Poteſtas.
Illic, Regnantum qua flectit cuncta libido,
Inſtans incumbit timor in mortalia corda,
Atque animos premit horrifica vel nominis umbra,
Immixtumque bibunt infantes lacte timorem,
Inque timore levis puerorum educitur ætas:
Regna per Auroræ populos ſic omnia conſtant.
Exulat & virtus, & honor de mentibus illis;
At gerit ipſe vices timor, atque impellit ad orſa
Pulchra viros, & magnanimos facit, & generoſos
Sæpe videri; etenim nil præter grande verentes
Induperatoris nomen, facile omnia temnunt,
Hoſtemque, lethumque; hinc vires ſuppeditantur,
Hinc furor, & vitæ mens prodiga, projiciuntque
Sic illaudatas animas, virtute carentes.
Si tamen unde venit timor ille, haud uſque minaci
Præque potenti etiam ſit majeſtate Tyrannus
Obſitus, inſultat contra, interdumque furores
Vertit in auctorem, & ſolio diſturbat ab alto
Imbelles, miteſque, & poterit, & ſibi quærit,
Quo plus poſſit ali; proin ſævam, prævalidamque
Uſque poteſtatem ſuper impendere neceſſe eſt,
Ut ſcelera, & fraudes, errorem ita plectere, fortiſque
Adverſæ eventus ulciſci, diraque ſemper
Imperia exercere, ſuique augere timorem.
Aſt ubi nil patrias in leges juris habere
Rex valet, indecores non ſubdunt corda timores:
Hic Honor eſt, humana potens qui pectora flectit:

Hoc

ſtatutis populos regit. In illa timor, in hac honor ſubditorum animos incitant, & illa quidem animos ipſos ita ſervili jugo demittit, ac deprimit, at ad virtutem, doctrinamque excolendam ſe nunquam erigant, quod apud Turcas, Perſas, Mogolenſes, alioſque plurimos Aſiæ populos videre licet: in hac res longe melius procedit; at ſæpe eo progreditur falſi cujuſdam honoris ſpecies ex inveterata conſuetudine animis alte inſita, ac inhæreſcens, ut fruſtra eam Reges ipſi, pœnis etiam propoſitis, & infamiæ notis adjectis, eradicare conentur, ac delere, quod in dementiſſimo, ac pernicioſiſſimo ſingularium certaminum uſu, apud nobiles in primis, & militares viros per totam late Europam diffuſo, nequidquam dolemus jamdudum.

Quod autem ad Poliarchiam pertinet, eam potiſſimum, quæ apud Roma-

Hoc magnum, hoc pulchrum, porro hoc laudabile, quid-
Suadet Honos, aurum pro quo, vitamque paciſci (quid
Sponte velint; non dat meritis Rex præmia magnis
Hoc potiora, nec eſt pœna invidioſior ulla,
Eſſe putant quam quod ſibi dedecus. Et quia regno
Quod prodeſt, Regique, peramplo rentur honori
Eſſe ſibi, nomenque parare, & nobilitatem,
Contendunt facere id. Tractantes munera belli,
Ut Leo Marmaricis gaudet generoſus arenis
Irruere objecti lata in venabula ferri,
In cædes, in fata ruunt; ſeges ampla cupiti
Semper honoris ibi eſt; vel pulchro hanc funere quærunt.
Si poſſent Reges ſpeciem hanc adjungere honoris,
Queis libeat, rebus, proprioque ita flectere mentes
Arbitrio, quam tuta foret, quam magna Poteſtas!
Obſtant ſæpe tamen mores, exemplaque nota
Majorum, & teneræ quoque patrum tradita quædam
Judicia ætati, penituſque infixa medullis,
Unde queant variis hærere in rebus honorem
Percipere, oppoſitis at contra dedecus eſſe;
Lex vetet, an jubeat; mox ingens pœna ſequetur,
Extorres fient patria, longeque fugati,
Evertenda domus, carcer, poſt funus acerbum,
Nil refert; agitat mentes Honor; ille vel acri
Impulit interdum patriam convellere bello,
Civilique ferox fœdavit ſanguine dextras,
Impiaque extimulavit in ipſum pectora Regem.
  Per multos ubi res agitur ſed publica Cives,
Degendum ſolis mortalibus eſſe beate
Creditur, æquato inter ſe qui jure fruuntur,
Haud ſecus, ac Fratres totidem, quibus æqua poteſtas.
Eſſe bonos ſiquidem perraro, qui ſibi ſubdunt
Omnia ſublimes, fieri plerumque tyrannos,
Concutere ob luxum plebem, & vexare tributis,
Cuncta libidinibus complere, injuſtaque bellis

Ne-

manos viguit, quorum imperium ex populari, & ſenatorio mixtum, ex Democratia & Ariſtocratia ſimul conjunctis, copulatiſque coaluit, in ea virtutem imprimis dominari, vigere amorem patriæ, commune bonum privatis commodis anteferri. Hinc heroas ibi progigni, atque educari, quorum tam multa apud Romanos in primis exempla habeantur. At eam ipſam regiminis formam diu perſtare nequaquam poſſe, bellis civilibus, privato-

rum

Nectere bella, ſuoſque ſuorum ſanguine fines
Velle extendere, & humanum proin depopulari
Sæpe genus, nihili pendentes præ ambitione,
Haud ſecus ac animas alia de ſtirpe creatas.
Ergo nomina ibi regni, atque inviſa Potentum;
Proinde agitat non corda timor; ſibine eſſe timori
Ipſi nempe queant? Nec nomen honoris inane
Sollicitat; ſed amor patriæ, ſed civica regnat
Libertas: nullo diſcrimine pollet in omnes
Æquum jus; abſunt procul otia, luxus, opeſque, &
Quidquid frugalem poſſit diſſolvere vitam;
Privatos quoniam mediocres condere cenſus
Eſt opus, ut, magnum, quidquid commune, ſit unum,
Pro quo quiſque, velut proprio, depugnet in hoſtem,
Propterea haud nimium laudem, aut ſtipendia poſcens
Præ Patria incolumi; pro qua profundere vitam
Dulce ſit: a veteri non quidquam more remittat
Majorum, priſciſque novos a rebus ad uſus
Non abeat: delent paulatim nam nova priſcam
Virtutem ex animis; vicibus conſueſcere pravum eſt.
Quæ tum non videas præclara ac fortia bello,
Quæ fieri non recta domi, non inclita ubique?
Tum grandes animæ, Bruto ducente, Camilli,
Fabritii, Curiique aderunt, & ſponte revertens
Regulus ad Pœnos, Fabii, rigidique Catones,
Claraque Scipiadum devicto nomina ab Orbe.
Haud tamen hoc hominum poſſunt mortalia corda
Culmine ſtare diu; virtutis imagine fallit
Sæpe furor, menteſque rapit pro tempore flecti
Indociles, geminaſque facit diſcordia partes;
Et vitiis morum rigor ille obtunditur acer,
Luxus, & ambitio ſimul incubuere; labaſcunt
Tum priſcæ leges, conſurgunt uſque recentes
Nequidquam; arbitrio verſantur cuncta Potentum;
Quoque libet, plebem impellunt mercede redemptam.
Illi inter ſeſe contendere, paulatimque
Cedere amor patriæ cum libertate, procaxque

rum ambitione, ac potentia excitatis, quæ omnia ſus deque vertant, ac demum penitus perdant.

His nimirum altius inſpectis, perpenſiſque, multo magis debere animos ad ſeſe rapere, ac in ſe uno defigere certiſſimum, ac perenne Naturæ regnum, æternis, & inconcuſſis legibus conſtitutum, per quod hic lectorem ſuum longe, lateque deducit.

Tum demum in populo per cuncta licentia ferri.
Sic quodque a pulchro devolvitur ordine ſæpe
Imperium ad turbas, fæcemque, & perdita rerum;
Deſtruit & cito ſe, facies niqua altera ſurgat
Ordinis, ipſa etiam mox deceſſura recenti,
Mutandæque itidem: ſic rerum hic vertitur ordo.
Incertis non tam vaſtum mare volvitur undis,
Ventorumque vices agitatum percipit omnes,
Quam vario rerum mutantur publica motu.
Hæc ubi cognoris, multaque revolveris ipſe
Parte vigil, ſi tum te ad fœdera Naturaï
Certa, rataſque feras ad leges, hæc quibus omnis
Summa ſtat, ad tutos e tempeſtatibus atris
Nonne tibi portus demum videaris, & almæ
Veniſſe a tenebris ad lumina clara diei,
Protinus unde queas hominum cognoſcere curas,
Quantum ſollicitas, tantum rationis inanes;
Propthereaque unum præclarum, & grande, quod extat,
Et ſpectabile opus cupide hoc inviſere Mundi?
Quo magis inceptum pergam contexere verſu.
Hactenus [a] in varias dum nos gravitatis adimus
Leges, non alios deduximus inde meatus,
Quam rectos, curvoſque etiam, quos diximus æqui
Eſſe arcus orbis, quique hoc ſimul orbe, viaque
A recta tenuere ortus, orbique propinquant
Plus aliis, magis & communi fœdere gaudent.
Sed quam præterea ſeries immenſa viarum
Eſſe videretur, ſi vertimus undique mentem
Omnem in naturam, varia, infinitaque prorſus?
Quin genera ipſa forent etiam infinita profecto:
Immenſuſque itidem quam late eſt uſus earum?
Quamlibet inſpicias ſi frondem, hæc eſt quoque dicas,
Cui ſua debetur curvi [b] natura meatus

Una

a De gravitate agens ſuperiore libro, expoſuerat ea, quæ pertinent ad deſcenſum rectilineum, ad deſcenſum per arcum circuli, & ad motum liberum obliquè projectorum, qui fit in Parabola, una e tribus Conicis Sectionibus; ac proinde nullas alias attigerat curvas, præter circulum, & ipſas conicas Sectiones e circulo nimirum ortas, ac ipſi affines. Hic vero acturus de motu gravium in Cycloide, curva multo ſublimiore, occaſionem arripit innuendi, quæ pertinent ad immenſam curvarum linearum farraginem, ac ad varias earum claſſes, qua de re nos plura in ſupplemento.

b Quidquid habetur in natura corporea, ſuam figuram habet, quæ curvam

Una uni; nil revera nam conſtat, ut ipſa eſt;
Scilicet haud alia eſt, quam qua ratione requirit
Illa loci regio, telluſque, illa arbor, & ille
Ramus, & ille aer, & quæ ſunt cætera circum
Omnia. Si, genus hoc, mens ſingula cernere poſſit
Omnibus in rebus, cunctoſque ediſcere motus,
Quique queant varii ſignari exinde meatus,
Naturam prorſus pariter cognoſceret omnem,
Atque videret, ab hac quid in omni poſſit oriri
Tempore, quid nequeat, res & prædiceret omnes,
Quæ fierent, quocumque loco, quo tempore cumque.
Noſtra ſed eſt arcto nimium mens limite ſepta,
Et finita, nec extendit niſi per breve vires
Intervallum, & vix, ut conſtant, pauca tuetur.
Perſpicit [a] officium rectæ, clareque tuetur
Ipſa viæ, quo nimirum pars quælibet ejus
Parti cuique ſuper poni queat, aptarique:
Illud in orbe videt munus quoque, quo fit, ut arcus
Arcum alium, ex uno poſſit latere integere omnem.
Ex his, res aptas menſuris comparat omnes
Inter ſe, & rerum menſuras percipit ipſas,
Uſa velut primis his menſurarum elementis,

vam quandam continuam ſuperficiem plerumque exhibet, & ſæpe etiam, ut in foliis, curvam lineam præſefert, qua ſuperficies ipſa continetur. Immenſum harum curvarum diſcrimen hic Noſter innuit; omnes enim inter ſe diſcrepare deprehendimus, nec bina ejuſdem etiam arboris folia omnino ſimilia invenire licet, quod Leibnitiani a ſuo indiſcernibilium principio repetunt, plerique alii a diverſa ſimilium mixtione.

Porro omnes ejuſmodi curvæ ſi a cauſis neceſſariis ortæ ſint, ut a ſeminis forma, a conſtitutione terræ circumjacentis, a ſuccis, ab aere, & ventis, a ſolis calore, & aliis ejuſmodi ſexcentis (ſæpe enim & a principiis liberis pendent, ut ab irrigatione, a vicinis ignibus, aliiſque ejus generis), ſuam naturam ita habent ab illis principiis pendentem, ut qui principia ipſa, ac omnium materiæ particularum vires noſſet, ea autem Geometriæ, atque Mechanicæ cognitione polleret, ut definire poſſet, qui motus ex datis viribus quibuſcumque in data quavis maſſa conſequi debeant; is omnia penitus neceſſaria Naturæ phœnomena & cognoſcere poſſet, & in omnes venturas ætates prædicere: Verum id quidem humanæ mentis vires longiſſime excedit.

a Meas hic quaſdam de noſtra humana Geometria meditationes innuit, quas ego jam olim potiſſimum in diſſertatione de Maris æſtu innueram. Perſequar id ipſum aliquanto diligentius in ſupplemento, interea hic id exponam tantummodo, quod Noſter expreſſit.

Scilicet, æquales, quas congruere aſpicit, eſſe
Res inter ſe, itidemque pares remanere, pares ſi
Tum paribus partes addas, demaſve viciſſim.
Hinc recta ante alias via ſimplex eſſe videtur:
Poſt orbis; ſubeunt vario tunc ordine cuncti:
Hos ut contuleris notis, primiſque, meatus.
Hinc velut in claſſes varias disjungimus illos;
Dum varium numerum punctorum cernimus eſſe,
Quæ ſcindens viæ recta facit. Dum mutua rectæ
Occurrunt geminæ, puncto ſcinduntur in uno:
In geminis ſed quos ſecuit via recta meatus
Punctis; hos generis nos ponimus ordine primi:
Alterius generis ſunt, quos via recta ter auſit
Trajicere: occurrat quibus at quater; his tribuendus
Tertius eſt ordo: ſic eſſe ex ordine quarto
Cognoſces, quinus per quos eſt tranſitus olli:
Perque alias pariter poſſis te ferre viarum
Non alio ſpecies pacto, genera omnia luſtrans
Nimirum totidem, quot jam conſtare neceſſe
Eſt numeros, omni proin ſemper fine carentes.
Sunt tamen &. numeros, evectæ quæ ſuper, omnes
Tranſcendant; quoniam ſunt in finita profecto

Pun-

Noſtra humana mens immediatè intuetur proprietatem hanc rectæ lineæ, ut quævis ejus pars ſuperpoſita utcumque parti cuilibet, congruat ita, ut ab ea neque hinc, neque inde diſcedat, ſed ſolum, ſi æquales non ſint, non æque excurrat. Videt itidem facile, arcum circuli arcui æqualis circuli congruere, ſi aptetur cavitate utriuſque in eamdem plagam obverſa, licet oppoſita poſitione non congruant. Ex hac congruentia, & ex binis principiis: *quæ congruunt ſunt æqualia: æqualibus æqualia addendo, vel auferendo remanent æqualia*, pendet univerſa Geometria, reducendo omnia, quæ in ipſa Geometria demonſtrantur, ad rectarum, & arcuum circularium congruentias, ac æqualium per congruentias definitorum reductionem ad alia per additionem, vel ſubtractionem aliorum æqualium, quod ita ſe habere oſtendam in ſupplemento.

Hinc noſtræ menti ſimpliciſſima videtur recta linea, tum circulus. Cætera omnia linearum genera eo a nobis ſublimiora cenſentur, quo a rectis, & circulis recedunt magis, ac per rectas æſtimantur, per rectas rediguntur in claſſes, arcus ipſarum rectificantur, areæ quadrantur. Si quoddam aliud mentis genus alterius curvæ lineæ proprietatem aliquam immediate intueretur, ac alia principia, ut nos intuemur rectarum congruentiam, & congruentium æqualitatem, longe aliam Geometriæ rationem iniret, & rectam ipſam ad eam curvam exigeret.

Porro curvæ lineæ a Geometris ita diſtribuuntur in claſſes, ut quas recta

linea

Puncta, quibus recto poſſint a tramite findi.
Qui prima, ut docui, conſiſtunt ſede meatus,
Ipſi ſunt orbes, proſciſſoque exoriuntur
Quæ ſpecies tres de cono: qui deinde ſecundo
Ordine ſunt, creſcunt numero: quos tertius ordo
At recipit, longe plus creſcunt, claſſibus iſti
Diſcerni variis ut poſſint; jamque videmus
Diſcretos. Hic ingeniis prope terminus hærens;
Nam qui præterea ſunt, ſublimique locantur
Plus genere, immani numero concreſcere debent
Longe, & naturas ſortiri diſcrepitantes
Uſque adeo inter ſe, ut, quædam communia præter
Munera, quæ nobis generatim cognita conſtant,
Humanam exſuperent mentem, longeque recedant,
Obruitur ſiquidem, propius ſi tangere tentet.
Sed qui [a] tranſcendunt numerorum denique fines,
Illis eſſe magis multo natura putatur
Abdita, difficiliſque: tamen ſunt inter eoſdem,
Qui, quia naturam reſpectant cominus orbis,
Directæque viæ, miteſcunt denique nobis
Tractati, facileſque etiam, clarique videntur,
Et ſua conſpicienda animis pulcherrima præbent

Mu-

linea ſecare poteſt in binis punctis tantummodo (aliam enim rectam in unico ſecare poteſt) dicantur generis primi, quas in ternis, dicantur generis ſecundi, & ita porro. Et quidem eæ curvæ, quas recta in infinito punctorum numero ſecare poteſt, Geometricæ curvæ appellantur: ſunt autem aliæ, quas recta in infinito punctorum numero ſecare poteſt, ſi compleantur, quas *tranſcendentes* curvas dicunt.

Primi generis Geometricæ curvæ ſunt ſolæ illæ tres conicæ ſectiones, quas ſuperiore libro expoſuimus, adnumerato inter ellipſes etiam circulo. Secundi generis curvæ lineæ ſunt plures, quam ſeptuaginta, quas quidem Newtonus opuſculo in id ipſum conſcripto enumeravit. Tertii generis multo plures ſunt, quarum claſſes præcipuas Eulerus in Introductione in Analyſim infinitorum diſcrevit. Sublimiores aliorum generum nemo adhuc, quam multæ ſint, definivit; quarum quidem numerus ita in immenſum excreſcit, aſſurgentibus generibus, & proprietates tam variæ ſunt, ut vires humanæ mentis citiſſime ſuperent, de quibus, præter generales quaſdam proprietates admodum paucas, nihil omnino novimus; ut pudere ſane nos debeat imbecillitatis noſtræ, qui e tam immenſa curvarum linearum farragine, & pulcherrimis proprietatibus vix bina, vel terna novimus genera, eodem pacto, quo ſiqua natio tam hebes eſſet, ut numerationem ultra ternarium numerum producere non poſſet, quin mente confunderetur.

a Cenſentur quidem eo abſtruſiores

res

Munera, per varios quæ dehinc deducimus uſus.
Non meus hic labor eſt; alienis ſurgit in arvis
Hæc meſſis nempe, atque aliam reſecanda per artem.
Aſt æqui quoniam per & arcus ivimus orbis,
Et triplices coni per formas; dicere porro
Unum, nempe ipſo qui gignitur orbe, meatum
De tantis, quorum claudi natura repugnat
Intra ullos (quoniam tranſcendunt omnia) fines,
Uſus erit, pulchroſque ab eo cognoſcere mores
Noſtræ, quam excolimus, gravitatis, quamque doceri
Tam cupidi ſumus hìc; præſertim ſi quid in illo
Sit, quod in æquando commoti tempore proſit
Corporis, it currens quod ſcilicet, atque recurrens;
Ut referunt, quibus hæc tentata, retectaque primis.
Nonne operæ pretium eſt igitur cognoſcere, quali
Conſtet natura, quos & referatur ad ortus?
  Motum[a] propterea currus expende per urbem
Conſtratam lapide, æquati vel per ſola campi:
Dum graditur, mentem revolutæ, oculoſque rotai
Fige ſuper puncto, quod ſummo in margine perſtet,
Clavus ut eſt ferri, qui lato vertice ſupra eſt.
Hic modo tangit humum, ſubitoque relinquit equorum
Progrediente jugo, & paulatim tollitur alte
Evolvente rota ſeſe, obliquumque per auras
Tranat iter ſurgens, agilis dum culmina ſtringat
Sum-

res eſſe curvæ lineæ, quo altioris ſunt generis; unde, ut Noſter innuit, viderentur omnium abditiſſimæ cenſeri debere illæ, quas dicimus tranſcendentes. At ſunt inter eas ipſas nonnullæ, quæ ob affinitatem potiſſimum cum recta, vel circulo, a nobis multo melius cognoſcuntur. Earum ex genere ea eſt, quam *Cycloidem* dicimus, quam Noſter hìc pertractandam ſeligit, cum ſummi uſus ſit in Mechanica, de qua hìc agit, & ad pendulorum in primis theoriam, ob præclariſſima Hugenii inventa, perneceſſaria. Ejus igitur geneſim refert, præcipuas proprietates enumerat, tum leges quibus gravia per eam deſcendunt, diligentius exponit.

[a] Cyclois nimirum eſt curva linea, quam deſcribit in aere punctum aſſumptum in circumferentia circuli ita revoluti ſuper rectam lineam, ut poſt ejus tractum circumferentiæ toti æqualem, idem punctum a recta illa digreſſum ad eam redeat. Hujuſmodi geneſim Noſter per uſitatam imaginem clavi in rotæ per planum circumvolutæ ſuprema ſuperficie defixi menti luculenter exhibet. Patet autem, eam referre arcum quemdam convexum ad partes ſuperiores, binis cruribus plano illi innixum, ex quo intercipiat intervallum æquale circumferentiæ circuli genitoris, ac elevari ad eam altitudinem, quam habet diameter ipſius circuli.

Summa rotæ; quæ præteriens deſcendere parte
Incipit ex alia; & curvato pergere tractu
Illi conſimili, quem ſcandens egerat ante,
Donec ſeſe humilis demittat ad oſcula terræ:
Interea quam longus erit, ſe tramite recto
Totus humi protendet aheneus ambitus orbis.
Ergo ſui ſi tum veſtigia clara relinquat
Ille rotæ liquidis excurrens clavus in auris;
In ſpeciem via cujuſdam ſinuabitur arcus,
Recta nixus humi qui dorſo ſidera ſpectat
Convexo, terramque ſinu, ſublimis & alto
Vertice conſurgit tantum, quantum editus orbis,
Qui genuit, fuit ille rotæ, tantumque pateſcit,
In latera amplus, ut æquet aheni marginis oras
Orbem includentes, atque inter crura receptet.
Cui [a] fuerit natura viæ patefacta priori,
Ingens pugna fuit jamdudum, at ſanguinis expers,
Qualis, cum verbis contenditur inter inermes,
Eſſe ſolet: laudem ſimul Auſonis arripiebat,
Gallicaque ora ſimul: ſiquidem præclara reperta
Iſta videbantur; quantumvis pauca fuiſſent
Cognita, nec magnos, ut nunc, traducta per uſus.
Hæc quoque Tyrrheni, ſuetus quo vincere multa,
Ingenio tentata Viri; quod claudit in illo,
Nam cupiens, via curva ſinu, cognoſcere, quantum

Ma-

[a] Quæ ad Cycloidis hiſtoriam pertinent, hic innuir, quæ quidem ego diligentius aliquanto, & fuſius perſecutus ſum in eo opuſculo, quod de Cycloide, & Logiſtica adjeci ad calcem ſecundi tomi elementorum Tacquetianorum Monaldinianæ editionis. De prima ejus inventione acerrimè certatum primo circa annum 1643. inter Toricellium, & Robervallium, illo primam ejus conſiderationem tribuente in Italia Galileo, hoc in Gallia Merſenno, cum adhuc præclari ejus uſus ignorarentur; quæ quidem concertationes in apertas inimicitias exarſerunt, & rixas. At Vallifius oſtendit, multo ante eſſe curvam Bovillo, ac Cardinali Cuſano conſideratam. Aliæ tamen contentiones itidem graviſſimæ exarſerunt anno 1658. occaſione problematum a Paſchalio propoſitorum de hac ipſa curva præmiis promiſſis ei, qui ſolveret, in quibus partem magnam Vallifius habuit, qui tranſmiſſis per litteras ſolutionibus, & præmio, & vero etiam reſponſo fraudatus eſt, qua quidem occaſione multi in cycloidem inquiſiverunt cum ſucceſſu.

Hinc eam ego primam Cycloidalis hiſtoriæ partem cum ibidem expoſuiſſem, ad reliqua facturus gradum illud adjeci. *Atque hac prima quadam cycloidis quaſi adoleſcentia fuit, contentioſa illa quidem, & rixis, ac jurgiis plus æquo indulgens, reliqua ætas pacatior.* Multa enim alia ad

cam

Majus ſit ſpatium ſpatio, qui protulit, orbis;
In ſpatium formabat & hoc, formabat & illud,
Aſſimiles circumcidens, læveſque papyros.
Ponderaque imponens lance explorabat earum.
Ter quater intentis oculis, manibuſque retractans
Id repetebat, uti quid ab illo denique certi
Conjiceret: verum lanx terque, quaterque fefellit.
Scilicet audenti hic tergum Fortuna retorſit.
Eſſe ſed id triplum pondus, ſpatiumque repertum
Exinde eſt; itidem & curvati marginis oras
Hujus nempe viæ diſtendi poſſe quaternos
In tractus, medium ſecet horum ut quilibet orbem,
Orbem illum, quo flexa via eſt exorta voluto.
Nunc [a] converte ſitus; quod erat ſuper, effice, ut ima
Innitatur humo deorſum, & ſpectentur hianti
Aſtra ſinu, latique pedes in nubila tendant,
Tum grave pondus erit, (magnos id ſive per arcus,
Sive per exiguos punctum volvatur ad imum)

Sem-

eam pertinentia ſubinde detecta, & ſine ulla controverſia producta ſunt.

In prima illa parte plures inventæ ſunt geometricæ proprierares hujus curvæ, quas inter notatu digniſſimæ hæ quatuor: 1. baſim ejus æquari uni circumferentiæ circuli genitoris, 2. altitudinem diametro, ſive binis radiis, 3. aream tribus arcis, 4. perimetrum curvam quatuor diamerris; quorum priora duo ſuperius a Noſtro expreſſa in ſuperiore nota innuimus, quæ quidem per ſe ipſa parent, ac vel ipſi Bovillo, & Cardinali Cuſano, baſi ejus curvæ ad circuli quadraturam uſis, omnino patuerant. Reliqua duo hic Noſter exponit, & tertium quidem a Galileo *Tyrrheno viro* adhuc juvene diu, ut Torricellius teſtatur, & geomerrica contemplatione, & vero etiam mechanicis rationibus fruſtra quæſitum (cum nimirum delineata diligenter figura, & hinc ejus ſchematis, inde pluribus formis circuli genitoris ad ſtateram appenſis, repetita ſæpius dimenſione, fato quodam invenerit ejus aream minus, quam triplam areæ circuli genitoris, ac metu irrationalitatis abſterritus ab incœpto deſtiterit) id ipſum Torricellius, idem adhuc adoleſcens, a Viviano edoctus methodum ducendi tangentes, demum invenit, ac ſex diverſis demonſtrationibus confirmatum tranſmiſit in Galliam. Quartum Wrennus invenit primus, primus edidit certe, qui & datæ parti cuique perimetri rectam æqualem exhibuit.

In altera ipſius cycloidalis veluti vitæ parte illâ pacatâ multo plura detecta ſunt ab Hugenio, a Jo: Bernoullio, a Parentio, a Guidone Grandio, quæ ſingula in eodem illo meo opuſculo videre poterit, qui velit.

a Expoſita Cycloidis geneſi, & præcipuis geomerricis ejus proprietatibus, exponit præcipuam itidem ejus proprietatem mechanicam ab Hugenio inventam, quod nimirum, ſi ea invertatur ita, ut crura ſurſum tendant,

Semper ut æquali contingat tempore metam;
Tales eſſe loco quoniam quocumque neceſſe eſt
Flexus id per iter, motum ut quæ ſola ſecundat
Corporis a tergo gravitas, minuatur eadem,
Qua ratione arcus etiam minuuntur, eunte
Corpore qui, punctoque intercipiuntur ab imo;
Propterea ut non eſſe alio diuturnior alter
Deſcenſus queat, aſcenſuſque, ſit, ut libet, impar:
Ut non eſſe mihi jam multis ante probatum eſt.
 Majus [a] erit tempus deorſum per quemlibet arcum
Tempore, quo toto deſcenderet axe rotai,
Seu revoluti orbis, grave corpus, major ut axe
Ipſo dimidius nimirum eſt ambitus orbis.
Atque id propterea prope duplex tempus, oportet,
Temporis illius conſtet, quo lapſus in arcu
Exiguo fieret fœcundi ſcilicet orbis
Illius, ut ſuper a dictis deducere poſſis.
 Hujus [b] præterea præ cunctis una viai
Optima dos; per eam quod puncta celerrimus extet
Trajectus gemina inter, ubi unum celſius, alterum
Eſt depreſſius, obliqua & regione viciſſim

 Con-

dant, ac baſis quidem adhuc horizontalis ſit, hiatus vero cælum ſpectet, tum e quavis diſtantia a puncto infimo demittatur grave, quod per ipſam cogatur deſcendere, idem omnino tempus debeat impendere in eo deſcenſu ſecluſa omni aeris reſiſtentia, utcumque magnus, vel parvus is arcus ſit, quod in circulari arcu exiguo non accurate, ſed proximè evenire oſtendimus ſuperiore libro.

Demonſtratio petitur ex eo, quod, ut in ſupplemento videbimus, vis gravitatis reſpectiva, quæ ad obliquum deſcenſum ſollicitat, in cycloidali arcu, eſt ſemper, ut arcus reſiduus uſque ad punctum infimum, ſive, ut ſpatium percurrendum, quod ubi accidit, eodem prorſus tempore ad punctum infimum deveniri ex quavis diſtantia demonſtravimus in notis ſuperioris libri ad verſum 1911.

a Hic jam determinat ipſum tempus deſcenſus per arcum cycloidis. Affirmat autem, fore id tempus ad tempus caſus perpendicularis per diametrum circuli genitoris, ut eſt circuli ſemicircumferentia ad diametrum, quod quidem in ſupplemento demonſtrabimus.

Addit autem inde duci illud: tempus deſcenſus in eo arcu fore duplum temporis in arcu minimo circuli genitoris. Res quidem ita ſe habet: nam ex nota ad verſum 1978. lib. 2. tempus deſcenſus per arcum minimum circuli ad tempus deſcenſus per diametrum habet rationem, quam quadrans peripheriæ habet ad diametrum ipſam, adeoque rationem duplo minorem priore illa.

b Tranſit ad aliam pulcherrimam cycloidis proprietatem, quam Jo: Bernoul-

Conſita : Namque loca hæc quæ recta breviſſima nectit
Tum via, tranatur cunctis non ocyus ; æqui
Orbis quippe cadunt arcu, quam pondera chorda,
Ocyus ; exoriens ſiquidem ſuga major ibidem eſt
Ob mage præcipitem flexum ; penſare ruentem
Nec jam ut poſſit iter paulo productius illam.
At ſi alii ductus æquo curventur ab orbe
Diverſi, diverſa cadet per tempora pondus :
Creſcet mobilitas, ſi primo pendeat ortu
Inclinata magis via : ſed nimis illa deorſum
Inclinatur ubi in præceps, diſtenditur amplum
Tum ſpatium, quod ſit tranandum, temporis addens
Tantum, ut jam conſtent majora impendia lucris.
Quapropter debent eſſe & declivia tanta
Principio, & dein tanta viæ ſpatia, utraque nexa
Ut ſimul efficiant breviori tempore lapſum.
  Fors * hunc edocuit volucres natura meatum,
Cum celſa de rupe, vel altæ e vertice pini
Collem alium, nemoriſve imum latus alite penna,
Conſpectave petunt præda, ſociave jugali ;
Illæ non liquidi directis tramitis oris

De-

noullius, magnus ille integralis calculi amplificator, invenit, quod breviſſimi deſcenſus ſit, ſive ut græco vocabulo dicunt *vrachiſtochrona*. Si nimirum a quodam puncto ad aliud punctum, non in eadem recta verticali ſitum, nec magis elevatum, abire debeat grave corpus, recta linea breviſſimum iter exhibebit, ſed non breviſſimum tempus. Si enim via incurvetur ita, ut initio magis ad verticalem poſitionem accedat, quam recta illa, fieri poteſt, quemadmodum in nota ad verſ. 2028. lib. 2. vidimus contingere in arcu circuli reſpectu ſuæ chordæ, ut major velocitas initio acquiſita ob deſcenſum minus obliquum, compenſet majorem itineris curvati longitudinem, & tempus contrahat. Si curvatura illa ſit nimis exigua, nimis exiguum eſt lucrum ; ſi eſt nimis magna, nimia ſinuati itineris longitudo poteſt brevitati temporis plus obeſſe, quam proſit initialis major declivitas cum majore velocitate conjuncta. Eſt autem quædam curvatura ejuſmodi, ut habita ratione & celeritatis, & longitudinis viæ, minimum habeatur tempus. Eam curvaturam, quæ id minimum præſtet, eſſe illam ipſam, quam habet cycloïs, demonſtravit Bernoullius, ita, ut ſi fiat cycloïs inverſa, quæ ortum habeat in puncto, ex quo debet corpus diſcedere, ac tranſeat per punctum, in quod abire debet, tempus deſcenſus evadat brevius, quam ſi eo per ullam aliam viam deferatur. Idem autem, & illud docuit, quo pacto ejuſmodi cycloïs deſcribi poſſit.

a Videmus omnino volucres, dum a ſublimiore loco ad humiliorem oblique deſcendunt, non per rectam abire lineam,

Decurrunt; ſed devexa regione feruntur
Principio, tranantque loca inferiora petitis
Inflectuntque viam, clivoſa ut valle, cavatam;
Quippe ita demiſſas poſt impetus evehit ipſe
Ocyor apricum ad collem, frondentis ad umbras
Aut nemoris: tremit improviſo oppreſſa columba
Ungue ſuper; gaudetve ſuo conſorte recepto
Protinus, & teneros meditari cœptat amores.
At [a] nos huc Ratio natura certior ipſa
Induxit nuper, qua ſuemus in omnia, quæ ſunt
Abdita cumque animis, felici irrumpere niſu.
Hoc oculis etiam, non tantum mente, tueri
Poſſis, ſi ducas lignove, vel ære canalem
Haud aliter flexum, quam qua ratione repoſcit
Iſtud iter, rectumque itidem, & quoſcumque libebit
Diverſis alios ſe ductibus inſinuantes,
Tantum ut communis ſit apex, & terminus ollis.
Uno deinde globos ſi emittas tempore, ductu
Quemque ſuo: metam ante alios contingere cernes,
Qui ruet exortos revoluto ex orbe per arcus.

lineam, ſed per curvam quamdam, & proprio ponderi in ipſo initio nonnihil concedere. Suſpicatur Noſter ejuſmodi viam cycloidalem eſſe, ac ipſas volucres per eam delabi curvam, quæ in gravi oblique deſcendente breviſſimum tempus expoſcit. Verum obſervanti patebit, curvaturam illam in avibus eſſe multo minorem, quam cyclois poſtulet, potiſſimum ſi diſtantia locorum horizontalis aliquanto ſit major; & hic avium volatus per aerem liberum plurimum differt a deſcenſu obliquo gravium per curvum canalem, in quo aſcenſum determinat velocitas jam acquiſita, & reſiſtentia canalis ipſius. Illi reſiſtentiæ in avibus ſuccedit actio alarum, & caudæ, quæ actio ipſas volucres fatigat ita, ut ſi ex minimum laborem ſuum cum breviſſimo tempore velint conjungere, quandam aliam longe a Cycloide diverſam debeant, ſed itidem curvam lineam, percurrere. Haud ego tamen abnuerim, maximum quodpiam compendium in ejuſmodi caſibus ſectari volucres, non quidem theoria aliqua, ſed uſu, atque exercitatione edoctas, ut pueri uſu, atque exercitatione Staticæ leges paulatim addiſcunt, ne cadant.

[a] Calculus nimirum integralis, quo Bernoullius tam faciliter ubique eſt uſus, cycloidis hunc brachiſtochroniſmum detexit, quem tamen ego ſyntheticè per Geometriam, ut pluribus conſulam, demonſtro in ſupplemento. Experimento autem idem etiam confirmatur. Excavantur canales plurium curvaturarum, cum recto itidem canali, qui ab eadem altitudine per eandem amplitudinem horizontalem oblique deſcendant, inter quos & cycloidalis ſit aliquis. Æquales globi ſimul ex omnium verticibus demittuntur,

Præterea [a] quoque ſcire licet, cum decidit alte
Per, genus hoc, arcus grave corpus, in omnibus æque id
Punctis uſque viam premere hanc; vi namque prementi
Reſpondere fugam celerem reperimus; eoque,
Quolibet exiguo vis ſit quo major in arcu
Iſta premens, contra hoc minor eſt mora deſuper urgens.
Nunc, [b] quod opus, poſſimus uti res nectere rebus
Carmine vulgatis alio, reminiſcere, quæ ſunt
Illic de vario deſcenſu, ſive per arcus,
Prodita, ſeu rectà; illa aliis neque vera putato
Eſſe locis, urget niſi qua regione locorum
Res gravitas, æquos adjungens ictibus ictus,
Conſtans, ut terram circum diffunditur omnem,
Atque ubi nilve, parumve meantibus officiatur
Corporibus. Verum vigeat ſi legibus illa
Diverſis, infinitos confingere quarum,
Si ſit opus, libeatque, modos, præſcriptaque poſſis,
Si quoque particulis variis loca conſita, per quæ
Trajicitur, varia ratione morentur, & obſtent,
Experiuntur uti reſtantes aeris auras,
Vimque novam venti, ſuſpenſo corpora fune
Qui vibrant teneris immixti ſæpe puellis

Lu-

tur, ac obſervare omnino licet globum per cycloidalem canalem delapſum omnium citiſſime ad fundum pertingere.

Verum in ejuſmodi experimento notandum illud, ſi globus ſit aliquanto major, ut inſtar puncti haberi non poſſit, canalem non debere eſſe ejus curvæ, quam centrum globi debeat deſcribere, ſed alterius ab ea diſtantis ad perpendiculum per globi ſemidiametrum. Licet, ne centri quidem ipſius globoſæ figuræ habenda accurate ſit ratio, ſed centrum quoddam oſcillationis conſiderandum eſt, de quo infra, quod ipſum in cycloidali motu mutatur perpetuo in ipſo deſcenſu. Sed iſta ſublimiora multo ſunt, quam ut hic proponi poſſint, & quæ diximus de deſcenſu corporum per curvas, intelligenda ſunt de corporibus conſideratis per modum puncti, in quibus ſi moles, & figura conſideratur, conſideratio ipſa, mirum, quam ardua evadit, & implexa!

a Innuit hic cycloidis proprietatem a Parentio detectam, quod nimirum, dum grave per ipſam deſcendit, æque ubique premat ipſius arcum, ſi preſſio computetur a vi tam gravitatis, quam centrifuga ipſi arcui perpendiculari, & a mora in arcu ipſo, nam vires illæ inveniuntur eo majores, quo velocitas eſt major, nimirum quo mora in quovis arcu eſt minor.

b Hic iterum notat illud, quod in fine ſuperioris libri notaverat, hæc omnia, quæ ipſe expoſuit de gravium deſcenſu libero, de projectis per aerem, de deſcenſu per arcus circuli, & per arcus cycloidales, locum habere in hypotheſi Galileana gravitatis conſtan-

Digitized by Google

Ludentes Juvenes, cum feſto tempore gaudent
Per nemus effundi latum, per florea prata,
Et lætos ineunt cœtus, riſuſque, jocoſque;
Omnia mutari varia ratione, modiſque
Tum par eſt; alio deſcenſus ordine ſeſe
Inter erunt, alio quoque tempora, diſſimilique
Natura, queis tunc erit uſus, opuſque, meatus.
Hæc via difficilis tamen eſt, obductaque multis
Sentibus, illæſo vix ut pede tranſeat illuc
Ipſa novis pollens numeris ars; multiplicesque
Non magnæ res interdum confundere poſſunt
Omnia, & ex oculis veri ſecludere lumen.
Sic ubi pulvereos tranſmittunt agmina campos,
Quadrupedumque leves inſultant undique turmæ,
Ilicet in nubes ſeſe globus evehit ater
Pertenui quamquam, at condenſa ſpiſſus arena,
Involvitque diem, mediumque offundere ſolem
Audet, nocturnaſque oculis inferre tenebras.
Deinde [a] opus eſt, cum jam patefactum pluribus extet,
Corpora curvatos ut eant demiſſa per arcus,
Hoc quoque noſſe, ubi jam prolapſum corpus ad imum
Venerit aut æqui, aut ex æquo cujus origo eſt,
Quem

ſtanter agentis, per directiones parallelas, & ſeclusa quavis reſiſtentia, ut eſt reſiſtentia aeris, quam nimirum experimur in quovis concitatiore motu per aerem, in quo ventus quidam exſurgit ab incurſu noſtro in aerem ipſum, ut & pueris in fune ſuſpenſo per ludum oſcillantibus accidit, qui vehementiorem ventum ſentiunt.

In diverſis gravitatis hypotheſibus, quæ plurimæ confingi poſſunt ita, ut & directio mutetur, & magnitudo, quemadmodum in ampliore terræ tractu accidit convergentibus directionibus ad intima terræ viſcera, & in theoria gravitatis Newtoniana, in qua gravitas ipſa decreſcit in ratione, quam dicunt reciprocam duplicatam diſtantiarum, ac in diverſis hypotheſibus reſiſtentiæ a diverſis cauſis ortæ, ut a frictione canalis, ab aere, vel aliis quibuſcumque, nam aeris ipſius reſiſtentia partim videtur ſequi quadratum velocitatis, partim ipſi velocitati reſpondere, partim & conſtans eſſe, ac ſolis temporibus proportionalis, multo difficilius determinantur illa omnia, quæ ideirco Noſter ne attingit quidem. Multa ex iis, quæ ad diverſas gravitatis hypotheſes pertinent in ſpatio non reſiſtente, definivit Newtonus principiorum lib. 1, quæ autem ad reſiſtentias pertinent, libro 2. perſecutus eſt, ſed in re utique maxime obſcura cum multo minore ſucceſſu, quam in reliquis.

[a] Quod in ſecundo libro a verſu 981 affirmaverat de aſcenſu rectilineo cum velocitate acquiſita in fine, id hic de curvilineo itidem affirmat: nimirum ſi per

Quem tibi nimirum nuper ſignavimus, orbis,
Aut flexi alterius cujuſviſcumque meatus,
Si convertere iter ſurſum cogatur eadem
Protinus impulſum, qua ſe tum denique agebat,
Mobilitate, viam releget, ſalienſque meabit,
Sed magis, atque magis tardatum prorſus eadem,
Qua ratione prius celerabat, donec ad illud
Deveniat, labi jam cœperat unde, cacumen;
Nimirum veluti de recto diximus ante
Deſcenſu, aſcenſuque, viæ ratione reflexa.
At ſi non cogatur iter convertere ſurſum
Corpus, ubi flexi pars curſus tangitur ima,
Præteriens aſt æqualem ſimilemque per arcum
Ulterius poſſit procurrere, parte ſubibit
Protinus ex alia, qua venit mobilitate,
In clivum, ſurſumque citis conſcendere perget
Greſſibus, adverſos donec gravitatis ob ictus
Omnis paulatim ſurſum fuga decutiatur,
Non tamen ante, locum quam denique ſcandat ad illum,
Qui ſit, ut alter erat, lapſus quo cœperat, altus;
Deinde viam retro legit, acceleratque ruendo,
Ut prius, & partem jam pernix tranſvolat imam,
Tardatoque iterum greſſu loca prima reviſit,
Atque iterum deſcendit, & inſilit, itque, reditque,
Nec mora, nec requies foret unquam, perpetuumque,
Siſyphio veluti clivo lapis ille, mearet,
Officeret niſi quid fluidus, dum ſcinditur, aer:
Propterea fiunt procurſus uſque minores,

Et

per eundem arcum impellatur corpus cum velocitate acquiſita in deſcenſu per arcum ipſum, & ab omni reſiſtentia abſtrahamus animum, debere id corpus aſcendere ad illud ipſum initium arcus ipſius, ex quo prius deſcenderat, cum eædem vires in aſcenſu velocitatem per eoſdem gradus imminuant, per quos auxerant.

Quod ſi canalis ille excavatus, ubi ad imum punctum devenerit, flexu in horizontalem deſinenre, progrediatur per curvam priori protſus ſimilem, & æqualem, ut per arcum circularem, vel cycloidalem illum continuatum, idem accidet omnino in illo aſcenſu ex parte oppoſita per eam curvam prorſus ſimilem, & ſimiliter poſitam, quod accideret in regreſſu cum velocitate finali per eandem illam priorem curvam; nimirum, ſeeluſa reſiſtentia omni, fiet aſcenſus ex parte oppoſita æqualis primo deſcenſui, & æquè diuturnus, tum deſcenſus iterum, ac iterum aſcenſus ex parte priore, atque ita continuabitur motus per oſcillationes æque diuturnas, ac perennes.

Et loca paulatim minus edita, denique motus
Ut neque ſentiri, neque jam queat eſſe profecto.
Nunc [a] age de filo, ſeu pendula corpora virga
Mente, oculiſque ſuos ſeſe vibrantia in arcus
Conſequere, & mecum, quid prodeat inde, revolve.
Concipe propterea ſuſpenſo in corpore quidquid
Ponderis eſt, puncto compreſſum cogier uno,
Expertemque omni virgam gravitate relinqui,
Demiſſum aut filum. Punctum ſe flectet in arcus
Haud alia ratione means, ſalietque, cadetque,
Ductibus ac ſi iſdem ſolido foret ære cavatum,
Lævi aut marmore iter, corpuſque volubile ſeſe
In ſectos huc, atque illuc provolveret arcus.
Quæ vires hic namque premunt ſola deſuper, illic
Diſtendunt filum deorſum, virgamve trahentes,
Eliduntque vel his ſe obſtaclis proinde, vel illis:
Aſt aliæ, quæ tum ſuperant, atque a latere urgent,
Atque hic, atque illic ſeſe ſunt inter eædem:
Hic æquis ſpatiis, atque æquo tempore, ut illic,
Perpetui pariter procurſus conficerentur,
Ni proſciſſa viam ſublimem contrahat aura,
Et filum, flecti dum pugnat, virgave reſtans.
Verum [b] cum minuunt, genus hoc, obſtacula motum
Pon-

[a] Expoſitis iis, quæ pertinent ad deſcenſum per curvos canales, & ad aſcenſum, ac perpetuas oſcillationes, gradum jam facit Noſter ad oſcillationes pendulorum, ubi oſcillant pondera appenſa vel filo flexili, vel inflexili virgæ. Sed hic in ipſo exordio totum corpus concipit in unico puncto collectum, & animum abſtrahit ab omni gravitate, & inertia fili ipſius, vel virgæ. Pendulum, in quo unicum grave in unico puncto collectum, & filo, vel virga deſtituta omni gravitate, ac vi inertiæ ſuſtentatum oſcillationes ſuas perficit, dicitur pendulum ſimplex, cujus conſideratio eſt multo ſimplicior, & facilior. Abſolutis iis, quæ ad ipſum pendulum ſimplex pertinent, via ſternitur ad pendula pluribus ponderibus conſtantia, & ad conſiderationem figuræ ponderis affixi, fili, vel virgæ, ad quæ requiritur conſideratio cujuſdam, quod dicitur centrum oſcillationis, de quo aliquanto inferius mentio fiet.

In ſimplici pendulo omnia fient, ut in illo canali curvilineo; nam tenſio fili, vel virgæ eundem effectum præſtabit, quem præſtaret preſſio canalis ſuſtentantis grave, & ſolum aberit illa reſiſtentia, quam frictio parit in ipſo canali, ac ipſi ſuccedit aliqua fili, vel virgæ reſiſtentia in ipſa ſuſpenſione, & reſiſtentia aeris ipſi filo, vel virgæ reſpondens, qua fit, ut oſcillationes ſenſim minores, ac minores fiant, donec motus etiam omnis ad ſenſum ſaltem deſinat.

[b] Reſiſtentiæ omnes, quæ habentur in motu penduli, quæ quidem poſt oſcil-

Ponderis haud parvi præſertim, in quolibet illo
Excurſu nequeas, turbatum in tempore quid ſit,
Percipere; atque ideo cum ſint paria arcubus orbis
Tempora in exiguis, ut diximus ante, neceſſe eſt,
Non mutata via contracta tempora conſtent,
Proſciſſis contracta auris, filove rigente.
Nec minus & tempus pariter conferre valebis
Omnis itus, reditusve illo cum tempore, quo ſe
Per duplex rectà devolvere corpora poſſent
Fili intervallum (quod totum æqualiter orbem
Finderet a ſummo nimirum culmine ad imum,
Orbis cujus erunt arcus pars). Vincitur ergo
Illi hoc collatum tempus, cujuslibet orbis
Ora ut dimidia tranſverſus vincitur axis:
Nimirum, quoniam parvo deſcenſus in arcu
Solus (itus qui dimidius ſit nempe) ea poſcit
Tempora, quæ talem rationem ad tempora ſervent
Altera, confit iter toto quibus axe deorſum,
Inter ſe qualem ſervant in quolibet orbe
Quarta oræ circum ductæ pars, axis & ipſe.
Si [a] duo propterea ſint corpora pendula filis
Tractu non æquo productis, quilibet illis

Tem-

ſcillationes plurimas totum etiam motum extinguunt, in ſingulis oſcillationibus vix ullum ſenſibilem effectum edunt, potiſſimum ſi oſcillationes ſint exiguæ. Præcipua enim reſiſtentia, quæ ab aere provenit, a velocitate pendet ita, ut ubi velocitas eſt perquam exigua, ſit itidem perquam exigua. Cum igitur in exiguis arcubus circularibus deſcenſus, & aſcenſus, utcumque arcus ipſi ſint paulo majores, ſive paullo minores, ad ſenſum æque diuturni ſint, ut in ſuperiore libro oſtendimus, etiam oſcillationes exiguæ penduli filo, vel virga ſuſpenſi ab unico puncto, & libere oſcillantis, æque diuturnæ erunt, cum in circulari arcu fieri debeant.

Porro tempus unius oſcillationis in arcu minimo ad caſum per duplam fili altitudinem eſt, ut circuli ſemicircumferentia ad diametrum. Nam per not: ad ver. 1978. lib. 2. tempus deſcenſus per arcum exiguum, quod eſt dimidium temporis integræ oſcillationis ex deſcenſu, & aſcenſu compoſitæ, eſt ad tempus caſus per diametrum circuli, quæ diameter eſt æqualis duplæ longitudini fili, ut quadrans perhipheriæ ad diametrum, Erit igitur, ut ibidem notavimus, tempus integræ oſcillationis ad tempus caſus per duplam fili longitudinem proxime, ut 11 ad 7: nam ratio circumferentiæ totius ad diametrum eſt ex Archimede eadem, ac 22 ad 7.

a Ex iis, quæ in ſuperiore nota demonſtrata ſunt, facile deducitur comparatio inter bina pendula, quam hic Noſter perſequitur. Nimirum quadrata

tem-

Temporibus fient procurſus, quæ, repetantur
Si ſemel in ſeſe, reſpectant mutuà eodem
Se pacto, quo ſe reſpectant fila viciſſim;
Propterea que quater ſi filum longius extet
Filo alio; fiet procurſus tempore duplo
Quilibet; hoc etenim repetitum protinus in ſe
Si foret, alterius bis duplum tempore fiat,
Qua ratione inter ſe conſtant fila, neceſſe eſt.
Quandoquidem quoque ſi deſcendant recta per axes
Corpora, percurſis reſpondent axibus ipſis,
Si repetita ſemel ſint in ſe, tempora quæque.
Quapropter motus breviore reciprocus ille
Crebrior in filo eſt, ſi tempore fiat eodem;
Nimirum numerus, ſemel in ſe quem repetiti
Efficerent motus, numero foret auctior illo,
Qui ſemel in ſe itidem repetitis prodit in auras
Motibus alterius fili, productius illo
Hoc filum velut eſt; ratio par conſtat utrinque.
Proinde, quater filum quod longius, unius horæ
Tempore tot faciet procurſus, ut brevioris
Sint plures duplo: hi, ſi in ſe repetantur, abibunt
Porro in bis duplices; & proin quater exſuperabunt
Illos; id quanto filum productius extat.
Porro [a] mobilitas, qua lapſu corpus in imo

temporum ſunt, ut longitudines pendulorum. Nam cum ſingulorum tempus ad tempus deſcenſus per duplam fili longitudinem in eadem ratione ſint, erunt in binis pendulis tempora ſingularum oſcillationum inter ſe, ut ſunt tempora deſcenſuum per duplas filorum altitudines. Cumque ex iis, quæ de motu uniformiter accelerato dicta ſunt, ſint in deſcenſu quadrata temporum, ut ſpatia, erunt etiam quadrata temporum, quibus ſingulæ oſcillationes fiunt, ut duplæ filorum longitudines, adeoque etiam, ut longitudines ſimplices; & proinde pendulum quadruplo longius, duplo diuturniorem habebit oſcillationem.

Hæc quidem, ubi eadem vi acceleratrice urgentur corpora ad deſcenſum; nam ſi vires eſſent diverſæ, ut ſi alter globus oſcillaret libere, alter in plano inclinato, tum vero ejuſdem longitudinis pendula lentius oſcillarent, ubi vis eſſet minor, & ut pendula eodem oſcillarent tempore, deberent ipſorum longitudines viribus accurate reſpondere, quod patet ex iis, quæ dicta ſunt in not. ad verſ. 1485. libri 1, quod nimirum viribus diverſis eodem tempore in libero deſcenſu percurrantur ſpatia ipſis viribus proportionalia. Id uſui nobis erit inferius, ubi de inæqualitate gravitatis in diverſis terræ locis. ſed de his plura in ſupplemento.

[a] Determinat velocitatem in imo puncto arcus. Ea nec pendet a ſola ar-

Effugit, a ſolis fili non tractibus orta eſt
Diſtenſi, ſolis ampli neque tractibus arcus;
A ſolis verum ſpatiis ſublimibus illis,
A quibus incœpit deſcenſus, quæ tamen ipſa
A filis pendent longis, & ab arcubus amplis;
Mobilitas quoniam eſt eadem, velut ante probavi,
Ac ſi ſe rectà corpus demitteret illinc.
Proin ſimul & fili protenſi, arcuſque patentis
Si noſcas tractum; poteris quoque noſcere, quæ ſit
Maxima mobilitas, extremoque ultima fundo:
Proin poteris, geminis vel plumbea pondera filis
Si prope ſuſpendas, vel eburnea mole rotunda,
Vel quæcumque velis, facili ratione cadentum
Pertentare omnes ictus, & noſcere leges
Corporum in impulſu; ſupera quæ carmine longo
Omnia te docui, & vera ratione probavi.
Scilicet unam ad rem non uno tramite tantum
Perveniſſe queas; aditus patet undique rerum,
Si tamen inſiſtas recta regione, neque extat,
Quod nequeas & ab hac, & ab illa parte tueri,

Et

arcus amplitudine, nec a ſola longitudine fili, ſed ab altitudine initii arcus oſcillando deſcripti ſupra imum punctum, cum ex eadem altitudine eadem velocitas acquiratur per quamcumque lineam deſcenſus fiat, juxta ea, quæ dicta ſunt in nota ad verſ. 1820. lib. 2. Sed hæc ipſa altitudo haberi poteſt per arcum, & fili longitudinem; eſt enim, ut facile demonſtrabitur in ſupplemento, ut dupla fili longitudo ad chordam arcus deſcendendo deſcripti uſque ad imum punctum, nimirum ad rectilineam diſtantiam initii deſcenſus a puncto infimo, ita hæc ad altitudinem illam. Quare cum facile utramque metiri liceat, habebitur & altitudo illa, quæ reſpondet velocitatis quadratis.

Addit Noſter hujuſmodi determinationem velocitatis faciliorem reddere inveſtigationem legum, quæ in corporum colliſione obſervantur, de quibus in ſecundo libro fuse egimus. Si enim globi ita ſuſpendantur a filis æque alte affixis, ut dum libere pendent, ſe contingant, tum ad latera deducantur hinc, & inde, utcumque inæqualiter, demittanturque ita, ut in imo puncto ſibi occurrant, quod fiet, ſi arcus non ſint ingentes reſpectu totius circuli, & ſimul demittantur, cum nimirum tempus deſcenſus debeat evadere ad ſenſum idem in arcubus utcumque inæqualibus; velocitates autem in fine, quibuscum congrediuntur, & velocitates, cum quibus digrediuntur ab invicem, erunt, ut chordæ arcuum deſcriptorum deſcendendo, vel aſcendendo, quarum nimirum quadrata ob communem diametrum circuli ſunt itidem, ut illæ altitudines. Datis autem velocitatibus iis, facile eſt omnes regulas colliſionis experiri, ut diximus in ſupplemento lib. 2.

Et quod perceptum non longe plurima prodat.
Quod [a] ſupereſt, rigida ſi jam duo corpora eadem
Innectas virga, verum disjuncta viciſſim,
Hoc ſit uti propius, punctoque remotius illud,
A quo ſuſpenſa eſt; nec itum jam poſſe videbis
Tam celerem fieri, quantum, vicina, repoſcit,
Quod loca conſedit, neque tantas ducere lentum
Tardatumque moras, quantis diſtantius iret
Corpus: at in medio punctum eſt, quo, ſi utraque ſtarent
Unum juncta ſimul facientia pondera corpus,
Virga impulſa pari vibraret tempore ſeſe,
Quo nunc ſe vibrant, cum ſic disjuncta recedunt.
Hoc igitur puncto confingimus eſſe recepta
Corpora, & hoc finem vibrantis ponere virgæ.
At quoque ſi corpus tantum ſuſpenditur unum,
Attamen ut filum grave ſit, ſeu virga; locatæ
Corporis, & fili partes, virgæve rigentis
In regione ſitus varia, varieque remotæ
A clavo retinente ſuper, diverſa requirent
Tempora; propterea punctum id commune neceſſe eſt

 Om-

[a] Innuit hic, quæ pertinent ad centrum oſcillationis, quæ quidem cum ſublimiorem geometriam requirant, innuere tantummodo poterat. Si non unicum pondus filo ſuſpenſum oſcillet, ſed bina pondera connexa in diverſis diſtantiis a puncto ſuſpenſionis, ac virga ipſa concipiatur inflexilis, & ſine pondere, & ſine inertiæ vi; oſcillatio neque tam cito peragetur, ut requirit pondus ſuperius, neque tam lente, ut requirit inferius, ſed medio quodam tempore. Erit autem cujuſdam longitudinis pendulum ſimplex, quod eodem illo tempore oſcillaret, ſive erit aliquod punctum, in quo ſi utrumque pondus ſimul eſſet, oſcillatio eo tempore perficeretur, quo perficitur. Id punctum dicitur centrum oſcillationis. Ac eodem modo ſi plurima pondera connexa inter ſe oſcillent; centrum oſcillationis dicitur id punctum, in quo ſi ipſa eſſent ſimul omnia, eodem tempore oſcillarent.

Porro in inveſtigando oſcillationis centro plurimum initio ſuperioris ſæculi in Gallia potiſſimum deſudatum, Merſenno extimulante ingenia, at diu omnino irritus labor extitit. Chriſtianus demum Hugenius veram, & cum experimentis optime conſentientem determinationem prodidit, mira ſane felicitate; puto enim ejus principia laborare plurimum, & errores in iis admitti, qui ſe mutuo corrigant, ut oſtendam in ſupplemento, ubi, quæ ad ipſam centri hujuſce determinationem pertinent pro quavis figura, quam breviſſime perſtringam. Sunt autem maxime neceſſaria potiſſimum ea, quæ pertinent ad centrum oſcillationis globi, qui ad oſcillationes ipſas plerumque adhiberi ſolet. Cum enim aliæ ejus partes ſint puncto ſuſpenſionis propiores, aliæ remotiores ab ipſo, determinandum eſt centrum illud oſcillationis medium, quod cum centro figuræ nequaquam congruit.

Omnibus eſſe, ſimul collectæ ut ſcilicet illo,
Non alio facerent, quam quo nunc, tempore curſus.
Hoc labor ante fuit medium perquirere punctum
Irritus; incerta longum regione latebat:
Vera patet numeris ſed denique perveniendi
Huc ratio nobis; jam punctum oſtendere certo
Poſſumus indicio, jamque, hic eſt, dicere, tota
Ponderis inſita vis; fili, virgæve tenacis
Verus limes hic eſt; menſura hinc incipit omnis.
At non hos nobis numeros tentare licebit;
Scilicet ingredimur pedibus vada proxima arenæ
Littoreæ, noſtroſque profundius in mare greſſus
Paulatim inferimus, donec plus altus hiatus,
Quam valeant Muſæ conſiſtere, gurgitis extet:
Proſpexiſſe juvat tum immotos, atque aliorum
Conſectari oculis veſtigia magna; vel æquo
Quæ ſunt dextra ſolo tantum vada, lævaque inire.
Hoc [a] animadvertant punctum, qui tempore certo
Quantum intervalli percurrant, libera deorſum
Corpora cum properant, penitus noviſſe laborant:
Nam tuimur cum forte cadentia; non fuga præceps
Illa ſinit ſubitum nos motum poſſe putare
Servantes quamvis animo vigilante, oculiſque:
Expoſcit mens noſtra moras, oculique notantes;
Exiguuſque, & qui nequeat vitarier error
Temporis in lapſu, ſubito diſcrimina magna
Efficiet ſpatiorum, & eam grandeſcere fraudem.

Tem-

a Hoc centro oſcillationis opus eſſe affirmat potiſſimum, ubi pendulorum ope inveſtigatur, quantum ſpatii libere deſcendendo corpora gravia dato tempore percurrant hic apud nos. Id ſpatium determinare immediate non licet gravia libere demittendo. Nam ſi exigua aſſumatur altitudo, brevitas temporis ſumma, & fere inobſervabilis ingentibus erroribus aditum aperit. Si altitudines aſſumantur majores, præterquamquod ſumma in fine velocitas errori non contemnendo locum relinquit, reſiſtentia aeris in tanta velocitate ingens rem plurimum turbat. Quamobrem pendula adhibentur, quæ exiguos arcus deſcribant, & per plures horas oſcillent. Habito enim ingenti oſcillationum numero, error, qui in tota illa congerie committi poſſit, pro ſingulis oſcillationibus nihil, quod ſenſu percipi poſſit, omnino relinquit. Reſiſtentia etiam aeris in tam exigua velocitate, pro ſingulis potiſſimum oſcillationibus eſt fere nulla. Quod ſi obſervando inveniatur longitudo penduli, quod ſingulas oſcillationes ſingulis percurrat minutis ſecundis (quorum ſecundorum cum ſingula minuta prima contineant 60, ſingulæ horæ con-

Tempora ſin capias nimium non parva; ſed ipſa
Paulo majora, ut ſperes ſentire, quod optas,
Tum loca deberi nimium ſublimia, lapſus
Unde oritur, fateare, neceſſe eſt; propterea que
Præcipiti lapſu magnam quoque mobilitatem,
Magnaque dimotis obſtacula gignier auris,
Quæ faciant, certum ne poſſis prendere tempus.
At contra exiguos agitur cum pondus in arcus
Pendens, offenſus patitur vix aeris ullos:
Proin ita ſi multas facis ire, redire per horas,
Invenies, quanto reſpondent tempora filo.
Certa, quibus quivis abſolvi debeat ille
Procurſus; nam ſi poſt totam denique ſummam
Parvus, in excurſu ſupremo nempe, ſit error,
Vaneſcit privos hic diſpertitus in omnes,
Prorſus uti nequeat ſentiri, pene nec eſſe.
Hac ubi quapropter tuta ratione repertum
Conſtiterit, filum quam longum debeat eſſe,
Ut decies ſenos procurſus qualibet horæ
Conficiat decies in ſexta parte; videbis,
Tranſcurri geminum poſſit quo tempore rectà
Fili intervallum deorſum; proin quantaque rectæ
Intervalla viæ caſus tunc ille repoſcat
Tempore perdurans, decies pars ſexta quod extet
Partis item decies quoque ſextæ ſimplicis horæ.
Quantum eſt id ſpatii, quod corripit iſte volatus?
Eſſe prope agnoſces, pedibus ter quinque quod aptes

Non

contirent ſexagies 60.) facile ex theorematis, quæ expoſuimus, deduci poterit; primo quidem, tempus, quo dupla fili longitudo libero deſcenſu percurritur, tum ſpatium, quod uno ſecundo temporis percurrendum eſſet; ſed requiritur determinatio centri oſcillationis in globo, imo etiam in filo, ut haberi poſſit accurata determinatio penduli ſimplicis oſcillantis ad ſingula ſecunda horaria.

Quæ pertinent ad rationem inſtituendarum obſervationum, & calculi ineundi ad ejuſmodi determinationem, pluribus expoſui in Diſſertatiooe de gravitate inæqualitatis in diverſis terræ locis, quæ quam licebit breviſſime perſtringam hic in ſupplemento. Noſter duo tantum hic memorat: pendulum oſcillans ad ſingula ſecunda eſſe paulo longius pedibus Pariſienſibus tribus. (eſt autem Pariſiis pedum 3, linearum $8.\frac{2}{3}$ ex diligentiſſimis obſervationibus potiſſimum Bouguerii) quod ineundi calculi eſt quoddam veluti fundamentum, & ſpatium libero deſcenſu ibidem percurrendum a gravibus eſſe pedum circiter 15. (eſt autem pedum 15, & fere unius digiti), quod inde calculo inito deducitur.

Non aliis, non jam quacumque a gente petitis,
Sed quibus eſſe ſuum dedit ampla Lutetia nomen,
Ipſáque pauxillo ternos protenditur ultra
Virga pedes, genus hoc, quæ ſe illo tempore vibrat.
Hac [a] ſemel inventa menſura, protinus omnes
Menſuras per eam poſſis tranſmittere rerum
Ad feros nimium disjuncta ætate nepotes.
Non mutata etenim, vicibuſque obnoxia nullis
Illa manet, dum ſolis iter, quo tempora nobis
Currunt, dum gravitas, deſcenſus ponderis unde eſt,
Invicta proprium ſervarint lege tenorem.
Nunc [b] velut illa etiam, quæ non inducta canali,
Suſpenſa e tenui ſed tantum pondera filo
Inflectunt æqui varios iter orbis in arcus;
Sic aliqua pariter fiet ratione profecto,
Scilicet ut filum vibrans inflectere ſeſe
Sic queat, appenſum ut deducat pondus in arcus
Illos, qui non ſint æqui pars orbis, ab orbe
At qui gignuntur converſo, proque voluto.
Quod tibi ut expediam, procurrere poſſe meatus
Incurvos, ſurſumque cavos quoſcumque, docendum eſt,
Quæ ſuſpenſa moves de longo corpora filo.

Nec

a Innuit hic methodum ab Hugenio propoſitam tranſmittendi ad poſteros menſuras longitudinum accuratas. Moduli menſurarum, qui alii ad alios exacti identidem fiunt, longa ætate plurimum corrumpuntur, & facile etiam intereunt. Hinc tantæ de Veterum Hebræorum, Græcorum, Ægyptiorum menſuris controverſiæ. Romanum pedem vix ex perquam exiguo veterum monumentorum numero eruimus. Si noſtras menſuras exigamus ad longitudinem penduli oſcillantis per ſingula ſecunda horaria, habebitur certa relatio menſurarum ævi cujuſcumque ad noſtras, ſi interea gravitas eandem vim, & ſol eandem velocitatem retinebit. Cumque pendulum id parum admodum excedat pedes Pariſienſes tres, hinc putatum eſt poſſe tertiam ejus partem appellari pedem horarium, & haberi pro menſura quadam generali omnibus gentibus, & omnibus ætatibus. At multa ſunt, quæ hanc ipſam menſurarum rationem corrumpunt, & minus commodam reddunt, & minus certam, quæ in ſupplemento exponam.

b Ut pondus filo ſuſpenſum libere circa datum punctum defertur ſine ullo canali per arcus circulares, ita etiam ſine ullo canali fieri poteſt, ut pondus filo appenſum oſcillet in quavis propoſita curva ad ſuperiores partes cava, ut in cycloide. Quo artificio id obtineri poſſit, hic Noſter exponit. Obtinetur autem per curvarum evolutiones, quas breviſſime quidem, ſed ſatis dilucide explicat. Ante tamen Lectoris animum amœniore epiſodio præparat.

Nec mihi feſtivos, facileſque his præcipe cantus
Scilicet in rebus, quarum præclara, ſeveræ eſt
Plena tamen laudis, multique ars plena laboris:
Ut patrio æquoreas cum ſolvit littore longe
Pinus itura vias, peregrina aut merce laborans
Ingreditur notos cum poſt diſcrimina portus,
Læta coronatis pergit Dis, atque ſecundos
Pandit vexilla ad ventos; latera omnia fulgent,
Et ſonitus iterum dant æra, iterumque coruſcos:
Diſcurrunt læti interea, atque ad nubila nautæ
Clamorem extollunt, ſociiſque hortatibus inſtant,
Dum primos ſubeunt maris, extremoſque labores,
Reſpondent vicina loca, & perculſa reſultant
Littora; eunt ipſi ad ſpectacula nautica cives.
At cum jam pelago, terra procul, itur in alto,
Ornamenta viæ deponit inania prorſus,
Artis & inſtrumenta exercet idonea duræ
Navita, quodque opus eſt, quod & utile, ſpectat, agitq;
Tantum, & cum ventis luctatur ſæpe, marique,
Et ſcopulos ſervat, nocturnaque ſidera ſolers;
Rebus ab his pulchræ aſſequitur dein præmia laudis
Scilicet, & facilem vitam, placidamque ſenectam.

Sic

rat. Se comparat cum Nautis, qui in initio, & fine itineris corollas, vexilla, & reliqua navis ornamenta proferunt, in medio vero mari dura artis inſtrumenta pertractant: ſe eodem modo in librorum initio, & fine amœnioribus lectorem detinere argumentis, at in medio curſu aſperiorem pertractare debere doctrinam, ornamentis ſepoſitis.

En autem, quæ ad evolutarum doctrinam pertinent. Si curvæ cuivis ex ejus parte convexa advolvatur filum: tum id evolvatur ita, ut pars evoluta ſemper tenſa permaneat, punctum fili quodcumque curvam quandam lineam deſignabit motu illo per aerem. Curva, cui advolutum fuerat filum, & cujus formam filum ipſum induerat, dicitur evoluta. Curva illa, quam quodvis fili punctum deſcribit in aere, dicitur genita evolutione.

Porro fere ſemper curva genita admodum diverſa eſt ab evoluta; quin imo eadem etiam evoluta admodum diverſas curvas generare poteſt, prout a diverſis punctis evolvi incipit. Eſt autem methodus generalis, quam ipſe Hugenius propoſuit primus, qua data curva quacumque invenire licet aliam curvam, cujus evolutione ea oritur. Porro ſi lamina quædam inflectatur in ejuſmodi curvæ formam, cujus evolutione data curva gignitur, tum ea lamina hinc, & inde collocetur in eo ſitu, in quo genita cavitatem ſurſum obvertet, filum autem pendeat inter laminam hinc, & inde geminatam, ejus longitudinis, quæ requiritur ad datam curvam generandam, ac in ejus fine

ſuſpen-

Sic me, cum longi vel finis carminis inſtat,
Ordior aut alios iterum poſt otia curſus,
Pulchra juvat præferre animis ſpectacula, & artem,
Qua facilis, vulgo plaudenti oſtendere noſtram,
Ludenteſque velut, quo tum rapit aura, volamus
Permeſſi vario redimentes tempora flore;
Non ita cum pelago veluti ſumus, atque videmus
Nigrantes circum fluctus advolvier, atramque
Undique nativis tenebris incumbere noctem,
Difficilemque viam, & multis vada plena periclis;
Tunc animi vires, artemque educere multam
Nitimur, & magno contendimus uſque labore,
Duraque neglecto tractamus munia faſtu;
Unde decus, nomenque aliquod, laudemque petamus.
Quare age, dum terra procul omni avectus in æquor
Durum iter inſiſto, ſequere, atque audentia lauda
Pectora, conatus ſi forte videbitur impar.
  Quapropter ſi cujuſvis convexa ſecundum
Curvæ terga viæ ſe circumflectere tenſum
Efficias filum, jungique amplexibus arctis
Uſque novis, latiſque magis, dein inde referri
Avulſum filum, & de parte evolvier una;
Illius extremi progignet limitis ora,
Dum redit, in vacuo deſignans aere curvum
Quoddam iter. Hoc porro plerumque orietur ab illo,
Quod generat, longe diverſa, diſſimilique
Natura, prorſuſque alia. Quodcumque ſed ante
Propoſitum ſit iter tibi, perſpectumque, per artem
Noſſe queas, quod ab hoc, ſi evolvas, prodeat oras
Curvum iter in claras; vel ſi exoriatur id ipſum,

A quo

ſuſpendatur pondus, agiteturque, id ab altera lamina evolutum, tum alteri advolutum, ac iterum evolutum ab hac, advolutum illi, propoſitam curvam ibi, ubi ipſum applicatum eſt pondus, generabit, quam pondus idem oſcillando deſcribet. Cæteris autem geometricis proprietatibus cycloidis hanc adjecit ſane elegantiſſimam, quod ſi a ſummo vertice evolvatur, ſe ipſam generet prorſus æqualem ſibi, ita tamen, ut binæ ſemicycloides in ſitu erecto poſitæ, ac e parte convexa ſibi in ima ſui parte connexæ cycloidem integram generent, dum filum ex ipſa illa conjunctione prodiens alteri advolvitur, poſteaquam ab altera eſt evolutum, cavitate hujus genitæ obverſa convexitati prioris, & hujus media, ac ſumma parte genita ab extremis, & imis illarum partibus illis ipſis, quæ connectuntur.

Quamobrem ſi binæ laminæ ſemicycloi-

A quo alio adveniat, diſtenſoque, eque voluto.
Quapropter ſi forte velis, ut pondus in arcus
Propoſitos quoſcumque feratur; oportet, ut illud
Invenias iter, unde, quod optas, poſſit oriri
Alterum iter: ſuper hoc flectatur lamina porro;
Flexile tum excurrens circum amplectatur eandem
Filum, a quo pondus parti dependeat ima:
Sic etenim efficies, ut dum it, redit iſtud, in arcus
Non alios, quam propoſitos eat, atque cupito
Tramite ſe flectat. Verum ſic lamina debet
Aptari, & puncto deorſum deflectier alto,
Ut, quod opus filum eſt evolvier ob gravitatem
Ponderis, id tantum a convexa reſpiciatur
Parte, & propterea via ſit nova concava ſurſum.
Ergo ingens, genus hoc, rerum Monſtrator, & Auctor,
Ortam ex orbe viam cum mente revolveret æquo,
Ejus & hoc in natura latitare receptum
Vidit, & arripuit præclarum ante omnia munus;
Nempe iter ipſum ſe producere, ſeque parentem
Eſſe ſui, ſimul & ſobolem, a ſeſeque creari
Diſtenſo, ſimilique ab origine prorſus oriri.
Sic propriam proles non unquam vera parentem
Ulla referre poteſt, non guttam gutta, nec alta
In ſilva glandem glans, aut frons altera frondem.
Quæ prior extiterit via, quæque ſit edita porro,
Ambigeres, aliamque alii præferre nequires,
Proque alia ſine fraude aliam proponere poſſes,
Ni poſitu tantùm diſtarent; namque orientis
Qui ſitus eſt medius, ſupremas reſpicit oras
Alterius, per cuncta vices & cætera verſæ
Sic loca ſunt, & ubique ſitus contrarius extat.
Quapropter duplex, fac, lamina fiat in hujus
Partem flexa viæ, quam primam protulit orbis

cloidales in ima parte connexæ invertantur deorſum, ut ima illa pars evadat jam ſumma, ac ex ipſa conjunctione appendatur filum, quod ſemicycloidis perimetro æquale ſit, nimirum duplum diametri circuli cycloidem motu ſuo generantis, cujus diametri quadruplam diximus eſſe totam cycloidis curvam perimetrum, pondus in imo filo ſuſpenſum oſcillationes ſuas in cycloide peraget, iſochronas prorſus, ſive in ampliores arcus excurrant, ſive brevioribus arcubus ſe contineant, tempore ſemper æquali, & quod juxta ea, quæ ſupra diximus, ubi de deſcenſu per canalem cycloidalem egimus, facile admodum definitur.

Partem, poſtremamve volutus; ut utraque tantùm
Sublimi ſe tangat origine, deinde per oras
Obverſis abeat diverſas mutua dorſis.
Inter utramque tamen medium cum pondere filum
Communi a puncto pendens interſere, prima
Diſtendi medias quod poſſit origine ad oras
Ortæ ex orbe viæ, ſeu quod queat ipſius orbis,
Qui genuit, tractu longo exæquare bis axem.
Commotum ut fuerit, medioque recedere filum
Cœperit hoc, ſubito lamellis oſcula binis
Nunc huic, nunc illi feret, excurretque revolvens
Se ſuper, evolvenſque viciſſim, iterumque revolvens,
Evolvenſque iterum; properabit pondus in arcus
Propterea, in quales duplex ſe lamina flectit,
Qualeſque ultra ſe provolvens gigneret orbis.
Hos parvos, magnoſque velis, & quamlibet eſſe
Semper inæquales, percurri tempore prorſus
Eſt opus æquali, nec curſu non erit ullo
Illud prorſus idem tempus, quod diximus ante.
  Utilis [a] hæc ratio longe eſt, labentis habere
Si veram prorſus menſuram temporis optes.
Machina conſtruitur, nobis quæ tempora ſignet:
Additum, ibi efficimus, pondus, contortave ferri
Lamina det motum: verum horæ æqualiter iſtis
Non ibant, & erant momenta coercita lapſu
Impare; non vires æqualiter uſque movebant;

Ma-

[a] Hugenius hæc pulcherrima comperta ſua, iſochronſmum ſcilicet cycloidis, & ejus geneſim per ſui ipſius evolutionem, ad horologia applicavit. In iis vel pondus appenſum, vel lamina chalybea elaſtica contorta per vim, motum primæ rotæ communicat, a qua is in totam machinam derivatur. Jam diu in uſu erat id machinarum genus, ſed motui æquabilitas conciliari nunquam potuit, donec Hugenius ipſe pendulum eidem machinæ adjecit, cujus cum oſcillationibus celerioris rotæ motus connecteretur ita, ut ſinguli dentes poſt oſcillationes ſingulas procurrerent. Id compertum is protulit breviore opuſculo anno 1657, ac anno deinde 1673 immortale illud de Horologio oſcillatorio opus edidit, in quo & applicati ad horologia penduli laudem ſibi ſurripi a Galilei diſcipulis, præclarum inventum magiſtro ſuo, vel ejus filio injuſtè tribuentibus graviter conqueſtus eſt, & demonſtrata inæqualitate circularium oſcillationum, rationem protulit, qua pondera partim ex virga rigida, partim e flexili filo pendentia, in cycloide ipſis horologiis rite applicata oſcillarent, & temporis æqualitatem multo accuratius ſervarent.

Porro horologiis pluribus hac ratio-

ne

Machina nec motum probe diſpertibat eundem.
Propterea cæli in ſervandis ignibus ipſis
Inde fuit ſæpe orta errorum plurima cauſa,
Quos qui vitarent, nova porro incommoda adibant;
Nunc bene cauta tamen, cum molibus addita virga eſt,
In tres præſertim quæ ſe lentiſſima vibret
Ducta pedes, ortos revoluto ex orbe per arcus.
Hæc nova labentis cum temporis edita primum
Inſtrumenta; ſumus correctum his protinus ipſum
Solem admirati; nam ſolem errare neceſſe eſt.
Dum fert ille dies, lapſu non labitur æquo
Per cælum, paribus nec anhelos urget habenis
Alipedes, & proinde dies non efficit æquos:
Exiguum tamen eſt diſcrimen, prendere vulgus
Quod nequeat ſenſu, aut ulla ratione videre.
Nam cum quemque diem diviſum cernat in horas
Eſſe quater ſenas, nec parvula prorſus earum
Percipiat momenta, quibus diſtare neceſſe eſt,
Diviſi quia ſunt æqualiter, autumat æquos.
Quid vulgus tamen id diſcrimen tenue moratur,
Utpote nil faciens ducendæ ad commoda vitæ,
Queis capitur tantum, quæ tantum quærit, & optat?
At nimium vigiles terræ, cælique morantur
Menſores, quos naturæ ſpectacula ducunt,
Qui vitæ conferre etiam hoc ad commoda norunt.
Inde æquare dies facile, &, quæ cætera conſtant,
Exigere ad veras menſuras tempora poſſunt.
Utilitatem [a] aliam potiorem aſt inde referre

ne conſtructis tantam ipſe æqualitatem conciliavit, ut ſolaris curſus inæqualitate detecta, quæ quidem exigua eſt, nec vulgum moratur, at ab Aſtronomis contemni nullo modo poteſt, illud, quemadmodum ſupra etiam notavimus, adſcripſerit: *Solem audet dicere falſum*. Nonnulla autem, quæ ad hanc inæqualitatem Solaris motus pertinent, & ad illam, quam Aſtronomi æquationem appellant, qua addita, vel ablata, dies inæquales *æquantur*, ſive ad æqualitatem reducuntur, videbimus in ſupplemento.

a Exponit hic Noſter ingentem ſpem, quam Hugenius conceperat inveniendi illas, quas Geographi longitudines locorum appellant, quod inventum Nauticæ arti in primis pernecesſarium, plurima impediret naufragia, ut idcirco ampliſſima ab Hollandis, & Anglis in primis promiſſa præmia ſint ei, qui methodum aliquam certam, & expeditam eas determinandi proferret; quod quidem præmium jam olim Galileus ope ſatellitum Jovis ſe adeptutum ſperabat, tum Hugenius horum horologiorum ope, ac alii aliis ſub-

Speſ erat, oceano cum fertur adunca patenti
Nigrantes inter fluctus ratis, actaque ventis
Huc illuc variis, ſinuoſo & concita curſu eſt,
Spes erat, ut poſſint vexati per mare nautæ
Scire, ubi ſint, & qua mundi regione locentur
Continuo, inſtabiliſque viæ qua parte peracta
Quæ ſuperet, terræ ſpatiumque, plagamque petitæ.
Spes rata ſi nautis tentantibus illa fuiſſet,
Num foret inventum majus, num pulchrius iſto,
Num generi utilius noſtro, aut divinius uſquam?
Proin vitæ ingentes optatum eſt ſemper ad uſus,
Servaturum & opes multorum, & denique vitam.
Plurima propterea fulvi promiſſa metalli
Pondera ſunt variis a gentibus, ire marinos
Queis opus eſt fluctus, ut mentis ſuſcitet ignes
Spes lucri plus laude potens, & quærere cogat.
Haud minus idcirco tentantibus invia ſemper
Obſtiterunt, hanc ne Mortales aſſequeremur
Hos etiam pendentis itus poſt denique virgæ,
Et reditus, ut ſunt, certa ratione repertos.
Namque [a] ubi ſint, longas poſſint ut per mare nautæ
Noctes, atque dies jactati agnoſcere, oportet
Inveniſſe prius, quo jam ſit cumque locorum
Forte ratis, quantum terrai diſtet ab axe
Extremo, & quanto naſcenti, ſive cadenti
Sit propior ſoli, quam quæ illis cognita terræ
Eſt regio; exiguum nam tum, quo magna refertur
Cum regnis hæc terra ſuis, lacubuſque, marique,
Fluminibuſque, & cum ſilvis, & montibus altis,

In-

ſubinde methodis, ſed incaſſum huc uſque. Occaſionem hinc Noſter arripit opportunam ea de re agendi digreſſione nec inutili, nec injucunda.

a Quid ſit longitudo, & latitudo Geographica nemo non novit. Illa ſecundum æquatorem excurrit in Orientem, & determinat, quantum alius in tellure locus ſit alio orientalior, vel occidentalior, prout plures, vel pauciores longitudinis gradus numerat; hæc ab æquatore ad polos tendit, & determinat, quantum verſus polum ſibi propiorem ab ipſo æquatore diſtet locus, adeoque etiam quantum diſtet a polo, ſive ab extremo axis terreſtris puncto. Cum vero in mappis Geographicis utriuſq; gradus adſcribantur, illius quidem in ſumma, & ima fronte, hujus vero ad latera; patet id, quod Noſter hic docet, cognita longitudine, & latitudine ſua, nautam in medio etiam mari conſtitutum poſſe facile in geographica mappa deſignare punctum terreſtris ſuperficiei, quod tum occupat.

Inſpexiſſe globum tentantes, quis ſuus, illic
Inveniunt, locus, & picto ſuper orbe docentur,
Tantundem qui diſtet ab axe; orienſque, cadenſve
Sol pariter, ſibi viſus ut eſt, queat unde videri.
Et [a] jam principio cognoſcere cardinis oras
Sol facit, aut cælo ſidus quodcumque ſereno;
Quam procul a noſtro, ſi ſerves, tranſeat aſtrum
Vertice, quamque polo Mundi procul ardeat ipſum,
Si noſcas alicunde; quod a cæleſtibus ante
Conſultis tabulis facili potes arte doceri,
Illis, queis certum ſupera eſt quodcumque notamus:
Exin namque ſcies, quantum ſublime recedat
Verticis a mundi propiori cardine punctum,
Quantum & propterea locus ipſo a cardine terræ.
Quod ſupereſt [b], quanto ſolis quis diſtet ab ortu,
Occaſuve magis, regio quam cognita quævis,
Noſcere difficile eſt. Qui terræ cardinis oras
Circum æque ſpectant, ipſis oriuntur, & altum
Cæli conſurgunt ad culmen ſidera, eadem
Et delabuntur ratione, obituſque reviſunt.
At diſcrimen id eſt, quod proximiore locantur
Qui circum regione ipſorum exortibus, idem
Accidere illa prius, quæ diximus, omnia cernunt;
Quare ubi ſex horis præcurrere cuncta videntur,
Quarta eſt terrai promotior ora ſub ortus
Parte; quater ſenis circum omnem, non ſimul, horis
Ter-

a Innuit hic, quo pacto latitudo Geographica determinetur per obſervationes. Si obſervetur, quantum diſtet a medio cælo, quod Coſmographi dicunt Zenith, Noſter verticem appellat, aſtrum aliquod, ubi maxime aſcendit in Meridiano, ut Sol in ipſo Meridie, quæ obſervatio admodum facile haberi poteſt per quadrantes, vel armillas, innoteſcat autem, quantum diſtet aſtrum ipſum a polo (Polos ipſos Virgilius *vertices* dixit, Noſter ea voce pro Zenith reſervata *cardines* appellat vocabulis ad earum rerum ſignificationem aptioribus ſane), quod ex tabulis Aſtronomicis facile itidem eruitur; jam habetur diſtantia ipſius Zenith a polo, cujus complementum ad gradus *90* eſt ejus diſtantia ab æquatore, ſive latitudo loci.

Porro ope polaris ſtellæ, quæ polo ipſi eſt adeo proxima, res admodum facile perficitur, quavis hora, licet ea ad meridianum non devenerit, cum facile pro quavis hora ſit, ut in ſupplemento videbimus, definire, quanto magis debeat ipſa diſtare a Zenith, quam polus, quod diſcrimen pro locis omnibus paulo remotioribus a polo ipſo ſit ad ſenſum idem eâdem ejuſdem diei hora.

b Longitudinis determinatio eſt longe

Terram (nempe prius vicinis, deinde remotis)
Sole ferente diem: quapropter temporis iſtud
Diſcrimen geminas inter cognoſcere ſi qua
Arte queas terræ regiones, queis tamen æque
Tollatur polus, una propinquior exorienti
Quantum ſit ſoli, diſtantior altera, noſces.
At qui non æque conſurgere cardinis oras
Aſpiciunt loca terrai diverſa colentes;
Quo prius alterutris noctis, mediumve diei
Continget momentum, illi hoc orientis in oras
Procurrent magis. Id diſcrimen temporis illas
Horarum moles dare nobis poſſe putarunt;
Namque ſagax patrio ſi ſolvens navita portu
Tempora item patrio ſeſe volventia Cælo
Signantem ſecum molem ferat, intereaque
Per mare decurrat ventis variantibus actus,
Poſt tot inæquales curſus, multoſque viarum
Errores, (ſi nil turbatum in motibus eſſet
Horarum, & virgæ, huc illuc quæ pendula currit)
Ipſum, ubicumque foret, patrias quæ illuminat oras,
Lucis momentum mediæ, noctiſve videret;

Mo-

ge difficilior. Ejus difficultatis rationem Noſter innuit, quod nimirum aſtra omnia circa polos ſingulis diebus ab Oriente in Occidentem convertantur, adeoque locis omnibus ſub eodem parallelo ſitis, ſive a polo æque diſtantibus, eadem diurni motus phœnomena eodem ordine quotidie exhibeant. In eo tantummodo habetur diſcrimen, quod ea omnia, ut Solis ortus, citius Orientalioribus, ſerius Occidentalioribus contingant. At meridies, non ſolum reſpectu eorum, qui ſub eodem parallelo ſunt, ſed etiam reſpectu omnium omnino terræ partium, eo citius accidit, quo locus Orientalior eſt ita, ut qui quadrante Telluris Orientalior ſit, ipſi meridies 6 horis citius adveniat, adeoque quovis diei momento 6 ejus generis horas plus numeret, quam, qui quadrante toto occidentalior ſit.

Quare ſi eodem momento quis in medio mari conſtitutus videat, quota ſibi a meridie ſit hora, quod Sole, vel ſtella quavis idoneo inſtrumento obſervatis, latitudine loci cognita, facile ſit, & noverit, quota tum ſit in aliquo loco ſibi cognito, ut in portu, unde ſolvit; ex differentia illa ſtatim agnoſcet diſcrimen inter bina meridierum tempora, & tribuendo 15 gradus ſingulis horis, 15 minuta prima, vel ſecunda longitudinis ſingulis minutis primis, vel ſecundis differentiæ horariæ, inveniet diſcrimen longitudinum, & longitudinem loci. Hinc ſi in eo portu, unde Navis ſolvit, horologium ſit conſtitutum ad rationem horarum portus ejuſdem, tum ſemper æquabiliter moveri pergat, quocumque navis delata ſit, innoteſcet ſemper, habita ratione illius dierum inæqualitatis, de qua ſuperius injecta eſt mentio, quota in eodem portu hora ſit, quæ cum hora loci ipſius, ad quod navis delata eſt, conferri poterit.

Momentumque loco, quo ſit, reperire recenti
Poſſet item lucis mediæ, noctiſve, vel ipſum
Servando Solem, vel ſuda ſidera nocte:
Proin momentorum diſcrimen noſceret, atque
Per mare labendo, quantum provecta ſub ortum,
Sive ſub occaſum puppis ſua, quoque rotundæ
Illa ſit in puncto terrai, ſciret aperte,
Atque id mole ſuper terram referente notaret.
Nonne vides æquis virgæ a procurſibus omnem
Pendere hanc penitus rationem, & nitier illis?
Nam quæ [a] alia eſt ratio numerati temporis omne
Pro varia regione locorum percipiendi
Diſcrimen, veluti cum deficit intercepto
Lumine Luna, Jovis clarum aut quæ ſidus oberrant
Aſtra, nec eſt facilis, vaſtum neque tuta per æquor:
Nunquam nauta vigil numeris rem tanget, ut illis
Non aliquis ſemper, qui turbet multa, ſit error:
Vitraque præterea longorum adhibere tuborum
Difficile eſt, moto cum fluctuat æquore puppis;
Nec bene tunc oculis, cum jam res incipit eſſe,

Ap-

a Alias determinandæ longitudinis methodos, & earum vitia hic innuit, ut oſtendat, quanti uſus in re tanti momenti eſſe debeat æquabilis horologii curſus, ſi haberi poſſit. Hujuſmodi methodi vel petuntur ab Aſtronomia, ut ubi in binis locis obſervatur defectus Lunæ, vel cujuſpiam e Jovis ſatellitibus, vel ſine Aſtronomiæ præſidio adhibentur, ut ubi æſtimatur itineris confecti longitudo, & directio ſingulis diebus. De prima hic agit.

Si obſervatio utrobique ineatur phœnomeni cujuſpiam, quod ſimul pro utroque loco accidit, ut ubi Lunæ macula quæpiam ſubit Terræ umbram, vel ex ea prodit, vel Jovis ſatelles umbram Jovis; diſcrimen horarum utriuſque obſervationis inter ſe collatum rem conficit. Lunæ Ecclipſibus uſi ſunt Veteres omnes ad eam rem. Recentiores autem poſt detectos per teleſcopia 4 Jovis ſatellites, quorum aliquis fere quotidie deficit, & intimus quidem poſt horas circiter 42 in ſingulis nimirum converſionibus ſuis, horum ecclipſibus utuntur maximo cum ſucceſſu. Hinc ſi pro aliquo loco cognito computentur horæ eorum phœnomenorum, & obſervator in alio loco ignoto ſit, ac obſervationem ineat; ille calculus poteſt alterius obſervatoris vices ſupplere, & haberi horarum diſcrimen ad longitudinem definiendam neceſſarium.

At multæ hinc ſtatim occurrunt difficultates. Nam & incerti ſunt calculi, cum computatio Lunarium Ecclipſium huc uſque intra plura minuta fuerit incerta, & in cæteris Jovis ſatellitibus calculus pluribus minutis, in intimo vero ipſo quaternis nonnunquam a veritate aberret. Deinde in ingenti navium agitatione perquam difficile eſt

lon-

Apparet, ſed cœpta poteſt, & facta videri:
Denique vel multi poſſunt tranſcurrere menſes
Conſpecto ſine defectu; ſpectacula non hæc,
Quando opus eſt, fiunt; ſumptu non ſunt ea noſtro
Edita, nec noſtros expectant ſidera nutus.
Et veluti [a], lateat ſi morbi cauſa medentes,
Ipſe quoque ignotus morbus ſit, non minus audent
A ſignis illi cauſam, morbumque latentem
Conjicere ambiguis nunc hunc, nunc protinus illum,
Atque alium, atque alium, & remedi genera omnia mutant,
Omnia pertentant nequidquam; viribus æger
Vitæ labitur abſumptis, lethoque propinquat.
Sic alii fruſtra conſulto denique cælo
Ipſum iter undiſonum demiſſis, qua via, filis
Poſt ſeſe, bene metiri ſe poſſe, neque omnes
Prendere non flexus contendunt, atque putare.
Verum has inſcriptas undis fallacibus audent
Menſuras ſubito fluctu confundere venti
Humida verſantes variantibus æquora flabris,
Jactanteſque ratem, & furtivus qui mare transfert,
Con-

longiora adhibere teleſcopia, quæ ad ſatellitum obſervationes requiruntur, & vero etiam ad lunarium phœnomena defectuum aliquanto accurratius determinanda. Demum Lunares Ecclipſes bis ad ſummum, vel ter in anno accidunt, ac Jupiter per binos fere menſes ita poſt Solem latet ſingulis annis, ut ecclipſes ſatellitum ipſius obſervare omnino non liceat.

Alia etiam Cæli phœnomena ad eam rem adhiberi ſolent, quæ quidem Noſter in hac digreſſione ſua prætermittit, ne infinitus ſit, & in primis Lunæ diſtantia a Stellis Fixis, cujus curſu multo jam accuratius cognito per Newtoni theoriam, & integræ periodi lunaris annorum 18 obſervationes aſſiduas ab Halleyo inchoatas, a Monierio nuper demum perfectas, brevi ſperamus fore, ut longitudines novo nautico reflexionum inſtrumento, quo unicus obſervator admodum facile diſtantias eaſdem, & accurate in ipſa navium agitatione determinat, certo demum definiri poſſint.

a Innuit aliam methodum, qua ex itineris confecti æſtimatione inquiritur in loca, ad quæ navis delata ſit, habita ratione directionis, & magnitudinis itineris ipſius, adeoque in longitudines, ac latitudines, quod quidem tentatum eſt vel, ut ajunt, *a priori*, determinando ventorum directiones, ac vires, determinato ſemel, quantum data vi data navis dato tempore promoveatur, vel a *poſteriori*, demittendo quædam innatantia, ut ſuberis maſſas filo liberrime excurrente alligatas, cujus fili evolutione magnitudo itineris confecti aliquot minutis determinetur. At methodus utraque incerta eſt, cum præter alia multa, ingentes marium occulti motus, quos dicunt *le correnti*, qui-

Confunditque vias labentum curſus aquarum.
Sola [a] hanc viſa igitur facili rem pendula pacto
Virga dare, horarum primum ut fuit addita moli;
Cumque petebantur Minoæ littora terræ,
Cumque ſalo puppis fluitabat in Atlanteo;
Hæc tum nempe viam bis viſa eſt prodere moles;
Verum alios fallax repetitos mille per uſus
Deprenſum eſt virgæ inventum: vibrata, neceſſe eſt,
Si ſit longa nimis, placido, immotoque cubili
Ipſa eat in quoſvis æquali tempore curſus;
Aſt agitata ubi ſit, veluti ſub puppe cavata,
Tempora turbantur; certis nam motibus extra
Officit incertus motus, nec pellitur æque
Propterea, interdum & procurſus deſinit omnis.
Eſt [b] etiam, ut fiat mutato pendula cælo
Longior aut brevior ſe vibrans virga, caloris
Propter ſæpe vices, & frigoris; omnia namque
Æſtu extenduntur, retrahuntur dura metalla
Frigore; at has etiam in regione ſubibit eadem
Illa vices, æſtumque feret, brumæque rigorem.

quibus immanis quidem maris tractus aliquando celerius, aliquando lentius in certas plagas promovetur, & navim ſecum rapit, omnem determinationem impediat, & fallaciſſimam reddat.

a His methodis rejectis ad horologia regreditur, quorum ope Hugenius ſperavit rem poſſe confici. Innuit autem bina itinera, in quibus Hugenius ipſe Horologii oſcillatorii initio cum ſucceſſu horologia ipſa adhibita fuiſſe narrat, Ducis Belfortii ex Toloni portu in Cretam inſulam navigantis, ac Britanicæ navis errantis per Oceanum Africæ, atque Americæ interjectum. At & tum quidem in aliis itineribus varia fortuna fuit, & deinde ſatis manifeſto deprehenſum eſt, nullam horologii ſuſpenſionem haberi poſſe ita conſtitutam, ut cum undarum agitatione æqualis motus perſeveret.

b Aliud hic machinæ ipſius incommodum commemorat. Virga nimirum penduli calore, ut metalla omnia, diſtenditur, frigore contrahitur, & producti penduli oſcillationes magis diuturnæ ſunt, quam contracti. Id malum ita incertum aliquando reddit horologiorum uſum, fallacemque, ut Grahamus in ſumma æſtate aliquando 30 oſcillationes deprehenderit pauciores uno die, quam in hyeme. Error inde ortus, ubi de longitudinum determinatione agatur, plurimum obeſt, cum ſingulis diebus augeatur, in unam ſummam erroribus omnibus demum collectis. Obeſſe autem poteſt etiam obſervationibus Aſtronomicis, ubi in eodem loco horologium immotum ſingulis diebus in Meridie ad Solem exigatur, cum repentina caloris in frigus mutatio, ex Cæli, ac ventorum mutatione poſſit id præſtare, ut inter utrumque meridiem pluribus ſecundis machina ab æquabilitate motus aberret.

Sæpe itidem privas illæ vertuntur in horas
Aere converſo, ventis, pluviiſque coortis.
Tardior idcirco procurſus, & ocyor exit,
Nec, quod opus, peragetur eodem in tempore ſemper.
Hoc [a] tamen eſt nobis vitandi certa reperta
Jam ratio; ſiquidem, argenti cum pondere vivi
Si tubulum inductum ſe virgæ in fine moventis
Suſpendas, erit, ut, cum fiet longior æſtu
Illa, magis tubulo ſe mergat, & altius ipſum
Inſiluiſſe liquens argentum cogat, ut inde,
Diſpoſitis bene ponderibus, non longior extet
Revera; minus efficient nam pondera longam,
Cum minus a ſummo diſtabunt addita puncto.
Aptior [b] aſt & adhuc, & multo eſt tutior alter
His modus in rebus; neque enim de ſimplice virga
Suſpendunt alii pondus, ſed nectere plures
Compactas vario inter ſe voluere metallo,
Scilicet ut minus hoc, mage diſtendatur ab æſtu,
Quantum opus eſt, illud; proin, cum diſtenditur illud,
Fiat, uti pondus, quod item deſcendere virga
Fixum alia debebat, eo ſuſtollere ſeſe
Poſſit, uti ſpatiis æqualiter hæreat altis.
Quod [c] ſupereſt, demum ad noſtros remeare labores,
Et cœptæ par eſt jam reddere nos gravitati,
Unde objectarum hinc, atque illinc plurima rerum

Ab-

a Grahamus celeberrimus ille inſtrumentorum faber, & horologiorum in primis, ingenioſiſſimum ſane tanto malo remedium exeogitavit. In fine virgæ ſuſpendit tubum mecurio plenum non tamen ita, ut ſpatioli quidpiam non ſupereſſet, per quod mercurius ipſe caloris vi dilatatus cum virga intra tubum aſcenderet, deſcendente tubo ipſo, & centrum oſcillationis ſuo loco reſtitueret.

b Eſt & alia ejuſdem erroris corrigendi ratio petita ab inæquali diverſorum metallorum extenſione ejuſdem caloris vi. Suſpenditur pondus virgis diverſorum metallorum ita compaginatis, ut dum altera magis diſtenta ultra alteram itidem diſtentam, & ſecum deprimentem pondus excurrit, pondus ipſum ope vectis oblique ſurſum elevet, & priori altitudini reſtituat, imo etiam nonnihil majori ita, ut compenſetur deſcenſus centri oſcillationis ipſius virgæ, & totius penduli centrum oſcillationis eodem perſtet loco. De utraque hac methodo agemus in ſupplemento.

c Poſt hanc de horologiorum uſu digreſſionem in viam redit. Digrediendum autem eſt omnino identidem, cum & propoſitam methodum tenere velit, de gravitate directe agens, & plurima ſcitu admodum digna, quæ ad Phyſicam pertinent, non prætermitt[illegible] ſe occaſio præbet nexus cujuſpiam cum gravium motu, ibi divertit.

Digitized by Google

Abduxere: velut qui aggreſſi longa viarum,
Non poſſunt recta ſemper regione meare,
At divertere & huc vario coguntur, & illuc
Hoſpitio, ſæpe & populoſas viſere terras
Digreſſi cupiunt, obeunteſque oppida ceſſant,
Atque illo montes latere, hoc torrentia vitant
Flumina, & hiberno campos late imbre natantes;
Sic mihi fas paulum diſcurrere, dum gravitatis
Magnum iter inſiſto, res & convertere mentem
Ad varias, hac ſe objiciant quæ parte, vel illa,
Quæque viam reddant facilem magis, atque patentem,
Mutatoque levent animum quæ ſæpe labore,
Viſier & dignæ ſint, & ſint parte viai
Non alia nobis tam prono excurſu adeundæ.
Porro iter ad notum, rectique ad tramitis oras
Sponte remigrandum, & nobis via cœpta terenda eſt.
Et [a] jam quandoquidem gravitas in corpore ſolo
Quid faciat, docui; qualis, ſi corpora confers
Multa, ſit, inquiram; cumque ipſa impellat eadem
Semper corpus idem ratione, an pellat eadem
Corpora cuncta etiam ſemper ratione, videndum.
Hic ſubito rerum nobis obſtare videntur
Pondera, diverſo diverſa in corpore quæ nos
Sentimus: verum diverſa a pondere conſtat
Et gravitas, quæ vis eſt punctum quodque repellens

[a] Jam gravitatem non in unico corpore ſitam conſiderat, ſed in pluribus, & quærit, an ipſa ſit æqualis ubique in corporibus omnibus. Videtur prima fronte inæqualis eſſe, cum alia corpora magis, alia minus ponderent. Verum quoniam itidem in aliis habetur plus materiæ, in aliis minus, quærendum, an majus illud pondus provenit a majore æqualium particularum numero, in quibus ſingulis æqualis ſit gravitas, in omnibus ſimul tanto major, quanto major eſt ipſarum numerus ſive maſſa, an diſcrimen illud inde etiam oriatur, quod æquales materiæ particulæ inæqualem habeant gravitatis vim.

Atque hic quidem plura inter ſe diſtinguere oportet, de quibus in ſequentibus agitur. Primo quidem *gravitatis* nomine intelligi ſolet vis illa, qua ſingulæ particulæ nituntur ad deſcenſum, ſumma autem omnium virium, quibus tota maſſa deorſum tendit, dicitur *pondus*. Rurſum ipſam *gravitatem* ſolent diſtinguere in duas: Conſiderant nimirum vim totam, quæ particulas urget ad deſcenſum, quam deinde vis centrifuga ex motu diurno orta minuit. Illam vocant gravitatem primitivam, hanc Galli ſuo nomine peculiari notant *peſanteur*, qui pondus dicunt *poid*, gravitatem vero primitivam *gravitè*. Præter hæc notanda eſt etiam illa, quam dicunt *gravitatem ſpecificam*,

Materiæ deorſum ; ſunt vires pondus at omnes
Unà compoſitæ, quæ trudunt omnia puncta,
Quæ conjuncta ſimul corpus nectuntur in unum.
Propterea a numero punctorum pondera pendent,
Non gravitas. Hæc ſi foret una, eademque per omnem
Materiam, & partes agitaret viribus iſdem
Æquales, tamen eſſet, ubi plus corporis extat,
Majus pondus adhuc, & plus intendere nervos
Cogeret, idque ab humo tollentem, ſeu retinentem
Plus quoque laſſaret, verſantemque aere dextram.
Proin, quia diverſis majora, minoraque conſtant
Pondera corporibus, non eſt, ut dicere poſſis
Vim quoque inæqualem gravitatis, diſſimilemque
Æquales per materiæ ſe fundere partes.
Hìc opus eſt igitur ſcrutarier, atque videre,
Num, quantum numerus punctorum, materieſque
Creſcit, creſcat item pondus; foret æqua per æquas
Tum gravitas partes diviſaque, diſque tributa.
Quo tamen [a] id demum poſſis perquirere pacto,
Atque videre? Sua in primordia ſolvere corpus,
Ejus & extremas quaſvis dignoſcere partes,
Innumeraſque queas numerare, & cernere ſeorſum,
Ut noſcas, pro materia num pondera conſtent?

Num

quæ pendet a mole etiam, & eſt eo major, quo majus pondus ſub minori continetur mole, ſive eſt, ut pondus per molem diviſum. De his omnibus infra.

a Aperit hìc, qua ratione poſſimus inveſtigare, an gravitas illa, quam hìc experimur, & quam Galli dicunt *la peſanteur*, ſit in omnibus materiæ particulis æqualis in eodem Terræ loco. Si liceret videre omnes particulas materiæ in diverſis coporibus, & eas numerare ad habendam maſſam, facile quæſtio ejuſmodi ſolveretur. Si enim pondus deprehenderemus tanto majus, quanto major eſt maſſa, conſtaret ſingulas particulas æquali gravitatis vi eſſe præditas. At id quidem non licet, nec vero ulla alia ratione maſſas æſtimare poſſumus, niſi ope ipſius ponderis, quod aliunde maſſis ipſis proportionale demonſtramus.

Hæc alia via petitur a velocitate, quam corpora libere labentia acquirunt. Si enim pondus proportionale eſt maſſis, & ſingulæ particulæ æqualem habent gravitatis vim, eodem tempore per idem ſpatium cum eadem velocitate deſcendent corpora tum magis tum minus ponderantia, ut patet, cum in ſingulis particulis ſua illa vis ſingulos æquales debeat ſimul gignere velocitatis gradus; ſecus autem contingeret, ſi in altero corpore particulæ ſingulæ majorem haberent vim, in altero minorem: ibi velocitas acquireretur major, quam hic.

Porro aptiſſimo ſane exemplo rem illuſtrat globorum 10 æqualium e molli ce-

Num præcluſa via eſt proin, quo contendimus, omnis?
Prætereaque aditus non jam licet ire per ullos?
Materiam gravitas æque partita per omnem
Si fuerit, quali inter ſe deſcendere lapſu
Corpora debebunt, ſi nil deſcenſibus obſtet,
Ponderibus variis quantumvis prædita conſtent?
Uno nimirum deſcendere tempore ſemper
Eſſet opus per idem ſpatium, velocia & æque
Eſſe, ideoque pares acquirere mobilitates.
Dum par vis fuerit privis in partibus urgens,
Nil refert, an major earum, an paucior extet
Hic numerus: nam materia creſcente movenda,
Quæ movet, increſcet vis toto in corpore tota,
Ipſe itidem motus, non privas quaſque, ſed omnes
Plus agitans partes; eadem fuga proinde manebit.
Nil oberit pariter, ſi pluſve, minuſve propinquæ
Mutuà ſint partes, nimirum an denſius, an ſit
Rarius impulſum corpus. Si fingere cera
E molli tentes, aut fictas concipis eſſe
Æquales bis quinque pilas; æqualiter omnes
Per ſeſe videas ſeorſum deſcendere lapſas:
Filo junge novem medio; labentur ut ante,
Nec filo remorante, nec impellente ruentes.
Porro conjunctas molem coaleſcere in unam

Si

li cera. Singuli æquali tempore debent deſcendere: ſi vero filo alligentur novem ex iis, a cujus fili pondere, & inertia abſtrahamus animum, tum filo ſubſtituatur ipſa ceræ tenacitas, qua conjungantur, ac demum compingantur in unicum globum noncuplo denſiorem; in omnibus hiſce caſibus quivis ex iis novem eodem modo deſcendet, ac prius, adeoque eodem modo, ac decimus; unde conſtat nec majus pondus in maſſa majore æque denſa, nec majorem denſitatem deſcenſum turbare quidquam, ſi vis, in particulis æqualibus æqualis, maſſæ reſpondeat.

Ad probandum, debere in omnibus iis caſibus pilas illas novem eodem modo deſcendere, ac prius, videtur Noſter uti principio rationis ſufficientis, quod primo rejecit libro, cum nimirum dicat: *ratio mutandi nulla profecto eſt*. Verum re ipſa non negativo illo principio utitur, ſed hoc poſitivo: cauſas neceſſarias eaſdem eundem ſemper effectum debere gignere. Ibi manent eædem deſcenſuum poſitivæ cauſæ, quæ prius; filum, adhæſio, major particularum vicinia, nihil conferunt ad deſcenſum, vel obſtant. Hinc rite eruitur totam cauſam eandem manere, adeoque & effectum haberi eundem. Atque hoc eodem pacto facile ad poſitivum argumentum reduci poſſunt loca omnia, in quibus Noſter illud idem negativum Leibnitianorum principium adhibere videtur, quod hic ſemel adnotaſſe ſufficiat.

Si facias, quid erit, deſcenſus qui fuit ante,
Nunc idem ut fieri nequeat? Cur mobilitate
Non pars quæque ſua labatur? Denique major
Hæc novies pila, ſi retrahat ſe, vique coarctet
Introrſum, novies ut denſior exeat inde
Exæquans decimæ molem, tempuſne, fugamne
Tum mutet? Ratio mutandi nulla profecto eſt;
Ut prius idcirco, nempe ut decima ipſa meabit;
Namque eadem in partes gravitas exercita quaſque eſt.
At contra ſi non gravitas ſit materiai
Inſita particulis æque; reperire queamus
Harum congeriem varianti in corpore talem,
Plus habeant ſimul ut gravitatis, corpore quam quæ
Sunt congeſtæ alio, & majori protinus illas
Proinde fuga in præceps ſe deorſum ferre tuamur.
Hæc via quapropter nobis eſt pervia ſola,
Corpore par gravitas num ſit, quærentibus, omni,
Et pro materia num conſtent pondera rerum;
Nempe videre, graves ſeſe res inter eodem
Tempore num labantur, inæqualive, cadentes,
Cum paribus ſpatiis decurrunt, mobilitaſque
Incrementa ſui pariter conquirat an æqua
Diverſis in ponderibus, contrave ruendo.
Interea [a] magni defenſum nominis umbra
Antiquum errorem prorſus dimittere noſtro
Ex animo par eſt; ſtetit hæc ſententia quondam,
Scilicet eſſe citos mage lapſus, pondera conſtant
Cum majora, fugamque minoribus eſſe minorem.
Illa abiere quidem jam tempora, cum mortales
Balantum pecudum vivebant more ferino.
Se pedibus cum quæque ſuis ferat, atque videre
Quæque ſuis oculis cum poſſit paſcua læta,
Et liquidos fontes; tamen illuc, una prior quo
Vadit, eunt omnes, & prona mente ſequuntur
Propterea tantum, quod eam præcedere cernant,
Innixæque aliis aliæ denſo agmine tendunt.

Jam-

[a] Hic eos veteris diſciplinæ Philoſophos notat, qui auctoritati tribuentes plus æquo, omnem per tot ſæcula inveſtigationem per experimenta prætermiſerunt. Ariſtoteles nimirum cenſuit diverſa corpora eo citius delabi, quo plus ponderis habeant, ita, ut velocitas ipſi ponderi proportionalis ſit. Oppoſitum autem Galileo duce invenit recentior Philoſophia experimentis diligenter inſtitutis, iteratiſque,

Jamque [a] age, magna cadant, non æquaq; pondera deorſum
Haud nimium tamen a ſublimi culmine miſſa,
Aſpicies imam prope eodem tempore terram
Percutere; at contra, ſi ſit nimis editus, unde
Sunt demiſſa, locus, nimium neque pondera magna;
Non ita percipies æquo deſcendere lapſu;
Advenient citius majora, minoraque paulo
Serius; interdum contra tamen, illa patenti
Sint ſi fronte nimis, gremio intus ſive cavato.
Nempe quis ignoret, nec ſenſibus uſurparit
Sæpe ſuis, citius plumbum deſcendere pluma,
Et nivium floccis lapides, & vellere lanæ,
Et ſiccis foliis autumni tempore poma;
Corporaque eſſe etiam levia, & ſalientia ſurſum,
Et fumos tenues, &, qui dant nubibus ortum
Exhalati undis, vel terra humente, vapores,
Et pingues, qui ſunt puerorum luſus, aquai
Folliculi, qui ſuſtollunt ſe mollibus auris?
Nimirum [b] liquido nos cingimur aere circum,
Obſiſtit cunctis qui motibus; ipſe moveri
Debet enim, dum decedit tranantibus ipſum
Se rebus, gravibuſque ſua gravitate repugnat.
Non æque tamen hic aer rem quamque moratur,
Verum pro facie cujuſque & mole; neque iſtæ
Tam creſcunt, quam materies in corpore creſcit.

Pro-

a Quod autem ad ipſa experimenta pertinet, cavendum ab aeris reſiſtentia, quæ nobis facile imponit, & quæ una omnem illum ipſum errorem peperit. Magni ponderis corpora per exiguam altitudinem æquali ad ſenſum deſcendunt tempore. At & corpora ſatis magni ponderis ex ingenti altitudine demiſſa, & corpora ponderis exigui per exiguam quoque altitudinem deſcendunt tempore admodum inæquali.

Ricciolius ex editiſſima Aſinellorum turri Bononiæ plures argillaceos globos demiſit variæ magnitudinis, varii ponderis, quod in æqualibus etiam globis ex interiori parte vacuis, varia immittendo pondera, variabat. Notavit autem, jam magis ponderantia citius ſolum attingere, jam minus ponderantia, nec cauſam quamvis admodum patentem ſatis agnovit, aeris nimirum reſiſtentiam a ſuperficie globorum pendentem, & collatam cum maſſa ſuperficiei nequaquam reſpondente, qua de re inferius.

Plumas leves, & alia ejuſmodi videmus quotidie tanto lentius labi, quam plumbi fruſta, & lapides, quin imo quædam corpora, ut fumos, etiam aſcendere intuemur; quod itidem ab aeris reſiſtentia, & gravitate prævalente oritur, ut infra videbimus.

b Aerem ſa e ſentimus omnes, dum ventum excitamus nobiſmetipſis levi motu.

Propterea noſtri turbantur ab aere lapſus,
Ut, verum quid ſit, non inde efferre queamus.
Eſt opus idcirco noſtro a tentamine craſſum
Aera, quantum ipſum liceat, ſecludere totum;
Quod, Boyli inventum, longe notiſſima præſtat
Machina; poſſe datum eſt ex hac educere tantum
Aeris, ut nequeat noſtros, quodcumque ſuperſit,
Accidere ad ſenſus ulla ratione ciendos.
Clauſa ſub hac igitur deprendimus omnia labi
Corpora non alio, quam curſu ſcilicet æquo,
Miramurque leves procero a culmine plumas,
Et ſimul emitti magno cum pondere plumbi,
Et clauſas ſimul ire vias, ſocioque volare
Impete præcipites, ſimul & ſola plangere molis:
Hìc etiam fumos labi, tenueſque vapores
Cernimus, & credit quæcumque leviſſima vulgus.
Omnia partitam quæ monſtrant, diſque tributam
Eſſe in materia gravitatem æqualiter omni,
Turbarique pares per reſtantem aera lapſus.
Aeris [a] at quoniam hìc reſtantes dicimus auras,

Offen-

motu. Gravium deſcenſui ipſe reſiſtit duplici via. Primo quidem, ut projectis omnibus directione quacumque, idcirco, quod debeat findi, loco cedere, & moveri ipſe, deinde idcirco, quod ipſe gravis, dum deorſum nititur, aliquid de gravitate ipſa corporum in ſe demerſorum detrahit. Neque enim poteſt corpus deſcendere, niſi moles aeris æqualis ipſius moli ſimul aſcendat. Atque hanc ob cauſam, ubi e puteo ſitulam aqua plenam extrahimus, ſitulæ ſolius ſentimus pondus, dum intra aquam demergitur; at ubi emerſit, ab ipſo etiam aquæ pondere gravamur, ſive potius ab exceſſu utriuſque ſupra pondus æqualis molis aeris. Eademque de cauſa, quæ ſub eadem mole minus ponderis habent, in fluido quopiam demerſa aſcendunt, ut ſuber in aqua, fumus in aere, ob quem ipſum aſcenſum in aere vulgus perperam corpora plura, quæ omnino ſunt gravia, habuit pro levibus.

At in Boyliana Machina, aere extracto e longiore tubo, ſi ſimul demittatur aurum, & tenuiſſima pluma, ſimul decidunt eodem tempore, & eadem celeritate, ac fumi deſcendunt, non aſcendunt; unde eruitur manifeſto gravitatem æquè per omnes particulas corporum omnium utcumque eterogeneorum diffuſam eſſe, & diſtributam.

[a] Hic novam digrediendi occaſionem nactus, de fluidorum reſiſtentia agit, in qua Newtonus magnam ſecundi Principiorum libri partem conſumpſit, multo tamen minus feliciter, ut ſupra etiam monuimus, quam liberos motus in primo libro fuerat perſecutus. Multi alii poſt ipſum in eodem argumento verſati ſunt, in quo tamen, meo quidem judicio, parum admodum huc uſque profecit Analyſis, & Geometria.

Porro primo quidem proponit illud, quod ſupra innui, deſcenſum gravium in aere, vel alio fluido quovis duplici

de

Offenſuque moras iſto per corpora gigni,
Ne temere his videar tibi quidquam ponere rebus,
Ignotamque ſequi rationem; percipe, quæ par
Te noſſe, & rerum generatim hìc multa recenſe,
Et varias, quantum licet hactenus, inſpice cauſas.
Res igitur gemina tantum ratione fluentes
Poſſunt officere, atque obſtare meantibus intra
Corporibus; primum, liquidæ quod ſemper eundo
Finduntur partes, & iter vi rumpitur illud;
Deinde, graves quod labuntur gravia illa per auras,
Aut limphas, aut materiam quamcumque fluentem.
Pendet [a] cauſa prior non cauſa a ſimplice; namque eſt
Corporis & facies commoti, mobilitaſque,
Ipſe fluens etiam liquor, ut denſuſque, tenaxque eſt,
Seorſum quæque potens augere obſtacula cauſa.
Corporis & primò facies diverſa meantis
Efficit, ut motæ ſit copia materiai
Diverſa, & diverſa plaga, in quam impellitur ipſa,
Et ſpatium, per quod pulſa in latus ire coacta eſt,
Hoſpitem ut excipiat violentum, invitaque cedat.

de cauſa retardari. Primo quidem quia iter ſibi aperire debent intra fluidum ipſum, communicando motum ejus particulis; ſecundo verò, quia gravitas ipſorum a fluidi gravitate minuitur, cum nimirum exceſſus tantummodo gravitatis corporis deſcendentis ſupra gravitatem fluidi ipſius determinet illius deſcenſum, hujus aſcenſum. Porro illa prior dicitur fluidi reſiſtentia, & eſt eadem, in quacumque directione motus fiat cæteris paribus.

[a] Reſiſtentia hujuſmodi pendet a pluribus elementis, nimirum a ſuperficie corporis in fluidum incurrentis, ab ejus celeritate, a denſitate fluidi, a tenacitate ipſius, His mutatis mutatur ipſa reſiſtentia. De ſingulis agit breviſſime.

A ſuperficie pendet, ut dum corpus promovetur, major, vel minor fluidi copia dimoveatur loco, & alia potius, quam alia directione dimoveatur. Si eadem maſſa oblongam, & in apicem quendam, quo præeat, deſinentem figuram induat, multo minorem reſiſtentiam patitur, quam ſi ampliorem faciem præferat. Hinc proponitur problema inveniendæ figuræ, quæ cum eadem capacitate minimam habeat reſiſtentiam, cujuſmodi problema ſolvit Newtonus ipſe, ac alii plures poſt ipſum in datis quibuſdam reſiſtentiæ hypotheſibus.

Velocitas id præſtat, ut eo pluribus particulis communicetur motus, quo ipſa eſt major, & eo major velocitas ipſis communicetur, quo itidem ipſa eſt major. Quamobrem ſi habeatur ratio illius reſiſtentiæ, quæ oritur ab inertia materiæ commovendæ, ea debet eſſe, ut eſt velocitas per ſe ipſam multiplicata, ſive ut eſt velocitatis quadratum.

Rurſus quo fluidum eſt denſius, eo major eſt reſiſtentia illa ipſa, cum eo pari-

Ipſa movendarum majorem particularum
Major mobilitas numerum pro tempore certo
Deſtinat; atque ideo majoris munere motus
Afficiet plures, tantundem & detrahet a ſe
Corpus agens, tantumque moræ patietur eundo.
Plures particulæ quoque dimoveantur, oportet,
Si liquor ille fluens ſit denſior, aurave ſciſſa:
Plus retinent labens corpus, motumque retundunt.
Denique ſi facias illas magis eſſe tenaces
Particulas; mage difficili divellier a ſe
Evaleant ratione, magiſque obſiſtere pergant.
Omnia quæ faciunt porro, ut res ardua longe
Scire ſit, obſtandi in ſumma quæ, quantaque vis ſit
Cum cauſis collata ſuis, notiſque elementis.
Adde, quod implexum mage redditur id quoque multo
Propterea, quod ſtipantur præ corpore partes,
Conque premuntur, ubi velut aer exſiliente
Pollent vi; aſt aliæ a tergo tamen exſilienti
Vi quoque pollentes ipſa hac propellere poſſunt
Vi properans corpus; retrorſumque ilicet illæ
Converſæ celeri minuant obſtacula gyro.
Inde novo at de fonte velut, cum corpora magnæ
Mobilitate fugæ properant, obſtacula creſcent;
Nam neque tam ſubito retrorſum flectier aer
Ipſe queat, neque non antrorſum denſior eſſe.
Si quædam [a] inſpicias, paria & ſint cætera circum,
Ipſa

pariter major ſit quantitas particularum, quæ dimoventur, & eo majorem amittat motum mobile, quo alteri majorem imprimit.

Tenacitas demum major, vel minor fluidi ipſius auget, vel minuit reſiſtentiam, cum in majore vi ſuperanda ad particulas divellendas major in ipſum mobile reactio fit, & proinde major motus amiſſi quantitas, unde fit, ut motus per picem ſit difficillimus, per corpora vero ſolida, quorum partes non cedant, impoſſibilis.

Difficillimum eſt harum cauſarum effectus ita accurate definire, ut habeatur omnium ſumma, ex qua demum totalis reſiſtentia coaleſcit. Difficultatem auget illud, quod particulæ ipſæ fluidi ex anteriori parte denſantur magis in elaſticis potiſſimum, & reſiſtentiam augent, è poſteriore vero, dum ſe relaxant, urgent corpus, ac promovent, cujus impedimenti, & adjumenti menſura accurata haberi aut omnino non poteſt, aut vix poteſt. Illud unum appoſite Noſter ex Newtono monet, ubi velocitas ſit ſatis magna, augeri difficultatem, adjumentum minui, cum nec anteriores partes ita cito poſſint loco cedere, nec poſteriores relaxando ſe urgere fugientis corporis tergum,

[a] Videri affirmat, reſiſtentiam quibuſdam

Ipſa videbuntur fluidarum obſtacula rerum
Congruere in ſeſe repetitæ mobilitati,
Scilicet ut bis dupla ex illa duplice fiant,
Ternaque ter, ſi tantum auctus tres illa receptet:
Sin alia inſpicias, ſimilem ipſa obſtacula habebunt
Auctum, & mobilitas; nam dupla a duplice tantum,
Ternaque de terna naſcentur. Denique poſſunt
Illa itidem ex aliqua conſtantia parte videri,
Immutataque: vel potius tribus omnibus eſſe
Compoſita ex iſtis rationibus illa fatendum.
Haud bene * conveniunt verum cum legibus iſtis,
Præque ferunt nullas leges tentamina certas;
Difficile eſt igitur diſſolvere talia poſſe.
Eſſet opus motum deprendere, quantus is omnes
Sit per particulas diffuſus, perque, fluentes
Ipſas particulas quod continet, atque receptat,

dam conſideratis, debere eſſe proportionalem quadrato velocitatis, aliis conſideratis proportionalem ſimplici velocitati, aliis vero conſtantem eſſe; ac omnino ex iis tribus coaleſcere, quas ipſas, ac motus ab iis immutatos Newtonus conſiderat.

Nimirum quod pertinet ad figuram corporis, non ita difficulter determinatur ope Geometriæ, & calculi, habita ratione quantitatis ſuperficiei incurrentis, & directionis, qua ſingulæ ejus partes incurrunt. Quod pertinet ad denſitatem, ſatis patet, ipſi proportionalem fore reſiſtentiam cæteris paribus. Quod vero pertinet ad velocitatem, multo magis eſt varium. Si conſideretur ſola inertia materiæ dimovendæ, erit, ut diximus in ſuperiore nota, reſiſtentia, ut quadratum velocitatis; eodem enim tempore cum dupla velocitate duplo plures numero particulæ motum recipiunt, & duplo velociorem recipiunt. Si particulæ quædam ita ſibi cohæreant in minima quadam diſtantia, ut in ſeparatione quacumque uniuſcujuſque particulæ avellendæ a ſibi proxima idem motus adimatur corpori incurrenti, quæcumque ſit velocitas ipſius; tum reſiſtentia ab ejuſmodi cohæſione orta erit, ut numerus particularum, quæ divelluntur: adeoque cæteris paribus, ut ſimplex velocitas. Si demum aliæ particulæ vel ſibi cohæreant, vel in fluido elaſtico ſe repellant ita, ut ad diſtantias quaſdam vires illæ extendantur; tum eadem vis poterit eo minorem deſtruere motum in corpore incurrente, quo major fuerit ejus velocitas, quo nimirum breviore tempore aget; quo caſu compenſato minore cujuſque particulæ effectu cum majore particularum numero, reſiſtentia inde orta eſſet conſtans, ſive in ratione temporum, & nihil a mutatione velocitatis mutata. Demum tenacitas, quo major eſt, eo majorem debet reſiſtentiam parere, ſibi ſemper proportionalem, ſi non conſideretur major partium congeries ex anteriore parte, & motuum ad latera impeditorum effectus, quos quidem nulla ratione ſatis accurate computari poſſe arbitror, nec ſine arbitrariis prorſus hypotheſibus definiri.

* Newtonus, ubi determinavit, quid

Vas aliquod, ſi ſit, per totam denique terram,
Cui vas innixum eſt, circumfuſique liquores,
Qui proin partem aliquam motus tranſmittere debent
Rebus; ut his, quantum eſt amiſſum a corpore, conſtet.
Illa ſed ut fieri poſſent, conſtare neceſſe
Nobis ante foret, quonam ſtent ordine partes
Inter ſe fluidæ, quas moles, quaſque figuras,
Quaſque habeant vires. Sed qua ratione patere,
Et quibus hæc ſubici jam ſenſibus omnia poſſint?
Illius hæc cum ſint primordia notitiai,
Obruere immani numero, ambiguaque fatendum eſt
Natura noſtros animos, ne cernere poſſint,
Quod cupiunt, vanumque profundant proinde laborem.
Tunc equidem, obſtructam nobis aperire viam fors
Olim ſiqua volet, qua ſint decernere fronte
Corpora, quæ minimos patiuntur merſa liquore
Offenſus quocumque, valebimus, atque marinos
Viſuris fluctus aptas præſcribere formas
Navibus, ut minimo ſcindant vada ſalſa labore
Diſtendantque ſinus ſimul ampla merce capaces.
Porro [a] particulas tranant cum dura morantes

Cor-

quid conſequi debeat, ſi reſiſtentia ſit, ut velocitas, quid, ſi ut quadratum velocitatis, quid, ſi compoſita ex binis ſecundum binas eas leges agentibus, ac alia plura præmiſit ad hanc rem pertinentia, experimenta inſtituit tam pendulorum, quam corporum libere cadentium per aerem, & alia fluida, quorum ſucceſſum hic ſingillatim referre infinitum eſſet. Illud unum ſit ſatis monuiſſe, nunquam ſatis exacte cum theoria conſpirare experimenta, quamvis exiguum aliquando diſcrimen ſit, & cauſæ plures diſſenſus identidem ab eo proferantur.

Ut autem theoria ipſa perfici poſſet a priori, ut ajunt, ſive ab ipſa rerum natura, & cauſis, deberet innoteſcere, qui motus ſingulis particulis imprimi debeat; quin etiam toti vaſi fluidum continenti, & vero etiam toti Telluri ſuſtentanti vas. Ut id ipſum innoteſceret, oporteret noſſe, quot particulis, qua forma, quo ordine, ad quam diſtantiam diſpoſitis, quibus viribus præditis, fluidum conſtet. Tum & illud: oporteret nimirum uſque adeo Geometriam, & Analyſim provexiſſe, ut conſtare poſſet, qui motus ex datis viribus in dato corpuſculorum numero oriri debeant, quod humani ingenii vires excedit. Hinc ego quidem vix illud ſperare auſim, ut nimirum unquam detegi poſſit vera fluidorum theoria, quæ a nimis magna elementorum ignotorum multitudine penitus pendet. Ab iis autem omnibus pendet etiam accurata determinatio problematis de ſolido minimam reſiſtentiam cum maxima capacitate conjungentis, cujus hic Noſter meminit.

a Jam ipſam conſiderat maſſam corporis

Corpora, quam ſint denſa eadem, cognoſſe neceſſe eſt.
Quippe gradu vario varianter denſa feruntur,
Quandoquidem mage denſa, minus deperdere motus
Debent pro numero, queis conſtant, particularum.
Inde [a], leves quas res vocitant, non ejaculari
Poſſe putant valido motu, & perniciter ire,
Excuſſus funda veluti lapis, aut grave plumbum
Effugit ingenti per longos impete tractus;
At ſubito validis quamvis projecta lacertis
Pluma cadit, vix ut geminas procurrat in ulnas:
Aer quandoquidem plumæ, lapidique reſiſtens
Æquali vi forte, pari ſi fronte pateſcunt,
Pauperat ilicet hanc motu violenter adempto,
Non lapidem, niſi paulatim, furtimque, ſuis tot
Partibus intextum, multo ut locupletior extet.
At ſi nulla forent obſtacula, corpore quanto
Materiæ minus eſſet in uno, projiceretur
Æquali quod vi, tanto velocius iret;
Idem motus enim, quo parvum ſit mage corpus,
Eſt citior, contra in majori tardior exit.
Hinc etiam [b] exoritur ratio, cur, cum grave ſaxum
Proje-

poris tranſlati per fluidum, quæ collata cum ejus ſuperficie plurimum conducit ad determinandum effectum reſiſtentiæ. Nam eidem figuræ cum eadem velocitate tranſlatæ eodem modo reſiſtitur a fluido in externam incurrente ſuperficiem, quæcumque maſſa ipſâ ſuperficie incluſa deliteſcat. Sed ea reſiſtentia, ubi maſſa eſt major, per majorem numerum particularum diviſa, minus demit de motibus ſingularum. Hinc autem plurium phœnomenorum cauſa facile aſſignatur, quorum nonnulla Noſter commemorat.

a Dum eodem brachii motu impellimus cum eadem initiali velocitate lapidem, & plumam, lapis longiſſime evolat, pluma ſtatim ſiſtitur, quia nimirum pro quantitate ſuperficiei ſuæ multo plus materiæ continet lapis, quam pluma. In vacuo ad eandem abirent diſtantiam, & ſi eadem vi impelleretur utrumque corpus, id quod minus materiæ continet, majorem reciperet ab eadem vi velocitatem, & ad majorem diſtantiam diſcederet. Aer autem ſingulis lapidis particulis multo minus obeſt, quam ſingulis particulis plumæ. Hinc ille vulgaris error: difficile eſſe tenuiſſimo corpori, ut lumini, ingentem velocitatem imprimere.

b Eodem pertinet, & illud, quod hic perſequitur. Lapis in aquam ſibi relictus, citiſſime ad fundum decidit: idem in pulverem tenuiſſimum comminutus, diutiſſime innatat, & vix poſt longam aquæ quietem delabitur. Id inde provenit, quod contuſione illa ſuperficies, quæ jam eſt ſumma ſuperficierum omnium particularum, multo magis excreverit, manente eadem maſſa. Inde fit, ut ſi ſingulæ particulæ cum inte-

Projectum in limphas fundum petat ilicet imum;
Tritum ſi ſit idem, diſperſumque innatet undis,
Albenti liquidos perturbat pulvere fontes,
Cunctaturque diu deſcendens tempore longo;
Ventus & æſtivis ſuſtollit, & ungula campis
Nubem, quæ remanet longum ſuſpenſa per auras,
Pulveream, at terra lapides non evehit ima.
Nimirum quæ de genere uno corpora conſtant,
Formaque aſſimili, non, ipſa ut mole, videbis
Creſcere ſic facie, quæ lata eſt, longaque tantum,
Ipſa at præterea moles eſt alta; per omnes
Diſtenſa hæc triplices menſuras, illaque binas.
Quare, pro facie, majori in corpore, multo
Molis erit plus; nempe, pilæ quam tranſeat axis
Exiguæ decies, pila ferrea, cortice totam
Quæ faciem ſit, ut illa, argenti obducta, vel auri,
Illius decies cohibebit pondera centum,
At non exterius niſi centum excurret in oras,
Auro & centuplici ſuper, argentove tegetur.
Jam ſimili ratione minori in corpore contra
Multo major erit facies pro mole, magiſque
Ipſi multo etiam, cum permeat, officietur:
Ipſa etenim facie creſcente obſtacula creſcunt.
Quare cum in tenui tenuiſſima pulvere moles
Sit, nec tam tenuis, multo at diſcrimine major
Olli ſit facies, creſcent obſtacula tanta,
Pulveream ut poſſint retinere per aera longum,
Et per aquam nubem; minor & frons, & mora ſaxis.
Nunc [a] alii qui ſint offenſus, cum grave corpus

Aura.

integro lapide conferantur, multo magis in hoc maſſa ſuperet illius maſſam, quam ſuperficies ſuperficiem. Quin imo illud generaliter eſt verum, in corporibus ſimili figura præditis, quod ſupra expoſuimus, ubi egimus de figura, ſuperficiem creſcere in duplicata, molem, adeoque & maſſam in homogeneis, in triplicata laterum homologorum ratione, ut nimirum corpus decuplo craſſius, centuplo majorem habeat ſuperficiem, maſſam vero millecuplo majorem, quod idcirco accidit, quia duas habet dimenſiones tantummodo ſuperficies, tres vero moles. Creſcit igitur multo magis maſſa, quam reſiſtentia, adeoque in majore mole multo minus ſingulæ particulæ de motu deperdunt ſuo, quam in minore.

a Jam ad alterum reſiſtentiæ fontem delabitur, quem ſupra propoſuit, nimirum gravitatem fluidi, aliquid de corporis immerſi gravitate detrahentis, ubi occaſio ſe offert agendi de illa, quam gravitatem ſpecificam appellari diximus. Quoniam omnes materiæ particu-

Aurarum it grave per pelagus quoque, ſive liquorum,
Dicendum eſt. Cuncta hic diverſo a pondere pendent.
Pondera metimur, ſub eadem corpore mole
Mutua cum referuntur; & hinc graviora vocamus
Eſſe aliis alia, aut etiam leviora viciſſim;
Vel cum diverſæ æquali ſunt pondere moles,
Quod minus, illud enim gravius. Gravitaſque per omnes
Æque particulas cum ſit diviſa, neceſſe eſt,
Ut cum particulis in corpore pondera creſcant;
Proin mage quod denſum eſt, gravius quoque corpus habeto;
Sic ligno plumbum eſt, ſic plumbo denſius aurum,
Et gravius; proin par auri pila fortius imam
Nititur ad terram ob gravitatem, quam pila plumbi,
Fortius hoc itidem, quam quod teres undique lignum eſt.
Nunc in materia corpus grave pone liquenti,
Æquali quæ pondus idem ſub mole recepret,
Quid faciet? deorſumne cadet? parteſque liquentes
In latera ejiciet, ſuperaque exſurgere coget?
At cur decedent, ſi par eſt pondus eiſdem,
Vique pari pollent, velut illud, ſubtus eundi?
Num ſaliet? quibus impulſum ſed viribus, æque eſt
Si pollens, ac particulæ ſub mole liquentes
Æquali? Saliet non ergo, deſilietque,
Sed liquidi regione loci quacumque manebit.
At ſaliet, ſi fors levius ſit, deſilietque,
Si gravius, quam materiæ pars æqua fluentis,
Ponderis & ſolo motus diſcrimine fiet.
Sic preſſo de crine pilam cum mergis in undas,
Qua ſita erit primo, ſtabit regione, parique

Se

ticulæ habent æqualem gravitatis vim, ubi denſitas eſt major, ibi etiam cum eadem mole plus habetur ponderis, & minor moles requiritur ad habendum idem pondus. Gravitas hoc modo conſiderata, dicitur gravitas ſpecifica, cujus menſura eſt pondus diviſum per molem ita, ut pari mole ſit eo major, quo majus eſt pondus, pari pondere eo major, quo moles eſt minor. Hoc pacto plumbum eſt ſpecifice gravius, quam lapis, aurum vero magis, quam ipſum plumbum.

Concipiamus jam corpus ejuſdem ſpecificæ gravitatis cum aqua, intra ipſam aquam, ut crines ſunt ferme; id nec aſcendet, nec deſcendet, cum æquali aquæ mole æquilibratum. Si ſpecifice gravius ſit, ut lapis, & ferrum, deſcendet quidem, victa æquali mole aquæ, quæ minus ponderat, ſed cum debeat ad aſcenſum cogere ipſam aquæ molem, lentius deſcendet, quam deſcenderet. Si ſpecifice levius ſit, contra aſcendet victum ab æquali, & magis ponderante mole aquæ, ut pleraque ligna;

gna;

Se librabit aqua ; ſaxa , & genus omne metalli
Ima petent ; contra properabunt lignea ſurſum
Plurima texta , ſupraque undas educta liquentes ,
Tanto merſa minus , quanto leviora , natabunt.
Aere ſic etiam tenues conſurgere fumos
Cernimus , atque leves ſurſum volitare vapores .
Scilicet undai claudentes aera bullas
Intra ſe multo rarum magis , atque calentem .
Quare [a] , cum corpus ſuper undas fluctuat, illud
Eſſe minus debet grave ſuſtentante liquore .
Partim a natura tamen id pendere tenaci
Undarum quoque poſſit , & ipſa proinde figura
Corporis . Argenti ſic labrum extare videmus ,
Atque ſuper limphas nitidum fluitare liquentes :
Sed minor hic gravitas eſt ; ipſum namque metallum
Aere cum toto , quem continet intus in amplo
Diffuſum gremio , minus æqua pendit aquai
Mole:

gna ; ſunt enim & ligna ſpecifice graviora , quam aqua , quæ in ipſa merguntur : eodemque pacto vapores , qui conſtant exiguis aquæ bullulis aere calidiore,& rariore, ac magis elaſtico plenis , ſed minus ponderante , aſcendunt . Ubi autem id genus leviora corpora ad ſuperficiem ſupremam devenerint , innatare debent , ita ut pars , quæ merſa deprimitur , molem habeat , cui æqualis aquæ moles æquè ponderet , ac totum corpus innatans , cum ejus aquæ vices id corpus ſuppleat in æquilibrio ſervando ; unde facile conſtat , eo minorem immergi partem corporis , quo minor eſt gravitas ejus ſpecifica .

a Occaſio hic ſe præbet attingendi quæſtionem illam , quæ tantum Galileo moleſtiæ olim attulit , utrum nimirum figura quidpiam ad innatationem conferat ita , ut eadem maſſa pro diverſa figura jam innatet , jam demergatur . In primis certo conſtat , ſi ejuſmodi figura ſit , ut cavitates vacuas internas habeat , vel e ſuperiori parte cava liquorem excludat , poſſe corpus ſpecifice gravius innatare liquori . Sed de iis figuris non erat ſermo ; quin imo tum quidem corpus novum quoddam fit ſpecifice levius , cum ejus moles comprehendat cavitates illas ipſas , & maſſa ſolam habeat prioris materiæ maſſam cum aeris maſſa conjunctam .

Excluſo igitur hoc caſu Galileus cenſebat , figuram nihil conferre ad innatationem in aqua ; alii plures ejus adverſarii cenſebant oppoſitum , ac ipſum Galileum ad experimenta publicè capienda provocarunt . Ampliorem, & tenuem metalli lamellam in ſuperficie aquæ collocarunt manu leviſſima poſitione horizontali , quæ ſtetit , Galileo inſpectantium judiciis cauſâ victo . At is notavit , lamellam illam nonnihil deprimi infra aquæ ſuperficiem , quæ ut ipſi lamellæ adſperſa in guttulas aſſurgit elatas , & tumentes , vel quod repellantur ejus particulæ a particulis metalli ad latera , vel quod ſe invicem magis attrahant , quam ab illis attrahantur , & repulſio ejuſmodi , ſive attractionis exceſſus vincat niſum , quem gra-

Mole: ſed & latam ſi, ſubtilemque metalli
Deſuper imponas lamellam, ſuſtinet unda;
Illa tenetur aquæ vim propter nempe tenacem;
Nec ſecus aggeribus conſurgeret unda retentis
Circum, ſed tegeret ſubito diffuſa ſuperne.
Cimbula tum veluti fiet; nam lamina fundi,
Undaque fungetur laterum vice; proinde manebit
Lamina, & ipſe aer, qui ſponda clauditur illa
Limpharum, levior, quam moles æqua liquoris.
Quod ſi non poſſit paries attollier undæ
Hinc illinc, ut cum madefacta eſt lamina circum,
Se ſuper effundet ſubito liquor, & teget omnem,
Paulatimque gravem faciet petere ima deorſum.
Nonne vides igitur, non, corpus ut innatet undis,
Corporis externam fruſtra tunc eſſe figuram,
Nempe tenax adeo cum ſit liquor, atque repugnet
Disjungi a ſeſe: quod item quoque ſæpe videre eſt

gravitas exerceret ad deſcenſum obliquum, quo gutta ipſa expandatur per laminam; ita etiam ibi emineret ſupra omnia lamellæ latera, & exiguos quoſdam aggeres efformaret, qui ſe per lamellam ipſam non effunderent. Eo pacto fiebat quædam veluti cimbula, in qua fundum eſſet ipſa lamella, latera autem eſſent illi aggeres aquei, inter quos aer cum lamella ipſa conjunctus maſſam exhiberet minoris ſpecificæ gravitatis, quam ſit ipſa aqua. Et hæc quidem tum Galileus, qui madefacta prius ſuperiore ſuperficie lamellæ, oſtendit ſemper lamellam ipſam ſtatim immergi, aggeribus illis ſublatis, & ſe per ſuperficiem aquæ lamellam madefacientis expandentibus.

Hic autem jam illud patet, ex illis ipſis aggeribus, & ex guttis, quas potiſſimum in quibuſdam pinguibus, vel lanuginoſis corporibus videmus fere rotundas, ut etiam in guttis pendentibus, quæ non decidunt, niſi ubi pondus, aucta mole, ſatis excreverit, aquæ particulas adhærere ſibi invicem. Requiritur igitur vis quædam, quæ particulas ipſas a ſe invicem divellat, ac disjungat. Quare ad hoc, ut corpus demergatur, & deſcendat, requiritur vis, quæ ſuperet non ſolum aquæ ſurſum pellendæ pondus, ſed & vim illam cohæſionis. Vis autem cohæſionis diverſa erit pro diverſo numero particularum, quæ debent divelli, & diverſus erit is numerus pro diverſa corporis forma, ob ſuperficiei menſuram diverſam. Quare fieri poteſt, ubi exceſſus gravitatis ſpecificæ eſt admodum exiguus, ut eadem maſſa cum una figura deſcendat, cum alia innatet, & ubicumque poſita ſit intra aquam, ibi maneat, exceſſu illo gravitatis ſpecificæ cum una figura excedente cohæſionis vim, cum alia non excedente. Id quidem in aqua, cujus adhæſio eſt ſatis exigua, difficilius eſt experimentis confirmare, niſi forte in ſatis minutum pulverem contuſus lapis idcirco aquam perpetuo etiam poſſit ſordidam reddere; at in tenacioribus liquoribus, ut in pice, vel cera liquata, facile eſt videre, cum in iis corpora etiam ſpecifice graviora innatent, nec demergantur.

In guttis, ſi ſudantes humore cavernas
Ingrederis; longum madidis ſuſpenſa tenetur
Fornicibus, nec non niſi pondere decidit auɛto
Guttatim, liquidis quantumvis partibus, unda.
Non igitur ſatis eſt, ut majus corporis extet
Pondus, uti queat id mergi, quam pondus aquai:
Aſt opus eſt, diſcrimen uti quoque ponderis iſtud
Scilicet exſuperet vires, quibus unda repugnat
Disjungi, ſindique tenax: diſcrimen at ipſum
Si non majus erit vincendis viribus, undis
Immerſum corpus ſtabit, quocumque locorum
Ponatur, ſurſum per ſe, deorſumque nec ibit.
Ergo velut facies extra diverſa figuram
Diverſam ſequitur, qua comptum eſt corpus, & illam
Disjungendarum numerus diverſus aquai
Partium; ita & majus diſcrimen ponderis illud,
Quod dixi, ejuſdem ſub forma corporis una
Eſſe poteſt, aliaque minus; quam nempe reſiſtens
Vis undæ ne ſcindatur; proin ſæpe figuram
Unam aliquam corpus ſi præferat, innatet undis:
Sin ipſam invertat, fundum mergatur ad imum.
Omnis [a] ab his igitur, quas diximus ante, duabus

Ob-

[a] Redit jam ad gravium motum per aerem, qui motus reſiſtentiam patitur a prima cauſa ortam motus fluido ipſi proſciſſo communicati ſecundum directionem quamcumque, & in deſcenſu eſt minor ob imminutam gravitatem ipſius intra aerem ab aeris ipſius gravitate.

Prima illa cauſa illud præſtat, ut gravis libere per aerem deſcendentis motus non acceleretur perpetuo juxta eas leges, quas in ſuperiore libro demonſtravimus, ut nimirum perpetuo non creſcat velocitas in ratione temporis, & ſpatia decurſa temporibus æqualibus non ſequantur legem numerorum imparium, ſed demum motus ipſe ad æquabilitatem in infinitum accedat. Nam quo magis creſcit velocitas, eo etiam magis creſcit reſiſtentia, in quacumque velocitatis ratione id fiat. Quare eo minor remanet exceſſus gravitatis reſiduæ in aere ſupra reſiſtentiam ejuſmodi, qui ſolus exceſſus velocitatem auget, cujus proinde velocitatis incrementa eo minora evadunt, quo ipſa evadit major. Si velocitas eo excreſceret, ut reſiſtentia fieret æqualis gravitati, motus evaderet prorſus æquabilis, quia tantum detraheret reſiſtentia, quantum gravitas adderet. Ad eum limitem nunquam revera deveniretur, ſi aer etiam in infinitum extenderetur, cum eadem tamen denſitate, & gravitas eum conſtanti urgeret vi, ſed tamen ad ipſum accederetur in immenſum. Is autem limes eſt illa ipſa velocitas, cum qua ſi aer incurreret in id corpus grave, ipſum ſuſtineret.

Porro ſolet ludicrum id ſpectaculum exhiberi pilæ vi aeris ex arcto foramine ſurſum erumpentis ſuſtentatæ, quod in

Obſtans vis oritur cauſis, dum corpus in auris
Aeris eſt, deorſumque cadit, terræque propinquat:
Quarum quæ prior eſt, liquidæ qua ſcilicet ipſæ
Finduntur partes, quemvis quacumque fluente
Motum in materia generatim tardat; at illum
Præpedit altera, per ſpatium grave nempe, fluenſque
Corpus item grave cum deſcendit. Prima profecto
Efficit hoc cauſa, ut celerent ne corpora motu,
Quem ſuper inventæ leges expoſcere viſæ;
Nam facit, ut motus paulatim accedat ad æquum;
Æquus uti fiat, tanto ſi creverit auctu
Mobilitas, par vi gravitatis ut aucta reſiſtens
Vis ſit, & eripiat tantum de corpore motus,
Illa ſuos ſemper repetens quantum adjicit ictus.
Namque pari contra ſi mobilitate feratur
Tunc aer, corpus grave ſuſtentaret ibidem,
Et retineret: aqua velut exagitante videmus,
Vere renidentes veſtros cum viſimus hortos,
Fornicibuſque juvat frondoſis, Tuſcula Tempe,
Sæpe ſubire, jocos & Naiadum inſpectare,
Muſarumque domum; namque hic habitare Camœnas
Monte volunt bifido ſuper, audirique canentes;
Sæpe etiam audiri concham Tritona recurvam
Inflare, & timidas ſtrepitu terrere Napæas;
Nempe videmus aqua ſurſum exagitante propulſum
Aera de tubulis fugere, & retinere liquenti
Suſpenſam regione pilam; gravis illa repente
Jam ruat: aurarum negat impetus ire deorſum.
Officitur * varie hìc pro denſo corpore, & amplo;

in amœniſſima, & magnificentiſſima Aldobrandina Pamphiliorum Tuſculana villa videre eſt, ubi & Muſarum in Parnaſſo cum Apolline ſedentium ſimulacra tubas tenent, quas olim vento aquarum motu excitato inflabant, Centauri autem ſimulacrum tubam, Poliphemi vero ſtatua fiſtulam paſtoralem nunc etiam inflat aquarum vi aerem impellente. In ejuſmodi pilæ ſuſtentatione vi aeris aqua propellente erumpentis e foramine, pila ipſa ſolet tremere, & jam elevari, jam deprimi, ob inæqualem nimirum velocitatem aeris, & directionem, qui aer ſi æquabili velocitate, & directione moveretur perpetuo, pila omnino immota perſtaret, tota gravitatis actione eliſâ a reſiſtentia.

* Jam hìc eo redit, unde digreſſus fuerat, ad corporum inæqualem deſcenſum in aere. Pendet deſcenſus a mole, & denſitate. Corpus æquè denſum, ſed majoris molis, citius deſcendit, quia in eo maſſa creſcit in majore ratione, quam ſuperficies, adeoque in majore, quam reſiſtentia, cæteris paribus. Cor-

Præcipitans corpus ſi namque ſit amplius unum,
Æque ſed denſum, citius labetur in auris,
Nam pro materia facies minor ipſius extat;
Sic etiam, ſit idem tantum ſi denſius: at cum
Inter ſe fuerint non æque denſa, nec ampla
Corpora, quæ celerent gravitatis ab ictibus acta;
Accidet interdum, cui moles major, ut illud
Serius ad terram veniat, quia partibus extat
Compactis raro magis ordine, pondere quamvis
Vincat idem toto; nam multo denſius alterum
Eſt, & proinde minora ruens obſtacula ſentit.
Hoc facile eſt pacto diſſolvere, in aere quidquid
Ante adverſari viſum eſt deſcenſibus æquis,
Æque & partitæ gravitati in materiam omnem;
Machina quod ſpatio nobis patefecit inani.
Poſſumus a hinc, quovis ſub corpore materiai
Quantum ſit, facili prorſus cognoſcere pacto;
Olli nam pondus reſpondeat; hoc tibi noſſe
Proinde ſat eſt. Porro, varie quam denſa viciſſim
Quælibet inter ſe pariter ſint corpora, prendes,
Si ſub mole pari variantia pondera quæras;
Nam tum corporibus, mage quæ ſtipantur, oportet,
Pondera concreſcant pariter mage. Quin quoque pondus
Aeris aurarum licet explorare liquentum,

Aera

pus ejusdem molis, ſed denſius, citius deſcendit, quia maſſam majorem habet, reſiſtentiam vero eandem cæteris paribus. Si & mole differant, & denſitate, illud interdum cadet citius, quod minoris eſt ponderis; ſi nimirum tanto ſit denſius, ut minor ſit ratio ſuperficiei ad ſuperficiem, quam maſſæ ad maſſam.

Id ſemper accidet, ubi diameter minus denſi ad diametrum denſioris habuerit rationem minorem, quam hujus denſitas ad denſitatem illius, cubus autem diametri illius ad cubum diametri hujus majorem, ut oſtendemus in ſupplemento. Interea ſint bini globi, quorum diametri, ut 1, & 2, denſitates, ut 3 & 1. Erunt ſuperficies ut 1, & 4, moles ut 1, & 8, maſſæ, ut 3×1, & 1×8, ſive ut 3 ad 8, quæ ratio eſt major, quam ratio ſuperficierum 1 ad 4, vel 2 ad 8. Nimirum globus major pondere ſuo ſuperabit pluſquam duplo pondus minoris. Sed quia id ſuperabit minus, quam triplo; ſuperficiem autem habebit quadruplo majorem; reſiſtentiam patietur majorem, quam pro ſua maſſa, & ſerius deſcendet.

Atque hoc demum pacto diſſoluta penitus remanet difficultas, quæ ex inæquali gravium deſcenſu in aere haberi poterat contra æquabilem gravitatis diffuſionem per omnes omnium, utcumque eterogeneorum corporum particulas, quam contra directe evincunt experimenta in Boiliana machina inſtituta.

a Plurima jam hic congerit, quæ inde eruuntur pro maſſarum, ac denſita-

tum

Aera ſi vitreo prorſus de fornice totum
Educas; quippe explorans gravitatis adempta
Quæ ſit eo clauſi tum pars de fornice vitri,
Invenies, quantum tribuendum cuique profecto
Aeriæ pondus moli; de corpore quovis
Quantum & proin furtim decerpat ponderis aer,
Scilicet in mediis cum corpora pendimus auris.
Si quoque corporeas cohibentes pondera moles
Ignores, quantum ſint augmina denſa fluentum
Et ſolidarum inter ſe, poſſis prendere, rerum;
Has primum exterius, poſt ipſo pende liquore
Mergens; quandoquidem quantum illo corpora merſa
Ponderis amittunt, tanto pollere liquorem,
Nempe ſub æquali conprenſum mole, neceſſe eſt:
Et quanto minus eſt, quod erit de pondere toto
Corporis amiſſum merſi, ipſo pondere toto
Nimirum, tanto denſum minus eſſe liquorem
Corpore perſpicies ſolido: diverſa ſub uno
Corpora proin mergens, unum quodcumque liquore
Vel ſub diverſo corpus, variataque, ſemper
Explorans, ut ſint vario in tentamine quoque
Pondera, cognoſces qua corpora ſe ratione
Quælibet inter ſe reſpectant denſa viciſſim,
Quilibet & denſi qua ſint ratione liquores;
Unde [a] Syracuſiæ deprenſa ea furta Coronæ.
Nunc

tum æſtimatione, & comparatione ad ſe invicem. In primis quoniam æqualiter gravitant æquales materiæ particulæ, pondera erunt maſſis proportionalia, & ponderando diverſa corpora habetur relatio inter diverſas maſſas. Si ex vaſe cognitæ capacitatis extrahatur aer, & ponderetur tum ante, tum poſtea ipſum vas; invenitur pondus aeris ipſius ex amiſſo pondere. Hinc pro data quavis mole corporis in aere ponderati, deprehendi poteſt, quantum ipſi addendum ſit, ob pondus aeris illud imminuens. Ponderando jam æquales moles diverſorum corporum, ſeu ſolidorum, ſeu fluidorum in aere, ac habita ratione additamenti ob aeris pondus præſtandi, innoteſcit ratio denſitatum corporum eorundem ponderi invento proportionalium. Sine ulla molis conſideratione ratio denſitatis cujuſvis ſolidi ad denſitatem cujuſvis fluidi invenitur ponderando ſolidum prius extra fluidum, tum in eo demerſum. Diſcrimen enim binorum ponderum æquabitur ponderi æqualis molis fluidi, adeoque, ut differentia ponderum ad pondus extra fluidum, ita erit denſitas fluidi ad denſitatem ſolidi. Hinc immergendo diverſa ſolida in idem fluidum, vel idem ſolidum in diverſa fluida, habebitur ratio denſitatum omnium eorum ſolidorum, & fluidorum inter ſe.

[a] Notiſſima eſt hiſtoria Archimedei inventi, qui furtum ab Artifice factum in corona aurea Hieronis Regis deprehen-

Nunc [a] veluti ſalebris obſtantibus eluctati,
Quod facimus, celeremus iter, gravitaſque per omnem
Materiam diffuſa æque quo ducit, eamus:
Propterea jam quod gravitatis dicimus eſſe
Punctum in corporibus medium queiſcumque, videndum eſt,
Quale ſit, inque ſitus quos cogat corpore ferri.
Quo cupias [b] tu de puncto ſuſpendere corpus
Sive hac, ſive ſitùs illa ratione, vel ipſi
Inniti facias, ſic ut libretur ab omni
Immotum latere, atque æqualiter undique pendat,
Scilicet id medium punctum gravitatis habendum eſt;
Nam puncto hoc nixum corpus convertier unquam
Per ſeſe nequeat laterum gravitate ſuorum,
Ni ſimul & punctum deſcendat; proinde manere
Eſt opus immotum corpus, ſi immobile punctum eſt,
Scilicet ipſum ſi delabier impediatur.

Pro-

hendit, cum in balneo eſſet, unde præ immani gaudio fere amens, nudus proſugit ſuum illud inclamans Ἕυρηκα, ſive *Inveni*. Rex aurum puriſſimum dederat. Artifex immiſcuerat argentum. Sunt, qui cenſeant, Archimedem iniiſſe rationem deprehendendi quantitatem furti, videndo aquam e balneo effluentem, dum ipſe balneum ipſum ingrederetur. Cum nimirum idem auri pondus minus occupet ſpatium, quam argenti, cenſent illum in idem vas aqua plenum immiſiſſe prius auri mundiſſimi pondus æquale ponderi coronæ, tum ipſam coronam, & e diverſa quantitate aquæ effluentis æſtimaſſe diverſas moles, ac ex iis quantitatem argenti auro immiſcendi ad habendum id incrementum molis. At eſt multo veroſimilius, Archimedem, cum videret ſuum ipſum corpus multo levius evadere in aqua, quam in aere, cognoviſſe illud, diverſæ denſitatis corpora ejuſdem ponderis in aquam immerſa, debere diverſam ponderis partem amittere, & immergendo diverſa ſolida in ipſam aquam, poſſe rationem denſitatum definiri methodo expoſita in ſuperiore nota. Id ipſum Galileus cenſuit, qui ſlateram Archimedeam ex his principiis petitam, pro denſitatum æſtimatione vulgavit.

a Ex ipſa gravitate occaſionem arripit etiam agendi de centro gravitatis, quoniam ab ipſa gravitate ortum habuit ipſius conſideratio, & nomen; licet etiam ſine gravitate ſummo ſit uſui per Phyſicam univerſam. Id punctum Noſter vocat *punctum medium gravitatis*, ne centrum nominet, vocem latinis melioris ævi non uſurpatam. Præmittit autem, quæ ad æquilibrium pertinent, ubi & in machinarum notionem excurrit, tum elegantiſſimas, & utiliſſimas centri gravitatis proprietates quaſdam perſequitur methodo, quam ego exhibui in diſſertatione de Centro Gravitatis.

b Centrum gravitatis, ait, eſſe id punctum, ex quo corpus, utcumque ſuſpenſum, in æquilibrio manet, nulla parte præponderante. Inde autem eruit, ubi omnis motus gravitatis centro impediatur, immotas manere omnes corporis partes.

Digitized by Google

Propterea [a] virgam ſine pondere concipe longam,
Et rigidam, cujus nectantur finibus ambis
Æquales hinc inde globi, ſuſpenſaque puncto
Pendeat e medio: pila nititur ire deorſum
Quælibet, & junctam virgæ quoque ducere partem:
Obſtat at alterius par niſus, nec queat una
Vel paulum labi, quin tantundem altera ſurgat.
Quapropter quia nulla pari quit vincere niſu,
Non erit, ut poſſint deſcendere, proinde, neceſſe eſt,
Immotæ ſtent, libratæque: fac adjiciatur
Ponderis ex una pauxillum parte, repente
Verget ea pila parte in terram, aſt altera ſcandet;
At non ſcandet, ubi productam dimoveatur
E medio puncto per virgam, ut tractus ab iſta
Creſcat item parti, velut illa pondera creſcunt.
Quin deſcendet, ubi ſpatium id plus pondere creſcet

Ad-

(a) Hinc jam ut ipſius æquilibrii leges exponat, virgam concipi jubet rigidam, atque inflexilem, ſed omni pondere deſtitutam, quæ quidem, ne rem turbet, inertiâ quoque carere debet.

Si ipſa ſuſpendatur e puncto medio, & ad æquales diſtantias hinc & inde a medio illo ſuſpenſionis puncto adnectantur ipſi bini globi æqualis ponderis; patet debere ipſos in æquilibrio manere, cum neuter alterum vincere poſſit, & cogere ad aſcenſum. Si ex altera parte addatur ponderis quantumvis parum, tolletur æquilibrium, & pars illa deſcendet, aſcendente altera. Quod ſi diſtantia a puncto ſuſpenſionis non ſit eadem, bina corpora æqualia non manebunt in æquilibrio, quin imo fieri poterit, ut id quod gravius eſt, ſed puncto ſuſpenſionis propius, cogatur aſcendere. Habetur nimirum æquilibrium, ubi diſtantiæ a puncto ſuſpenſionis ſunt reciprocè proportionales ipſis ponderibus appenſis, ut tanto minor diſtantia ſit, quanto pondus eſt majus.

Id theorema notiſſimum hoc pacto demonſtrat Noſter, demonſtratione, quæ ad omnes generaliter machinas transferri poteſt. Manifeſtum eſt illud, ſi quædam vis requiritur ad movendũ corpus quoddam per unum ſpatium dato tempore, duplam requiri ad movendum per duplũ, triplam per triplum, dimidiã per dimidium, & ita porro. Quare & illud aſſumi poteſt, ut manifeſtum, ſi quædam vis poteſt aliam vim contra ſuam directionem agere per quoddam ſpatium dato tempore, ad eam ita agendam per duplum, triplum, dimidium ſpatium, requiri duplam, triplam, dimidiam vim. Jam vero in illa virga ſi ponendum ſit ex altera parte pondus, quod aliud pondus poſitum ex parte altera in eadem diſtantia elevare debeat, debet ipſum ſuperare nonnihil, ut vidimus. Si autem corpus, quod in poſteriore parte elevandum eſt, ſit in dupla, tripla, dimidia diſtantia, elevandum erit per duplum, triplum, dimidium circuli arcum, ſive per duplam, triplam, dimidiam altitudinem prioris

alti-

Adverſo. Alterutrum duplici ſic concipe tractu
Arceri a medio, duplicem rapietur in arcum,
Si moveatur, eritque duplex proin impetus ipſi,
Nec niſi cum duplici librabit pondere ſeſe
Oppoſito. Alterutri ſi tum ſuperaddere tentes
Aut ſpatii, aut aliquid quoque ponderis, efficies, ut
Pars hæc vincat, at illa per auras victa feratur.
Sic igitur quanto corpus vicinius ipſi
Sit puncto, ſit idem tanto quoque majus, oportet,
Ut queat immotum conſiſtere, libratumque.
Et jam ᵃ ſi plures generatim machina vires
Conjungat varia inter ſe regione locatas;
Quæque magis tanto pollens eſt, quo ſimul in ſe
Fortior eſt, & per ſpatium quo majus abiret,
Si victrix, vel victa foret (quod ſcilicet ipſa
Per ſpatium recta vis nititur ire, vel oram
Eſt quod in oppoſitam contra). Vigor omnis hic ergo,
Momentumque alio quem dicere nomine ſuemus;
Quo pugnant vires inter ſe, conſit ab ipſa
Vi ſimul & ſpatio, repetita ſcilicet a vi
In ſpatium, quo tum deſcendunt, inſiliuntque.

I nunc

altitudinis eodem illo tempore, quo corpus in priore parte poſitum deſcendit. Quare requiretur dupla, tripla, dimidia vis ejus, quæ prius requirebatur ad victoriam; unde conſequitur, ut ſi pondus eo ſit minus, quo diſtantia eſt major in eadem ratione, neutra pars vincere poſſit, ſed debeant in æquilibrio manere.

ᵃ Superiorem theoriam generalem reddit. In quavis machina, utcumque binæ vires connexæ inter ſe ſint (quarum quidem alteram appellare ſolent vim, alteram reſiſtentiam) ut corpus alteram exercens ſecundum directionem ejus moveri non poſſit, quin alteram exercens corpus contra hujus directionem moveatur, ſpatia autem motibus is peragenda ſint eo minora, quo vires majores ſunt in ratione eadem, ſemper habebitur æquilibrium. Nam in caſu æqualitatis æquilibrium haberi debere conſtat, & in caſu inæqualitatis eo major requiritur ad victoriam vis in altero corpore, quo majore ſpatio contra ſuæ vis directionem alterum corpus cæteris paribus removeri debet. Nimirum ſi ad machinæ motum requiruntur velocitates initiales potentiæ, & reſiſtentiæ alterius ſecundum, alterius contra ſuam directionem reciproce proportionales ipſis, habebitur æquilibrium, & quies, neutra vincente.

Hinc etiam generalius, ubi vires quæcumque ad machinam applicantur, non ſolum attendendum eſt ad ipſarum energiam abſolutam, quam extra machinam haberent, ſed etiam ad velocitatem, cum qua moveri inciperent ſecundum ſuam directionem, ſi vincerent, vel contra ipſam, ſi vincerent-

ren-

I nunc [a] per varios, multiplex machina queis eſt
Structa, modos; perquam poſſit vis parva tenere
Ingentem vim, ne ſuperet; quin cedere cogat
Interdum ingenti devictam mobilitate.
Hinc eſt ferrea virga, ſuper qua excurrere poſſe
Efficimus pondus, medioque accedere puncto,
Sive recedere, uti librari corpore poſſit
Cum vario ex alia ſuſpenſo parte, nec ejus
Non pondus nobis ratione oſtendere certa:
Tanto majus erit nam pondus, quo magis ipſum id
A puncto, moles ſuſpenditur unde, recedet:
Proinde ſuper virga numeris monſtrare valemus
Id pondus, quodcumque fuat, majuſque, minuſque,
Inſcriptis numeris a puncto longius ipſo
Et propius; certum indicium tibi ponderis unde eſt.
Vincimus hinc etiam per longum obſtacula vectem
Magna, ſuper nitente manu; quæ innixa recedit
Quo magis a fulcro, quam ſaxa movenda, videbis
Pellier hæc tanto leviori verſa labore.
Hinc [b] nos & cuneis diffindere dura valemus

rentur, quæ velocitates æquales ſunt, & ipſius energia in ipſa machina exurget ex ipſa vi multiplicata per hujuſmodi velocitatem. Ea reſpectiva energia in machinis dicitur momentum, quod quidem eſt, ut vis abſoluta, & initialis ilia velocitas conjunctim. Si vires quotiibuerit ad machinam adhibeantur, & collectis omnium virium momentis hujuſmodi, ſumma omnium, quæ nituntur machinam movere in unam partem, inveniatur æqualis ſummæ in oppoſitam, habebitur æquilibrium. Si aitera ſumma ſit major, illa vincet, & movebitur machina in eam partem. Hæc quidem generalis theoria eſt, ſed Noſter duas tantummodo virgas conſiderat.

a Nominat hic omnia ſimplicium machinarum genera, quarum vires per hoc principium admodum facile definiuntur. Primo loco vectem, ad quem, & ſtatera reducitur. In ſtatera, pondus mobile excurrit per virgam ferream in partes æquales diviſam numeris adſcriptis, quæ libras, vel uncias deſignent. Nam quo magis idem illud pondus removetur a puncto ſuſpenſionis, quod dicunt hypomochilum, eo majus pondus ex adverſa parte in conſtanti quadam diſtantia ſuſpenſum requirit ad æquilibrium. In vecte generaiiter, ſive fulcrum immobile, cui vectis innititur, ſit inter vim & reſiſtentiam, directas ad partes oppoſitas, ſive fulcrum jaceat ultra utramque, agentem directione eadem, quo remotior ab ipſo fulcro ſit vis, eo erit majus ejus momentum, adeoque quo magis removemus manum a fulcro, eo facilius pondus ejus ope elevamus.

b In cuneis augetur momentum, ſi ilii longiores ſint, & tenuiores, nimirum, ſi minor ſit angulus, qui penetret. Nam quo is angulus ſit minor, eo majus erit ſpatium, quo cuneus pro-

Robora; dum penetrant hi multum in viſcera rerum
Ictibus impulſi; tenues panduntur hiatus
A ſeſe paulum dimotis atque revulſis
Partibus. Hinc noſtri compendia magna laboris,
Si longi, craſſique parum: ſed utroque cavati
Si fuerint cunei latere excurrente, quid illis
Non penetres? quid non findas, victumque relaxes?
Propterea leviter raſura novacula crines
Hinc acie fit & inde, rota currente, cavata;
Sic avibus roſtrum, curvoſque rapacibus ungues
Exacuit natura, quibus penetrare queant res.
Hinc quoque [a] per cochleas vi multa obſtacula quæque
Comprimimus; peragit dum magnum dextera gyrum,
Quippe movens circum, ſpira deſcenditur una
Tantum; quoque minus lata hæc, gyruſque moventis
Amplior eſt dextræ, magis hoc compendia creſcunt
Noſtri, majori cum mobilitate, laboris.
Nonne vides [b], fabris cum ſumma in culmina ſæpe
Tollitur immani prægrandis pondere moles?
Clamoſiſque ingens cum ducitur anchora nautis?
Nempe trabem certant mediam convertere, ut axem,
Innixi trabibus procul excurrentibus illa
A trabe prælongis: tum gyro advolvitur omni
Circum ipſam pendens magno cum pondere funis:
Paulatim id trahitur, celeres dum turba moventum

In-

movetur a vi ipſum impellente, quam ſpatium, quo partes laterales, quæ nituntur impedire progreſſum, diſcedunt a ſe invicem. Quoniam autem angulus, quem efficiunt binæ lineæ curvæ, ubi ſe contingunt, eſt in immenſum minor, quam angulus, quem efficit recta cum alia recta, ut conſtat ex ipſis etiam Geometriæ elementis, idcirco ungues, & roſtra incurvata, & multo magis novaculæ utrimque introrſum excavatæ tam facile penetrant.

a In cochlea dum manus ingentem peragit gyrum, axis per unicam ſpiram promovetur. Hinc tantum ejus momentum, ac eo majus, quo ſpira tenuior, & gyrus, quem manus peragit, amplior.

b Subit machina, quam dicunt axem in peritrochio, vulgo *argano*: vectibus oblongis horizontaliter infixis axi verticali axis ipſe convertitur, cui interea dum advolvitur funis ponderi trahendo, vel elevando adnexus, pondus ipſum promovetur in ſingulis converſionibus tantum, quanta eſt circumferentia illius axis, vis autem vectibus illis applicata movetur per totam ingentis circuli circumferentiam. Ejus generis machina eſt etiam illa, quam dicimus *la conocchia*, in qua axis horizontalis bina habet ampliora manubria ſibi perpendicularia, quorum ope pondera elevantur.

Interea glomerat ſua per veſtigia curſus.
Denique non [a] trochleas memorem, queis magna movemus,
Surſumque evehimus non magno pondera niſu?
Multiplici ductu ſupraque infraque volutus
It funis, multaſque immotas trajicit, & ſe
Pondere cum magno moturas ſegniter; ipſi
Dum celeres agitant dextras in fune trahendo
Uſque viri, facilique ſimul, longoque labori
Inſtant; pro numero trochlearum tempora creſcunt,
Decreſcitque labor: tolli vix pondera ſæpe
Percipimus ſenſu; mora prodeſt ſcilicet ipſa.
Mille [b] aliis variata modis quoque machina nobis
Plurima conficitur, denteſque adhibere rotarum
Proderit, ut poſſint augeri mobilitates,
Aut minui; quacumque voles ratione per illas
Ponderibus demes, momentaque viribus addes.
Turbari [c] tamen has aliquid tu percipe vires,
His probe ſervari nec rebus poſſe, ubi funes
Flexibus obſiſtunt, & corpora preſſa viciſſim
Deſuper haud facili poſſunt procurrere pacto.
Hæc ſi namque forent læviſſima, preſſa profecto

 Ob-

a Poſtremo loco commemorat trochleas, quarum ſingulæ vim non augent, ſed plures ſimul conjunctæ ita, ut ex altera parte immotæ ſint, ex altera mobiles, & funis ex una earum quavis tendens ad harum unam, ac viceverſa, per omnes excurrat, donec parti utrilibet affigatur ejus caput alterum, altero manu apprehenſo, quæ machina dicitur *poliſpaſtus*; vim trahentem augent tot partibus, quot ſunt trochleæ ipſæ. Dum enim manus removetur a proxima trochlea, tantum ipſa movetur, quantum funis educitur, & tantundem ſumma funium omnium a trochlea ad trochleam aliam tendentium, & a poſtrema trochlea ad punctum, cui caput funis affixum hæret, contrahitur, adeoque ſingula funium intervalla, quæ tot ſunt, quot trochleæ, ut pater, eo minus contrahuntur, quo major eſt numerus trochlearum, & eo minus trochleæ mobiles ad immotas accedunt, ac idcirco pondus eo minore ſpatio promovetur.

b Mirum, quantum augetur vis per machinas, in quibus dentatæ rotæ velocitatem in immenſum multiplicant. Dentes amplioris circumferentiæ rotæ alterius inſeruntur cylindris adnexis axi rotæ alterius, & dum prior rota unum abſolvit gyrum, poſterior tot gyros abſolvit, quoties plures ſunt ingentis circumferentiæ dentes, quam cylindri illi axis illius tanto tenuioris. Si rotæ dentes ſint 40, illi autem cylindri 8, una rota 8 partibus multiplicat celeritatem, binæ partibus octies octo, ſive 64, tres vicibus octies 64, ſive 504, & ita porro, immani ſanè multiplicatione celeritatis, ac proinde & momenti.

c Quæ de machinis affirmavit, norat, turbari a funium reſiſtentia, & frictione,

Obſtarent nihil ; at quia conſtant omnia ſcabra ,
Multos exiguos colles , queis prominet unum
Corpus , in exiguas valles opus inſinuari eſt ,
Atque opplere cavas , dum nititur , adprimiturque ,
Alterius , ne poſſit , uti per lubrica , ferri .
Aſt , ut poſſit , erit vis adjicienda , per ipſos
Quæ parvos clivos ſuſtollat , at innumerales ,
Vel quæ rumpat , & hinc partim , & quod prominet illinc .
Quare quo partes duræ magis , atque rigentes
Sunt , & majori vis creſcit , quæ premit , auctu ,
Motus difficilis magis hoc erit , inque peditus .
At ſi dura nimis fuerint ea corpora , parteſque
Haud avellantur diſruptæ , parva ſed unum
Procurrens ſaliat tum per declivia corpus .
Duntaxat vi vis obſtans erit aucta premente :
Servatum eſt etenim , facies , queis corpora ſeſe
Contingunt , ſeu ſint amplæ , contrave , prementi
Addere vi nihil in reſtando , atque officiendo :
Servatumque etiam , quibus eſt in frontibus ipſis
Nec nimia aſperitas , nimium neque parva viciſſim
Corporibus , motum ad gignendum vim , prope triplo
Quæ minor , eſſe ſatis , vi corpora juncta premente :
Tu quoque ſervabis , lato ſuper æquore ponens
Marmoreo corpus , cui frons ſit lævis , & unde

Ex-

ne , at indicat utriuſque cauſam . Funium rigor , qui flexioni reſiſtit , non parum obeſt in machinis , ut & ſcabrities ſuperficierum , quæ excurſum ſuperficiei unius ſuper alia impedit . Dum enim alterius prominentiæ in alterius cavitates immittuntur , motus haberi non poteſt , niſi vel confringantur denticuli illi , vel ſuperficies a ſuperficie recedat , quantum ipſi denticuli expoſcunt . Confractio omnium ſimul nunquam accidit, unde fit, ut ſive ſuperficies ſit maior , ſive minor , dummodo eâdem vi contra alteram urgeatur , frictio eadem ſit;ſi autem eadem ſuperficies majori urgeatur vi , major ſit frictio in ratione eâdem vis illius urgentis . Quamobrem receſſus habetur , cui reſiſtit vis , quæ alteram ſuperficiem contra alteram urget . Hinc quo major eſt ſuperficierum ſcabrities , eo majus eſt frictionis impedimentum , cum major ille receſſus requiratur , & quo major eſt vis ſuperficiem alteram urgens contra alteram , eo itidem major eſt frictio . Experimentis deprehenſum eſt in corporibus , quæ ad machinas adhiberi ſolent , ut metallis , & lignis , frictionem æquivalere tertiæ parti vis abſolutæ urgentis ſuperficiem alteram contra alteram . Experimentum ipſum innuit hic Noſter , quod hoc pacto inſtitui poteſt . In plano horizontali collocatur pondus , quod filum horizontale per trochleam trajectum ope ponderis appenſi trahat . Non movebitur, niſi pondus

Excurrat, ſummoque extantem marmore funis
Trajiciat trochleam, & pondus ſuſtentet in auris.
Omni ſi marmor prorſum aſperitate careret,
Quamlibet exiguum ſuſpenſum pondus ad ipſam
Pertraheret corpus trochleam, & percurrere marmor
Cogeret; at nulla eſt non partibus aſpera parvis
Saltem planities; videas proin ſæpe moveri
Id corpus, non poſſe trahens niſi pondus adauctum
Sic ſit, uti partem, quæ eſt tertia, corporis æquet;
Tum ſuper impoſita ſi corpus mole gravetur,
Illi accedere item molis pars tertia debet.
At non imminui pondus, neque creſcere debet,
Ut trahere incipiat, tantum ſi forte minuta
Corporis, aut aucta eſt facies, qua tangitur æquor,
Proin vis, mutata hac, manet haud mutata reſiſtens.
Quamvis [a] læve igitur corpus quodcumque globoſum
Vel paulum declinato non marmore poſſit
Stare; ſed, in ſeſe quia volvitur, ire deorſum
Debeat; at poſſunt, quæ lataque, ſcabraque paulum
Corpora ſunt, tantum niſi flexus marmoris ille
Creverit ad terram, gravitas ut tota retexta
In geminas ſi ſit partes, quarum altera rectà
Inſiſtat clivo, vi dirigat altera eodem,
Scilicet ut partis pars triplex illa ſit hujus.

Non

dus appenſum ſuperet trientem ponderis plano inſiſtentis, quod quidem minima quavis vi moveretur, ſi frictio non obſtaret.

Porro ex eo principio Belidorus in egregio ſuo opere, quod de Architectura Hydraulica edidit, admodum facilem computandarum frictionum methodum tradidit, ubi & funium reſiſtentias computavit. Ea, ut Noſter monet, addenda reſiſtentiæ corporis movendi, ut effectus machinæ rite cognoſci poſſit.

a E ſuperiore theoria deducitur id, quod hic Noſter perſequitur, globum, qui nimirum converſione ſua, omnem frictionis effectum evitare poteſt, ſe provolvere & cadere per quodvis planum utcumque parum inclinatum, at corpora ampliorem habentia ſuperficiem, quæ delabi deberent ſuperficie eadem ſuper illud planum delata, ob ſcabritiem nequaquam deſcendere, niſi planum in eo angulo elevetur, in quo reſoluta gravitate in duas, quarum altera ſit plano perpendicularis, altera ſecundum plani directionem obliquum deſcenſum determinet, illa ſit hujus minus, quam tripla. Tripla eſt, ut in ſupplemento videbimus, in angulo graduum 18 min. 26. Adeoque in majori inclinatione corpus oblique deſcendit, in minori ſtat; quæ quidem eſt alia ratio expeditior frictionis per experimenta determinandæ.

Porro ubi tenacitas accedat, in majori

Non tamen hæc lex ſit tibi firma, immotaque; namque
Diverſa aſperitas reſtantem vim quoque poſſit
Diverſam facere; & ſi partes æquore multum
Emineant, pariter major deſcendere flexus
Non faciet poſitum devexo in marmore corpus;
Multo etiam major, facies hinc, inde tenaci
Si ſit natura, facili hæreat ut ratione.
Alti propterea per dorſum eſt cernere montis
Quoſdam pendentes clivos, quos terra ruendo
Multum inter ſeſe vinclo conjuncta tenaci,
Atque retenta facit: prærupto hinc vertice pendent
Ipſi etiam nimium montes, deorſumque ſoluti
Præcipitare minantur; at ipſos mutua partes
Conjunctæ retinent. Si nexus longa tenaces
Ætas, ſolque ſuo disjungens igne reſolvat,
Undave, vel fulmen, declivi plurima tergo
Corpora volvuntur; tum demum in fine, ubi flexus
Eſt minor, accumulant ſeſe, clivoſque priores
Se ſternunt ſuper, & ſtratis hos pluribus augent.
 At funes [a] etiam jam diximus eſſe morantes
Vim, qua convertit pendentes machina moles:
Propterea tamen eſſet opus, ſi noſcere certas
Inde moras cupias, perquirere, quæque ibi fila,
Quotque, quibuſque modis intorta, & viribus extent.
Hæc certa verum ratione quis æſtimet? uſus
Uſus erit rerum, & longa experientia, quæ, quod
Non poſſit ratio contingere, ſemper agendo
Efficiat; neſcit rerum commenta, neque audit;
Sed tantum ad varias exemplis ducitur artes.
 Nonne [b] ope diverſa, variiſque a partibus unum

Quem-

jori etiam inclinatione ſtant corpora. Hinc rupes, & montium latera etiam in poſitione fere verticali ſtant. Ubi ſolis, & aeris actione continua cohæſio paulatim diſſolvitur, decidunt rupes ipſæ, & montium quædam veluti fragmina, ex quibus ad eorum radices clivi efformantur multo minus inclinati, & ad horizontalem poſitionem accedentes magis.

a Funium reſiſtentia multo eſt complicatior, & multo magis pendet a varia ipſarum funium flexilitate. Ejus theoriæ difficultatem tantummodo innuit Noſter, atque eam experiundo multo accuratius definiri poſſe affirmat, quam ex certis quibuſdam principiis conſectaria deducendo.

b His, quæ ad æquilibrium, & machinas pertinebant, expoſitis ex occaſione agendi de gravitate, jam ad præcipuas proprietates centri gravitatis progreditur.

Quemque opifex urgere ſolet Natura laborem?
Quæ velut inſtrumenta ſuæ perſæpe retentat
Multa artis, dum quid faciat conſiſtere ſimplex;
Sic in naturæ clarandis rebus oportet
Nos etiam, verſamus opus dum quodlibet unum,
Multiplices tentare modos, variiſque ſubire
Partibus, & mutare, & ſæpe ad nota redire
Inſtrumenta, quibus conſiſtat ſumma operai.
Quapropter quoniam gravitatem ad percipiendam
Multa diu nobis tractata, volutaque multa,
Perque polita diu; pariter gravitatis ad illud
Uſus erit punctum medium, quo plurima fiunt,
Plurima per quod agit vario natura labore,
Nunc iterum, quoniam res detulit ipſa, reverti.
Jam [a] ſupera a dictis punctum gravitatis id eſſe
Deduces quovis in corpore, per quod agatur
Si quaſcumque velis mundi protenſa ſub oras
Planities, partes hæc ſcindere debeat illud
In geminas, parte ex una ut ſpatia omnia, diſtant
Puncta a planitie queis ſingula, ſint ſimul æqua
Omnibus ex alia ſpatiis ſic parte petitis.
Nam punctum cum par gravitas diverberet omne,
Momenta a ſpatiis ſimul omnibus omnia pendent.
Proin ſi ſuſpendas puncto gravitatis ab illo
Converſum, quacumque velis ratione, ſituque,
Corpus, momentis ſemper librabitur æquis;

Sem-

[a] Primo quidem proponit theorema hujuſmodi. Si planum quoddam ducarur per centrum gravitatis cujuſcumque maſſæ, & e ſingulis punctis ipſius maſſæ ducantur rectæ ipſi perpendiculares, ſumma omnium ejuſmodi rectarum poſitarum ex parte altera, æquatur ſummæ poſitarum ex parte oppoſita. Id quidem affirmat, deduci ex eo, quod ſingulorum punctorum momenta, quibus nituntur ad movendam maſſam circa aliquem axem, ſint, ut diſtantiæ ab ipſo axe, quod quidem verum eſt, ubi omnia ſint in eadem recta, vel in eodem plano. At ubi in diverſis planis ſint, reductione quadam eſt opus. Nimirum momenta ſingulorum punctorum, jacentium ubicumque in eadem verticali linea, ſunt eadem. Hinc facile colligitur ipſa reſpondere diſtantiæ punctorum a plano verticali tranſeunte per axem ſuſpenſionis. Hujus reductionis veritatem demonſtrabimus in ſupplemento. Ea autem poſita, patet, ſummam momentorum punctorum omnium fore æqualem ſummæ diſtantiarum a plano illo verticali. Quare ſi ducto quovis plano per centrum gravitatis, maſſa ita convertatur, ut id planum verticale ſit, & in eo jaceat axis, cum debeat haberi æquilibrium tum quoque; ſumma omnium diſtantiarum ex parte altera debebit æquari ſummæ ex oppoſita.

Semper enim ſpatia hinc illinc determinat æqua
Planities quæcumque, per id quæ tranſit, & altum
Educta in cælum per noſtri verticis oras.
Nunc [a] qui per numeros, menſuraſque omnia norunt,
Hoc genus, ut medium punctum gravitatis in omni
Hærens materia veſtigent; munus id ejus,
Quam docui, de natura deducere poſſunt;
Nempe, extra corpus ſi quævifcumque locetur
Planities, fore, ad hanc ſimul omnia ducta manentem
Omnibus a punctis ſpatia, illi æqualia ſummæ,
Quæ fieret, totidem ſpatiorum, ſi ſimul ipſum
In punctum medium gravitatis puncta coirent
Omnia, & hac una ſimul in regione manerent;
Nam tranſlata illuc, quantum deperdere parte
Ex una ſpatii deberent illius, uſque
Deberent alia tantundem acquirere parte:
Nempe ibi vim gravitas educit, & exerit omnem.
Sic [b] ſi plura etiam ſint corpora, quæ referantur
Mutuà, cunctorum rectè confingere poſſis

Com-

[a] Huic theorematì pro inveſtigatione centri gravitatis hoc aliud ſubſtituit, quod ex eo facile deducitur. Si ſumatur quodvis planum ultra omnem maſſam, ſumma omnium diſtantiarum omnium punctorum ab ipſo plano erit eadem, quæ eſſet, ſi omnia ſimul jacerent in ipſo centro gravitatis. Facile deducitur e ſuperiore, quia dum omnia adducuntur ad illud centrum, alia recedunt ab eo novo plano, alia accedunt, quantum diſtabant a plano ipſi parallelo per centrum ducto, adeoque acceſſus omnes a receſſibus compenſantur. Inde autem eruitur, & illud, ſummam illarum diſtantiarum diviſam per numerum punctorum exhibere diſtantiam centri gravitatis ab eodem plano poſito ultra eam omnem maſſam.

Quo autem pacto inde poſſit datæ maſſæ inveniri centrum gravitatis, dicam in ſupplemento, ut & alia quædam ſcitu digna huc pertinentia exponam. Interea hic illud innuam, ex hac potiſſimum proprietate centri gravitatis fieri, ut omnis maſſæ gravitas concipiatur collecta in ipſo gravitatis centro, in quo nimirum ſi collecta eſſet, eodem modo ageret in quavis machina, in qua ejus momentum pendeat a diſtantiis punctorum omnium a plano verticali per punctum ſuſpenſionis, vel communem axem ducto.

[b] Hæc theoria valet non ſolum pro eodem corpore, ſed etiam pro corporibus omnibus quibuſcumque, in quibus commune quoddam gravitatis centrum habetur, in quo nimirum æquilibrium haberetur, ſi ea connecterentur virgis inflexilibus, gravitate, & inertia carentibus. Ego autem in diſſertatione de centro gravitatis demonſtravi, in quavis maſſa eſſe aliquod centrum gravitatis, idque unicum, licet non ſemper habeatur magnitudinis centrum, quod quidem a Mechanicis omitti ſolet, licet ſit admodum neceſſarium.

Commune eſſe aliquod, quo puncta coire videntur
Punctum, in quo recipi gravitatis tota queat vis,
Quo ſuſpenſa (leve ut filum, atque inflexile nectat)
Undique momentis æqualibus omnia conſtent.
Quare [a] ſi duo ſint ea tantum corpora, punctum
Id, commune quod eſt, punctum inter utrumque jacebit
Amborum medium gravitatis, eo ut magis uni
Accedat puncto, quo majus corpus ibidem eſt;
At quo materies minor eſt, plus diſtet ab illo.
Sed tria deinde tibi referantur corpora ſi ſe
Inter, jam quid ages? punctum commune duorum
Scilicet invenies, ibique illa coire putabis,
Unum ut de geminis, duo fingas de tribus eſſe.
Sic quoque ſi fuerint quantumvis plurima, primò
Si bina inter ſe tentes, poſt bina referre
Cum binis, & poſt cum ternis terna; per omnia
Atque ita ſi pergas, quotquot ſunt, corpora, eorum
Commune attinges gravitatis denique punctum.
Quædam [b] rebus ab his utens ratione ſagaci
Agnoſces, iſto varius qua defluat humor

[a] Communem hìc refert methodum inveniendi gravitatis centrum in pluribus corporibus, quæ ex noſtra generali ſuperiore facile deducitur. Si binæ ſint maſſæ quæcumque, centrum commune gravitatis erit in recta jungente bina ipſarum centra gravitatis; in medio, ſi fuerint æquales; ſi vero inæquales, ita propius majoris maſſæ centro, ut diſtantiæ ſint ipſis maſſis reciprocè proportionales. Si corpora ſint tria, conjuncto centro gravitatis communi binorum cum centro tertii, & diviſa ea recta in ratione pariter reciproca maſſæ minoris ad ſummam maſſarum, punctum inventum eo pacto erit centrum illud quæſitum commune. Eo pacto progredi licet ad maſſas quotcumque. Quin imo, ſi quicumque corporum numerus ſit, & inveniatur centrum gravitatis binorum, vel ternorum, vel cujuſcumque numeri alibi etiam utcumque majoris, alibi minoris, & illa aggregata habeantur pro unicis, ut ope centrorum gravitatis eorundem inveniatur demum centrum gravitatis commune omnium ſimul, rite proceditur, & ad verum centri gravitatis locum devenitur, cumque ſemper unicum, licet tam diverſis viis, diverſo nimirum ordine ipſum investigetur. Ea omnia facile deducuntur ex generali theoremate ſupra expoſito, & ex eo, quod diſtantia a quovis plano ultra omnem maſſam poſito ſit eadem, quæ eſſet, ſi omnia puncta in centro gravitatis collecta eſſent, ut videbimus in ſupplemento.

[b] Jam delabitur ad bina theoremata elegantiſſima, & utiliſſima a Newtono inventa, & propoſita corollario 4 poſt leges motus, quorum ſecundum non ſatis accuratè, vel non ſatis dilucidè ab ipſo Newtono demonſtratum fuiſſe arbitror. Meam hìc demonſtrationem ſimpliciſſimam ſane, & ita perſpi-

Si de fonte velut, rivoſque inquirere tentes
Deductos; primum ſi corporis omnia puncta
Unius, inter ſe vel corpora projiciantur
Plurima, uti ſola tum vi moveatur inerti
Quodlibet, & quacumque fuga in quamcumque feratur
Forte plagam, variam quantumvis, diſſimilemque,
Nimirum medium punctum gravitatis eorum
Commune, immotumve ſua ſtatione teneri,
Æqualive fuga ſemper, rectaque meare;
Nam cum quodque ſua raptetur mobilitate
Æquali punctum, ſpatia æquo æqualia curret
Tempore planitiem accedens ad quamlibet unam,
Diſcedenſve ab ea, quo ſit ſita cumque locorum.
Quare ſumma etiam ſpatiorum tota, neceſſe eſt,
Æque temporibus ſit ut aucta, minutave in æquis:
Proin itidem ſpatium puncto gravitatis ab illo
Ductum ad planitiem pariter vel creſcet in æquis
Temporibus, vel decreſcet: ſed tempore bino
Par ſibi ſi conſtet, par ſemper, idemque manebit.
Quod fieri nequeat, ſi non æqualiter uſque
Rectum tranet iter, vel, ut ante, immobile perſtet

Pun-

ſpicuam, ut verſibus quoque tradi poſſit, utut etiam accuratiſſimam, ac generaliſſimam exponit.

Primum theorema eſt hujuſmodi. Si puncta quævis cujuſvis maſſæ moveantur directionibus, & velocitatibus quibuſcumque ſola vi inertiæ, nimirum ſingula motu æquabili, commune omnium gravitatis centrum, vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum.

Demonſtratio eſt hujuſmodi. Concipiatur ultra totam maſſam planum quodcumque. Punctum quodvis binis æqualibus temporibus æque progrediens æquè accedet ad illud planum, vel ab eo recedet. Quare & ſumma omnium acceſſuum, & ſumma omnium receſſuum omnium punctorum erit eadem, ac proinde ſumma diſtantiarum punctorum omnium ab eo plano æque creſcet, vel æque decreſcet iis binis temporibus; nam incrementum, vel decrementum ſummæ diſtantiarum eſt ſumma receſſuum dempta ſumma acceſſuum, vel viceverſa. Igitur & diſtantia centri gravitatis ab eodem plano, quæ per numerum punctorum multiplicata æquatur illi ſummæ, ſi non manet eadem, æque creſcet, vel decreſcet illis temporibus. Concipiatur jam planum quodpiam per bina puncta, in quibus centrum gravitatis eſt in initio, & fine primi temporis. In fine tertii debebit eſſe in eodem plano. Nam aliter ad planum huic parallelum poſitum ultra omnem maſſam nihil acceſſiſſet primo tempore, acceſſiſſet autem ſecundo. Debebunt igitur illa tria puncta jacere in directum. Si enim aſſumatur per priora duo aliud planum, eodem argumento erit tertium punctum in hoc eodem plano,

adeo-

Punctum, quo finxi gravia omnia puncta recepta.
Nam quibus in gemino reperitur tempore, bina
Per loca planitiem ſi ducas quamlibet, illud
Ex hac non poterit partem deflectere in ullam:
Quandoquidem hoc gemino quoque tempore diſtet, oportet,
Æque alia tum a planitie, quam fingimus extra
Eductam haud aliter, quam prima eſt; ſcilicet iſdem
Diſtantes ſpatiis ſeſe inter ut undique conſtent.
Si modo planities eadem loca bina per illa
Altera ducatur, primam ſecet ipſa, neceſſe eſt,
Quoque ſecat, rectus communis trames utrique eſt.
Et quoniam debet punctum per utramque meare
Illud planitiem, hoc communi tramite ſemper
Pergat, non alio, directo proinde, neceſſe eſt.
Aſt etiam æquali motu properabit, eo quod
Si quoque concipias aliam, quæ recta ſit illi,
Planitiem quamcumque viæ, debebit id ipſi
Sive propinquare æquali, aut diſcedere lapſu
Æquis temporibus, proin uſque æqualiter ire.
Præterea [a] quotvis ſi puncta aut corpora cumque
Inter ſeſe & agant, & agantur mutua, vires

adeoque erit in interſectione hujus plani cum priore, quæ interſectio debet eſſe recta linea. Quod cum generaliter verum eſſe debeat de quibuſcumque binis temporibus æqualibus, ſi tempora ipſa, & punctorum intervalla concipiamus decreſcere in infinitum, habebimus totum motum in eadem recta linea factum.

Quod autem uniformis eſſe debeat is motus, ſi aliquis eſt, patet ex eo, quod, ſi concipiamus planum huic rectæ perpendiculare ultra omnem maſſam, ad eam partem, ad quam movetur ipſum centrum in ea recta, debeat quibuſcumque binis temporibus æqualibus æqualiter accedere ad illud planum, adeoque æqualiter in eadem progredi recta linea. Quamobrem vel illud centrum commune gravitatis ſtat, vel progreditur uniformiter in directum.

[a] Secundum theorema, quod hic proponit, eſt hujuſmodi. Si puncta quævis cujuſvis maſſæ in ſe invicem agant viribus quibuſcumque, poſita lege actionis, & reactionis æqualium inter bina quævis puncta, qua lege vires illæ tendant ad motus æquales, & contrarios, centrum commune gravitatis nihil turbabitur ab hiſce viribus, ſed manebit immotum.

Sic demonſtratur. Concipiantur tot tempuſcula, quot ſunt punctorum paria, & ſi vires mutuæ inter bina quævis, uno quovis ex illis tempuſculis, illa puncta moverent directione, & quantitate motus ſibi debita, eo tempuſculo centrum gravitatis non moveretur. Nam a quovis plano ultra omnem maſſam poſito alterum ex illis punctis deberet recedere, quantum alterum ad ipſum accedere deberet, adeoque ſumma omnium

Digitized by Google

Quantumvis variæ fuerint, legeſque movendi
(Semper ut exiſtant motus tamen æqualeſque,
Oppoſitique), nihil mutandum his motibus eſſe
Cognoſces illud punctum gravitatis; eadem
Aſt, ut nuper erat, prorſus ratione manere.
Namque ubi ſunt motus æquales, oppoſitique,
Non ſpatia a punctis ſimul omnibus omnia ducta
Planitiem ad quamcumque queant mutarier; ergo
Illius & puncti ſpatia haud mutata manebunt.
Nam ſi animo fingas, de punctis omnibus illis,
Quæ ſunt, materiæ, duo ſeſe puncta viciſſim
Sola laceſſere; erit, quantum unum accedat ut ipſam
Tunc ad planitiem, tantum ſimul alterum abire
Debeat: idcirco ſi ſuccedentia ſumas
Tempora tot, genus hoc, nimirum ſunt quot ibidem
Punctorum paria, ut producat tempore vires
Quodque ſuo, nequeat ſpatiorum ex omnibus illam
Summa ad planitiem minui, neque creſcere punctis.
Nunc quoniam vires uno ſeſe inter agentes
Tempore ſe promunt omnes, ut ab omnibus iſtis
Compoſitus fiat motus; quodcumque, neceſſe eſt,
Illic ſit punctum finito hoc tempore, ubi eſſet
Denique idem, vires ſi ſuccedentia tantum
Scilicet egiſſent per tempora; proinde nec iſtis
Mutari junctis ſpatiorum ſumma valebit.
Denique * vel curvo quocumque, vel impare motu
Sci-

nium diſtantiarum, & diſtantia centri gravitatis maneret eadem, quæ profecto manere non poteſt, ſi aliquis habeatur centri gravitatis motus, reſpectu plani jacentis ad eam plagam, in qua ipſum centrum moveatur. Quare in fine omnium tempuſculorum eſſet, ubi erat initio primi. Porro in hac hypotheſi in fine omnium ejuſmodi tempuſculorum quodvis punctum eſſet, poſt actionem ſucceſſivam omnium virium ſuam directionem, & magnitudinem ſervantium, in eodem loci puncto, in quo in fine unici tempuſculi eſſe debet actione vis compoſitæ ex omnibus illis viribus, adeoque & centrum gravitatis in ea hypotheſi eſſet poſt actiones ſucceſſivas tot tempuſculorum in eodem loci puncto, in quo debet eſſe in fine unici tempuſculi poſt actionem vis compoſitæ ex omnibus. Igitur & in fine unici illius tempuſculi centrum gravitatis erit in eodem puncto loci, in quo erit initio ejuſdem, ac proinde ex actionibus illis mutuis omnibus nihil mutatur ejus ſtatus.

* Ex iis binis theorematis conſequitur hoc tertium, quod utrumque complectitur. Utcumque moveantur partes cujuſvis corporis, vel corporum quotlibuerit, motibus vel rectilineis, vel curvilineis, ſi ſolas vires mutuas inter ſe ha-

Scilicet illa tibi, quæ diximus ante, ferantur
Puncta, aut corpora, uti tamen ille ſit ortus inerti
Sola a vi ſolis itidem cum viribus illis
Internis, quibus inter agunt ſe corpora, juncta;
Id punctum commune ſuum tum ſive quietis,
Seu motus ſervare ſtatum, neque flectier inde
Debet; nam internis ſine viribus ante probatum eſt
Sic ſervare ſtatum, vim ſolam propter inertem,
Punctum illud medium debere; ſed addita nil vis
Mutuà perturbat, neque mutat. Proinde neceſſe eſt
Non minus uno ipſum ſemper perſtare tenore.
Quod [a] ſupereſt, cum viderimus, gravitate quid ortum
Sit per materiam diffuſa æqualiter omnem,
Cum ſita nempe locis propellit, & urget in iſdem,
Propereaque plagas in eaſdem corpora vertit;
Nunc locus eſt nota procul a regione vagari,
Externaſque etiam peragrando viſere terras,
Quæque alibi gravitas noſtræ collata, tueri,
Quodque in diverſis terrarum partibus orbis
Diſcrimen gravium rerum ſit. Tu mihi mentem
Da vacuam curis, verique cupidine captam,
Gaudebit quoniam perceptis excita rebus.
Principio [b] gravitas disjunctis inſita terris

Non

ſe habuerint, nec ullam externam patiantur vim, commune gravitatis centrum vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum. Facile demonſtratur componendo actiones illas mutuas cum actione vis inertiæ, ut mutuæ actiones inter ſe ſunt compoſitæ in ſecundo theoremate. Cum enim inertia ſola relinquat ſtatū eundem quietis, vel motus uniformis, & rectilinei centri ipſius, & actiones mutuæ ipſum nihil turbent, conjunctis etiam iis nihil ipſe ſtatus turbabitur.

Mirum autem, quam hujuſmodi theorema per univerſam Phyſicam late pateat. Plures ejus uſus expoſui in ipſa diſſertatione ſuperius memorata, illum in primis, quod inde pateat, ſæpe motus vehementiſſimos quoſdam, ut ubi radii ſpeculo uſtorio colliguntur, & urunt, ab internis oriri viribus, non ab externo illo impulſu, qui effectu perquam exiguo occaſionem ſolam iis viribus tribuit agendi. Nam centrum commune gravitatis maſſæ agitatæ iis motibus non progreditur ſecundum directionem luminis allapſi, ſed in eodem præcedente ſtatu perſeverat. Sed de iis fuſius infra in libris ſequentibus non ſemel.

a Huc uſque conſideravit gravitatis vim in eodem Terræ loco, ubi ea agit per lineas ad ſenſum parallelas, & conſtanti, ac æquabili niſu. Gradum jam facit ad comparandas inter ſe gravitates, quæ habentur in locis Terræ a ſe remotioribus, in quibus & directio diverſa eſt, & niſus ipſe, ut jam videbimus.

b Primo quidem, quod pertinet ad directionem, oſtendit gravitatem in lo-

ci

Non æque inter ſe diſtantes corpora deſert
Per tractus, quoque hìc, non ictus dirigit illic,
Reſpectes vaſti ſi circum mœnia mundi.
Quod nunc ut facili poſſis cognoſcere pacto;
Ad ſola telluris, ſi ſint æquata, natantes
Æquoris ut campi, gravitatem percipe deorſum
Corpora directo deferre cadentia lapſu:
Conſtratum nam ſi æquor aquarum obliqua ferirent
Pondera, quà flexus brevis eſt, decurreret unda
Protinus ad partes alias, queis latior idem eſt,
Æquius idcirco eſt, quam tellus, marmor aquarum;
Fiat inæqualis cum paulum montibus illa,
Vallibus atque cavis; hìc ſurgit, ſidit at illic.
At ſi de terra montes evellier alti
Poſſent, aut omnem tegerent maria undique terram,
Æquor continuum foret, & nil ſurgeret uſquam.
Jam ſimul undarum facies, terræque profecto
Non eſt plana, ſed, ut globus ingens, ut pila magna,
In ſeſe redit ipſa, & ab omni parte rotunda eſt:
Quam notam tibi rem, facilemque oſtendere longis
Non opus eſt dictis; quæ ſat ſint, percipe paucis.
Primos aſpiciunt montes, & culmina tantum,
Qui procul adveniunt terras ex æquore nautæ,
Dum tegit ima tumor mediarum littora aquarum:

In

cis ſatis a ſe diſtantibus non tendere per rectas parallelas, ſed directionem mutare. Argumentum eſt hujuſmodi. Terræ ſuperficies non eſt plana, ſed curva in formam globi, ubi figuram Telluris intelligit, quæ haberetur abraſis montibus, ac vallibus oppletis, ut ſi tota Oceano quodam continuo tegeretur. Porro huic ſuperficiei perpendicularis eſt ubique gravium directio, & rectæ perpendiculares ſuperficiei curvæ non ſunt inter ſe parallelæ; quin imo in globo tendunt ad idem centrum commune.

Primum illud, quod Terræ forma curva ſit, & globoſa, conatur evincere argumentis iis, quæ circumferri ſolent, quæ quidem ego collegi in diſſertatione de Veterum argumentis pro Telluris ſphæricitate, ubi in ſingula diligentius inquirens, illud oſtendi, habuiſſe quidem Veteres multa, quibus curvaturam ſuperficiei terreſtris evincerent, nihil, quo ſatis accuráte ſphæricam ipſi formam adſcriberent. Petuntur autem ex eo, quod navigantibus prius appareant ſummi montes, utue remotiores, quam littora propiora, ſub marium curvatura deliteſcentia; quod venientibus a Borea in Auſtrum Polus, & Boreales ſtellæ perpetuo eleventur magis, ab occaſu in ortum euntibus ſub eodem parallelo citius oriantur aſtra, & occidant; quod univerſum Orbem circumnavigare jam liceat; quod in Lunæ defectibus umbra Terræ, in quam ea

tum

In caput alta ſuum paulatim ſidera cernit
Surgere fixa polo, media a regione diei
Qui terræ ad gelidas venit oras; quique viciſſim
Hinc remeat, ſeſe illa humili demittere cælo:
Quique ortus, obituſve petunt, orientia mundi
Ocyus aſtra vident, aut ſerius; ipſaque ſæpe
Sic peragrata fuit, quam magna eſt, vaſtaque, tellus,
Oppoſitoque viæ mirantes tramite, non quo
Deceſſere viri, ad patrios rediere penates.
Luna magis tamen hanc, cum deficit, indicat eſſe
Terrai ſpeciem; quoniam, qua carpitur, umbram
Flectentem curvos ſe cernimus orbis in arcus
Omni a parte; an eam tellus non projicit umbram?
Eſt igitur tellus omni de parte rotunda.
Quapropter gravitas dum curvam pondere terram
Deſuper elapſo rectà ferit; ipſa profecto
Omnibus uſque locis non ſeſe dirigit æque,
Æque nec gravium rerum via diſtat ubique.
Quandoquidem prorſus ſi tellus noſtra globoſa eſt,
Recta via ad terram quævis ſignata cadendo,
Eſt opus, ad medium contendat ut undique punctum,
Axe velut coeunt radii; proin dirigit illuc
Undique ſe gravitas, atque illuc corpora pellit,
Fiet [a] ab hoc contra, gravitas ſi pondera terræ

In

tum incurrit, ſemper curvaturam præſeferat, & quidem circularis ad ſenſum formæ. Sed de hiſce argumentis notabimus nonnulla in ſupplemento.

Secundum autem, quod nimirum gravitas dirigatur perpendiculariter ad regularem Telluris ſuperficiem, probat ex eo, quod ſi ſuperficies non eſſet perpendicularis directioni gravitatis, maria defluerent ex ea parte, in qua angulus ejus directionis infra ſuperficiem eſſet obtuſus, in eam, in qua eſſet acutus, ut in plano inclinato. Idem autem & quotidiana lapidum cadentium, & gravium fune pendulorum experientia confirmat. Nam videmus, viam lapidis, vel funis ductum eſſe ubique ſuperficiei aquæ ſtagnantis perpendicularem.

In globo autem omnes rectas ſuperficiei perpendiculares dirigi ad centrum globi, ut in circulo ad centrum circuli rectas peripheriæ perpendiculares, a Geometris eſt demonſtratum, & facile cuique patet, ex ipſa ſola globi undecumque ſibi ſimilis conſideratione.

a Inverſum hic indicat theorema, ſi nimirum gravitas dirigatur ſemper ad idem punctum, ſuperficiem Terræ debere eſſe ſphæricam accuratè. Id ipſum Geometris eſt notum, figuram nimirum ſolidam, in qua omnes rectæ ſuperficiei perpendiculares ad idem punctum dirigantur, eſſe ſphæricam, & illud punctum habere pro centro.

Addit autem, ſi figura Terræ diſcrepet nonnihil a ſphæra, directionem

gra-

In medium pellit punctum, & ſe dirigit illuc,
Prorſus ut ex omni tellus ſit parte rotunda.
At ſi jam tellus vero quid diſtet ab orbe,
Non gravitas punctum terrai tendet in unum:
Hæc eſt nimirum connexaque conque ligata
Inter ſe certa ratione, atque ordine certo
Utraque res, ut per numeros, quibus abdita rerum
Quærimus, ex una reperirier altera poſſit;
Quod mihi poſterius, cum res feret ipſa, docendum eſt.
Ut [a], non eſſe viis æque diſtantibus inter
Seſe directam gravitatem per loca terræ
Omnia, jam clara & facili ratione repertum eſt;
Sic facile haud reperire fuit, num par ſit ubique
Vis gravitatis, ut hìc tantundem pendat in omni
Europa, oppoſito quantum quoque pendit in orbe
Corpus idem. Te nil Americæ ferre ſub oras
Proderit id corpus, noſtræque examina lancis,
Et pondus, quicum libratur; namque neceſſe eſt,
Corpore ſi gravitas alibi mutetur in illo,
Haud alio pariter mutari in pondere pacto,
Pondera ut inter ſe hìc æque referantur, & illic,
Quodque erat id pondo, jam non niſi conſtet ubique
Pondo; non eadem gravitas licet extet ubique.

Si

gravitatis non dirigi ad idem punctum; ſi vero gravitas non dirigatur ad idem punctum, ſiguram a ſphæra abludere, atque iſta duo ita inter ſe connexa eſſe, ut Geometriæ, & Calculi ope, data ſigura, inveniri poſſit lex, quam directio gravitatis ſervat, & data lege directionis ipſius, inveniri poſſit ſigura: ſed de iis agendum ſibi eſſe infra, ubi nimirum in libro 5. pluribus ager de ſigura Telluris, ubi etiam ego ea omnia fuſius pertractabo in ſupplemento.

a Jam ad inæqualitatem gravitatis in diverſis Terræ locis facit gradum: & primo quidem oſtendit, multo difficilius fuiſſe hanc inæqualitatem deprehendere, quam illud directionis diſcrimen. Nihil prodeſt pondus hìc primum, tum in America per bilances experiri. Nam menſura ponderis hinc illuc translata mutabitur æque, ac ipſum illud corpus, & relatio manebit eadem, ut quod hìc inventum eſt libræ unius, debeat & ibi unius libræ pondus inveniri.

Si poſſemus & perfecte noſſe, & memoria retinere vim, quam nos exerimus hìc in ſuſtinendo pondere, & ubi ipſum in remotam regionem transferimus, ejus meminiſſe; liceret ex ea vi æſtimare auctam, vel imminutam gravitatis vim. At noſtri conatus nobis ipſis ignotiſſimi ſunt, & vix craſſiorem quandam comparationem ope noſtrorum ſenſuum inſtituimus: ſubtiliora diſcrimina nequaquam percipimus.

Si nos, cum dextra retinemus corpora, vires
Metiri noſtras penitus poſſemus, & harum
Poſt, ubi opus fuerit, reminiſci mente tenaci;
Has noſtras alibi referendo denique vires
Scire liceret, idem ſit eodem an corpore pondus
Omnibus in terris, ire in quaſcumque liberet.
Sed præter quam quod momenta per omnia noſtræ
Mutantur vires (ipſas dubiteſne per horas,
Perque dies?), nihil eſt occultius, atque tenebris
Quod mage ſe condat, quam noſmet, noſtraque nobis.
Senſus confuſa nimium ratione per ipſos
Omnia percipimus; tactus tamen omnibus ipſe eſt
Ambiguus magis, ut nequeas diſcrimina rerum
Parvula metiri, & conatus noſcere veros,
Quos tunc exerimus, cum pondera forte tenemus.
Demum ᵃ in tam duris Fors adſuit optima rebus,
Oſtenditque viam certam, qua pondera detur
Conferre inter ſe vario ſub ſidere nobis;
Quod tibi nunc prima repetens ab origine pandam.
Auſpiciis Regis patrio vir littore Gallus
Solverat, & poſitas procul impiger ibat in oras,
Queis ſuper impendet rectus Sol; inde tueri
Certius ut poſſet vaga ſidera, cum ſuper altum
Vertuntur caput, & lucis dimmiſſa per auras
Spicula ſunt motu ſuper advenientia recto.

 Jam-

mus. Accedit quod ipſæ noſtræ vires mutantur in horas.

Poſſet quidem cum alia aliqua vi comparari gravitas, ut cum vi elaſtica, vel centrifuga, quod innui in mea diſſertatione de inæqualitate gravitatis in diverſis Terræ locis. Sed ipſa vis elaſtica eſt variabilis plurimum, & comparatio cum vi centrifuga multo difficilius inſtituitur. Nullus tamen dubito, quin ejuſmodi comparatio inſtitui poſſit cum ſucceſſu.

ᵃ Reliquis omiſſis, ad methodum hac in re jam paſſim uſitatam progreditur. Eam autem caſus obtulit. Richerus Regis Chriſtianiſſimi juſſu anno 1672. navigaverat in Cayennam inſulam ſub zona torrida ſitam, ut ibidem Planetarum ad ſummum Cæli verticem accedentium definiret motum accuratius, ac horologium oſcillatorium ſecum detulerat, quod in Pariſienſi urbe ſingulis minutis ſecundis ſingulas oſcillationes abſolvebat. Eo delatus vidit horologium lentius moveri, & diſcrimen fuit minutorum primorum 2, ſecundorum 28 in ſingulos dies, nimirum oſcillationum 148. Noſter idcirco poſuit prope 150, & prope minuta 2 cum dimidio, ut rotundos numeros facilius exprimeret, minuta autem ipſa prima appellavit ſexageſimas horæ partes, ſecunda vero ſexageſimarum ſexageſimas. Quamobrem contrahendum fuit pendulum

Jamque tuum victor littus Cayenna tenebat
Inſula Sole calens; jam vertice ſidera in alto
Cœperat, & poſitus cæli ſervare recentis;
In motus virgam ſenſit cum ſerius illam
Ire ſuos, ſignans nobis quam tempora præfert
Machina ſtructa rotis, quamque ipſe aptaverat ante
Sic patrio longam cælo, ut procurrere ſeno
Procurſu decies huc illuc qualibet horæ
Deberet decies in ſexta concita parte;
Eſſe moras virgæ majores ſcilicet illic
Senſit, tamque magis longos conſtare rotarum
Circuitus, ad quamque diem de partibus horæ
Ut decies ſenis geminas prope, dimidiamque
Addi perciperet; fieri quo tempore nempe
Procurſus centum, & decies prope quinque neceſſe eſt.
Poin, virgæ pondus tum paulum ſuſtulit, atque
Contraxit virgam, ut, quantum eſt opus, ocyor iret.
Hac novitate animum perculſus, protinus ipſam
Eſſe ibi conjecit gravitatem ſorte minorem,
Urgerique minori ideo vi corpora deorſum.
Quod tamen ut poſſet deprendere certius, idem
Huc animum adjecit, quam longum, ut quæreret, eſſet
Filum ibi, tempore uti fieret procurſus in illo,
Quod partis decies ſextæ foret unius horæ
Pars decies quoque ſexta. Gravi ergo pondere filum
Tenſum, vibratumque oculis vigilantibus uſque
Servabat numerans procurſus, ſideris alti
Nempe a diſceſſu medii de culmine cæli
Ad reditum (tempus quo non æqualius ullum eſt).
Sæpe dies ſolidos, pernox quoque, perſtitit urgens
Hoc opus, & repetens, iterumque iterumque retentans.

Quæ

lum, ut citius oſcillationes perficerentur, & accuratam temporis menſuram exhiberent.

Cum inde collegiſſet gravitatis vim minorem ibi eſſe, quam Pariſiis, ne res a tota Horologii mole penderet, dil'g ntiſſime inquiſivit in longitudinem penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis, quam accuratiſſime definivit exigendo tempus ipſum ad appulſum ſtellarum fixaıum ad immotum teleſcopium, ac notando intervalla inter binos appulſus, cum diurnus Fixarum motus Cæleſtium omnium motuum ſit maximè uniformis, ac diligenter eam menſuram plurimis obſervationibus confirmatam ære incidit, & ſecum Pariſios detulit, ubi obſervationibus iterum inſtitutis diligentiſſime, invenit penduli ad ſingula ſecunda horaria oſcillantis longitudinem aliquanto majorem.

Quæ tandem deprenſa fuit certiſſima, fili
Protinus ære ſuper menſuram incidit, ut eſſet,
Quam patrias remeans ſecum deferret ad oras.
Nec minus id patriis tum demum redditus oris
Pervigili longùm cura tentabat adurgens,
Et repetebat opus: productius uſque repertum eſt
At filum, in[illegible]o quam quod ſuper ære notarat:
Conſtabant decima digiti diſcrimina parte.
Ille [a] hæc vulgavit fundens ignota per orbem
Protinus, & primo commiſit pectora bello;
Unde tamen porro coituræ in fœdera gentes
Pacatis animis, verumque tuentibus eſſent.
Nam ſubito pars magna Virum, meliorque putarunt
Eſſe minus validam mediæ telluris in oris,
Pellentemque minus gravitatem; quippe cieret
Hæc filum ſi vi majore, ipſum ocyus iret;
At ſi forte pari, citius procurreret illud,
Cum brevius; quare ſi tempore vibret eodem
Se brevius illum, quo longius; illud oportet
Vi gravitatis agi forti minus, atque valente:
Tanto & majori tum creſcere debet adaucta
Illa, movet filum quanto productius; atque
Si minor eſt, illo decreſcere, diminuique
Ordine, quo filum; ſic reſpondere viciſſim,
Augerique pari pacto, aut decreſcere debent.

[a] Succeſſum obſervationis inexpectatæ narrare pergit. Re vulgata, multi, & quidem melioris notæ Philoſophi, quos inter Hugenius, & Newtonus, agnoverunt inæqualitatem gravitatis in diverſis Terræ locis, in cujus cauſas, & effectus inquiſiverunt diligentiſſime, & cum ſucceſſu. Nam, ut ſupra diximus, ubi de pendulorum motu egimus, pendula breviora cum eadem vi, citius oſcillationes ſuas percurrunt, idem autem pendulum cum vi minore ſerius, adeoque ut eodem tempore oſcillent bina inæqualia pendula, debet illud, quod minore urgetur vi, brevius eſſe, & quidem pendulorum iſochronorum, ſive eodem tempore oſcillationes ſuas abſolventium longitudines inveniuntur viribus ipſis accuratiſſimè proportionales, ut diximus in nota ad verſum 494. hujus libri.

Alii contta phœnomenum tribuebant vel Obſervatoris vitio, vel aliis cauſis, atque in ptimis calori, qui metalla omnia diſtendit, ut videre eſt in virgis metallotum Soli expoſitorum, vel igni. Caloris nimirum vi excreviſſe virgam penduli in horologio ſub zona tortida, quod ideirco lentius ibi moveretur, & virgam, cui longitudinem ſimplicis penduli Richerus in Cayenna inſula inciderat, Pariſiis contractam, exhibuiſſe menſuram minorem vera, quæ cum Pariſienſi comparata minor ap-

Aſt alii infidos illo in tentamine ſenſus,
Servantiſque manum culpabant, & referebant,
Si quid erat varium, mutato denique cælo.
Extenduntur uti nam dura metalla calore,
Frigore ſic contra retrahuntur; proinde quod ære
Inciſum fuerat filum in regione calenti,
Par erat, ut, noſtris illatum cum fuit oris,
Aura ubi frigidior, ſe retro traxerit in ſe.
Propterea ad flammas dura expoſuiſſe metalla
Sæpe, atque æſtivi certabant Solis ad ictus,
Illaque diſtendi cernebant Sole vel igne.
Quin fila æquali vibrantia tempore ſeſe
Europæ in variis regionibus experientes,
Sequanicas velut ad ripas, Thameſimque remotum,
Atque ſuam quondam in terris qua condidit urbem
Uranie procul a populo, ſtrepituque reductam:
Omnia ſervabant tractu protendier æquo.
Non [a] prior illa tamen ratio labefacta ruebat
Propterea, quoniam non tantis, quæ loca filum
Æque monſtrabant æquo pro tempore longum,
Diſtabant ſpatiis, tellus qua lata pateſcit,
Ut cadere in ſenſus diſcrimina parvula poſſent.
Deinde urens quæ Sol, aut Sole potentior ignis
Addiderant longum in tractum incrementa metallis,
Non ea tanta quidem, ſat ut eſſent, viſa profecto.
Ferri virga pedes in ſex diſtenſa rigentem
Per brumam, mox de Cancro, tergoque Leonis
Sole diu radios in eam vibrante, magiſne

In-

appareret. Accedebant plutium Academicorum obſervationes per Europam Pariſiis, Londini, & quidem etiam Uranoburgi, qui referebant, eandem ubique menſuram inventam eſſe.

a Expoſitas hic objectiones diluit, incipiens a poſtrema. Loca Europæ, in quibus eadem inventa fuerat longitudo penduli, non ita multum diſtare a ſe invicem, ut iis inſtrumentis, quæ tum in uſu erant, diſcrimen exiguum exiguæ diſtantiæ debitum deprehendi poſſet. Caloris vi phœnomenum id totum tribui nequaquam poſſe. Nam virga ferrea pedum 6 æſtivo meridiano Soli diu expoſita, experimentis diligenter inſtitutis inventa eſt major per duos trientes lineæ, quæ eſt pars duodecima pollicis Pariſienſis, adeoque per decimam octavam partem digiti; Virga autem pedis unius ad ignem candefacta per dimidiam excrevit lineam, ut Newtonus affirmat Principiorum l. 3. Primus ille calor ſatis ille quidem vehemens pro virga penduli pedum trium exhiberet unum lineæ trientem, ſecundus vehementiſſimus lineam cum dimidia, quæ utraque menſura ab illa Ri-

che-

Increſcit, quam pars digiti ter ſexta quod extet?
At quæ virga pedem ſe protendebat in unum
Altera, cum glacie circum foret obſita multa,
Dein flamma calefacta, pedi quantum addidit illi?
De digito bis ſexta quater pars unica quantum eſt.
Cum Solis fuit ille ſub orbe ardente, caloris
Tantas virga vices num paſſa eſt? expoſuitne
Virgam, aut inciſum æs, violenti ad verbera Solis?
Non igitur, quidquid varium ſervaverat illic
In virga, poſſis uni tribuiſſe calori.
Dicere inexpertumque etiam, ignarumque fuiſſe,
Remque oculis, manibuſque parum tractaſſe peritis
Num poſſis, hominum numero qui lectus ab omni
Præſtantum fuerat, longoque exercitus uſu
Rebus in his, nil tum a ſtudio, curaque remittens
Pervigili, tentans rem ſæpe, iterumque retentans?
At [a], quæcumque fuit, tum denique ſuſpicionem
Hanc animis varias fuſi, multaſque per oras
Exemere Viri rem naviter experientes,
Queis non ingenium, non ars, cautique timores,
Ingenioſaque ſedulitas, non copia deerat
Inſtrumentorum, quæ Dædalus arte Britannus
Ediderat multa: quas vibrat machina longas
Horarum virgas, ſic ſtruxerat, ut probe cuncta
Percepiſſe oculis diſcrimina parvula poſſes;
Quid faciant gelidique vices, calidique notarat
Aeris, & quantum pro frigore, proque calore
Procurſus celeres ſint, cunctanteſque viciſſim:
His armis inſtructa tuas America calentes
Miſſa Virum delecta cohors inviſerat oras,

Et

cheriana deficit. Et tamen Richerianum horologium, & ejus virga multo minorem calorem debuit concipere, nec igni expoſita, nec Solis radiis. Demum Richerum, tantum virum, atque adeo exercitatum in re adeo craſſa oſcitantiæ quis arguat, niſi qui veritatem ipſam probe compertam impugnet?

a Difficultatem illam priorem novis, affirmat, obſervationibus amotam penitus, & inæqualitatem ipſam confirmatam. Id autem peractum inſtrumentis ad minima quæque diſcrimina deprehendenda aptiſſimis, ut fuerunt pendula ſimplicia ſecum vehenda ex alio loco in alium a Grahamo celeberrimo Anglo artifice, quem hic innuit, fabrefacta, quibus Halleyus inæqualitatem gravitatis Londini, & in inſula S. Elenæ æquatori proxima deprehendit. Notatum itidem eſt diligenter, quid ad obſervationis ſucceſſum caveri

ma-

Et referens, cælo quæ ſunt referenda calenti,
Motus eſſe minus pernices repperit illic,
Quam prius in patriis Europæ viderat oris.
Altera hyperboream glaciem, Arctoaſque pruinas
Docta cohors adiit, tentans ubi talia, cavit,
Ne quid concretum turbaret frigore cælum;
Et demum virgæ curſus magis eſſe, recurſuſque
Invenit celeres: proinde & gravitatis ibidem
Vires eſſe magis, quam ſint natalibus oris,
Pollentes, multoque magis, quam Sole ubi tellus
Impendente ſuper circum vaſtiſſima fervet:
Ut nequeas animi dubius proin eſſe, ſub altis
Cardinibus mage, quam media res pendere terra.
At quod ᵃ tanta aliis tentamina ſuppeditarunt,
Vobis ingenium, divinaque prodiderat mens
Primis, o Animæ grandes, o pectora fraudum
Neſcia, queis major multo pars contigit auræ
Ætheriæ, Tibi quo Batavi, flavique Sicambri.

Hu-

maxime debeat, ubi longitudo penduli inveſtigatur per globos filo appenſos, qua de re omnium accuratiſſime Mairanius in Commentariis Academiæ Pariſienſis ad annum 1735. Addit caloris ipſius effectum omnem impeditum eſſe vel redacto conclavi ope ignis in regione frigidiore ad calorem calidioris, teſte thermometro, quod Maupertuiſius præſtitit in Lapponia, vel notando prius, quot oſcillationum diſcrimen deberetur ſingulis gradibus caloris aucti in thermometro in eodem loco, quod itidem Grahamus præſtitit diligenter, ut, dum obſervatio deinde iniretur thermometro ſemper adhibito, effectus calori debitus a ſumma inæqualitatis inventæ detraheretur.

Iis præſidiis exercitatiſſimos viros plures plurimis in locis obſervationes inſtituiſſe, affirmat Noſter, quarum omnium conſpiratione jam revocari in dubium non poſſit, gravitatem in regionibus æquatori propioribus minorem eſſe, quam apud nos, in regionibus polo proximis majorem. Binæ autem Turmæ, quas innuit, ſunt eæ, quæ a Pariſienſi Academia 20 ab hinc annis miſſæ altera ad Polarem circulum duce Maupertuiſio, ad Æquatorem altera, duce Godinio, ad figuram Telluris, & hanc ipſam gravitatis inæqualitatem determinandam rem confecerunt. Nam inventa eſt longitudo ejus penduli pedum trium, & præterea penduli Torneæ in Lapponia obſervationibus Maupertuiſii linearum 9. $\frac{17}{100}$, ex obſervationibus vero Bouguerii Pariſiis 8. $\frac{67}{100}$, ſub Æquatore 7. $\frac{21}{100}$

ᵃ Inæqualitatem gravitatis, quam alii ab obſervationibus repetebant, Hugenius, ac Newtonus, quos cum laude nominat meritis cum Republica literaria ſane immortalibus omnino pari, ex theoria, & ipſa rerum Natura determinarunt. Porro Hugenii natione Batavi, patriam innuit, dum Batavos ipſos nominat, quibus Sicambros addit, populos nimirum ad Rhenum ipſis Batavis finitimos.

Hugenide, exultant, Tibique o, qui pectore fundens
Aurea dicta tuo longe exſuperare videris
Humanum, Nevvtone, genus, quo Cive Britanni
Pluſquam divitiis, pluſquam terra ubere plaudunt,
Oceani plus quam ſulcantibus æquora late
Claſſibus, armataque in bella horrentia pube.
Vobis in patriæ complexu, quidquid ubique,
Colluſtrare datum eſt; animus peregre ibat, & omnes
Impiger immenſas mundi penetrabat ad oras
Ipſis cuncta petens a cauſis, evoluenſque.
Scilicet hinc, & quæ ſe terram fundere circum
Debuerit gravitas, & qua ratione, patebat,
Quaſque vices varia regione ſubire locorum.
Namque * alter, ſuper axe ſuo dum volvier amplam
Perciperet terram, vidit quoque conſita tota
Corpora quæ terra circum ſunt, omnia niſus
Orbis de medio fugiendi, non tamen æquos,
Edere; nempe locis, agitur queis maximus orbis,
Majores aliis conatus eſſe, calenti
Scilicet in terra; breviores ducier orbes
In geminos exinde polos; proin effugiendi
Continuò quoque vim minui, & decreſcere, donec
Vis, & circuitus vaneſcat cardine in ipſo.
Vidit item queiſcumque locis hanc vim fugientem
Illis oppoſitas directam ſemper in oras,
Queis medium cujuſque peracti includitur orbis:
Proinde ubi per medium terrai maximus orbis
Tranſit, ibi eſt gravitas contraria vi fugienti,

In

a Hugenii meditationes exponit primo loco. Is inæqualitatem gravitatis repetiit a vi centrifuga ex diurno Terræ motu oriunda, quæ in locis æquatori propioribus major eſt, & gravitati contraria. Dum Terra circa axem ſuum convertitur, patet, omnia Telluris loca deſcribere circulos, qui, quo magis ab æquatore recedunt, & accedunt ad polum utrumlibet, eo minores ſunt, & centrum a centro Terræ remotius habent, nimirum in axe ipſo inter Terræ centrum, & polum. Quare vis centrifuga ex eo circulari motu orta, eo minor eſt, quo ab æquatore magis receditur, & ejus directio, quæ centro circuli deſcripti opponitur, eo eſt minus contraria gravitati, quæ dirigitur ad centrum Terræ, ac in ipſo polo eadem vis centrifuga penitus evaneſcit. Gravitas igitur, quam nos experimur, non primitiva illa, ſed hæc mulctata a vi centrifuga, quam a Gallis diximus appellari *la peſanteur*, minima debet eſſe ſub æquatore.

Porro Hugenius invenit vim centrifugam totam ſub æquatore eſſe unam e 289 partibus gravitatis totius, quam

No.

In medium terræ quia tendit; at obſtat eidem
Uſque minus, quo plus orbes deflectere circum
Diximus in geminam regionem hinc, inde polorum.
Nam vis quæque, ſui medio dum profugit orbis,
Quo medium hoc medio terræ mage diſtat ab ipſo,
Eſt obliqua magis gravitati, languidiuſque
Officit idcirco; minus & proin carpitur illa;
Maxima quapropter ſub cardine, totaque utroque eſt:
Illinc continuo paulum libata recedit;
Fit minima at, vernus quà rectà deſuper urens
Pendet Sol; tantum e toto nam deficit ipſi,
Pars de tercentum prope partibus unica quantum eſt.
Atque [a] ex hoc etiam lex eſt inventa, ſuperſtes
Augmina qua capiat gravitas in cardinem utrumque;
Compreſſamque polis terræ debere figuram,
In mediaque ſui paulum regione tumentem, &
Altius elatam perceptum eſt protinus eſſe;
Ut liquida hinc illinc librari pondera poſſint
Undique, quæ longis incluſa canalibus eſſe
Confingas terræ ad medium tendentia punctum;
Pellat & ut rectà labentia corpora deorſum
In terram gravitas, quæ dum ſe dirigit ejus
Ad medium, ſemper paulum fugiente ſub oras
Diverſas a vi turbatur; ſemper oportet
Non medias ubicumque plagas, punctumque, quod unum eſt,
Proſpectet, verum varias, & plurima puncta
Immoti, mediam qui terram trajicit, axis:
Propterea ut nequeat prorſus globus eſſe videri

Terra,

Noſter prope tercenteſimam appellavit. Quo autem pacto determinetur ex ipſa celeritate diurni motus, dicam in ſupplemento, ubi & illa ipſa major vis centrifugæ oppoſitio ope Geometriæ multo magis manifeſta fiet.

a Inde autem duo deducta eſſe, affirmat, alterum admodum facile, qua nimirum lege debeat vis centrifuga augeri ab æquatore ad polos, & gravitatem minuere, alterum, Telluris figuram non poſſe eſſe accurate ſphæricam, tum quia ob minorem ſub æquatore vim gravitatis reſiduæ debent ibi maria elevari ad æquilibrium ſervandum, tum quia vis centrifuga gravitatis obliqua ejus directionem deflectit ita, ut gravitas reſidua non ad unicum, idemque centrum, ſed alibi ad alia axis puncta dirigatur.

Porro ex utroque hoc capite, nimirum æquilibrii ſervandi imminuto pondere, & directionis gravitatis reſiduæ in diverſis locis, ope Geometriæ, & calculi definiri poteſt, quæ figura Terræ conveniat, & quantum ipſa quovis in loco depreſſa ſit. Prima methodo Hugenius eſt uſus, qui 7 milliaribus, invenit, altio-

Terra, ſed inflectat varios ſua terga per arcus,
Ille modum docuit pariter, quo ſcire queamus,
Exterior quæ ſit, qua clauditur ipſa, figura;
Denique curtatum, qua tellus arctior, eſſe
Non mage, quàm ſeptem nimirum millibus, axem.
Hactenus [a] his veluti constructis multa profecto
Contigit, & majora ſuper, potioraque longe
Addere Nevvtono, ſummumque imponere culmen:
Scilicet huc ratione ſua delatus, & omnem
Proſpiciens late in partem, quantum intulit orbi
Notitiarum, & qua mentes ditavit opum vi?
Principio, ratio ſervatis ut bene rebus
Conveniat, vim non unam ſatis eſſe putavit,
Quæ cogat fugere; hanc etenim minus edere duplo
Diſcrimen nobis gravitatis; proinde ſagacis
Obtutus animi gravitatem fixit in ipſam;
Cui nil detractum ſit niſibus effugiendi,
Plenam, atque illæſam, qualiſque eſt, denique totam.
Hanc ut inæqualem, neque punctum prorſus in unum
Undique directam terræ regione locorum
Pro varia totam gravitatem cenſuit eſſe;
Scilicet exortam per vires, a quibus omnis
In ſe materies trahiturque, trahitque viciſſim,
Conſervatque ratas leges quæ tracta trahendi:
Virium uti ſumma gravitas coaleſcat ab omni,
Nimirum a cunctis qua corpora quæque trahuntur
Corporibus, tellus queis conſtat tota, vel ultra
Optes ſi prorſus rem tangere, quidquid ubique eſt

tiorem eſſe debere Tellurem ad æquatorem, quam ad polos.

Ego quidem in diſſertatione de Telluris figura ope ſolius Geometriæ generalem exhibui conſtructionem problematis, quo data lege gravitatis ad centrum unicum directæ, utcumque ea variatis diſtantiis varietur, inveniri poſſit Telluris figura, & compreſſionis magnitudo. Sed quia, ut in ſequenti nota dicemus, hæc omnis inveſtigatio figuræ terreſtris, pendet etiam a Newtoni inventis, cum nimirum gravitas ipſa primitiva ad unicum punctum non dirigatur, adeoque iterum nobis in libro 5 fuſe de Telluris figura agendum eſt, omnia, quæ huc pertinerent, illuc reiiciam, diligentius ibi pertractanda in ſupplemento, ut quæ ad idem pertinent argumentum, eodem in loco exhibeantur ſimul conjuncta.

[a] Newtonum Hugenianis inventis plurima ſuperſtruxiſſe, jure affirmat, qui omnem de gravitate, & ejus principiis, ac effectibus diſquiſitionem in immenſum protraxit. Deprehendit enim, gravitatem eſſe generalem materiæ quandam proprietatem, qua omnes parti-

Materiæ, vaſtum quæ ſe diffundit in orbem.
Proinde hic eſſet opus late luſtrare trahentem
Materiam, & magno per mundi vaſta volatu
Corpora deferri; at melius tentanda ſuperſint
Hæc porro, cum jam vires, animique recentes
Æquos ſufficient auſus: nunc pondera rerum
Jam vidiſſe ſat eſt terras non una per omnes,
Diverſiſque locis urgeri corpora deorſum
Diſſimili niſu gravitatis, ſcilicet illic
Tardius, hic contra paulo cunctanctius ire.
Quin & forte locis iſdem, quod deinde monendum eſt,
Credere vix poſſis per tempora longa manere
Æquales ictus gravitatis, ponderaque æqua.
I nunc, [a] atque hominum mirare in mentibus ipſis
Nec ſemper, nec ubique uno res ordine eaſdem
Conſtare, & varium, atque incertum pondus habere,
Quas nos percipere, aut agere, aut quas velle ſolemus,
Aut illinc quacumque alia ratione moveri.

Haud

ticulæ ſe mutuo trahunt, vel ad ſe invicem tendunt in minoribus diſtantiis magis, in majoribus minus in eadem ratione, in qua ſunt quadrata diſtantiarum ipſarum inter ſe, & proinde terreſtrem gravitatem coaleſcere ex gravitate in omnes totius Telluris particulas. Hinc dum vis centrifuga cogit partes æquatori proximas elevari, jam ipſa gravitas primitiva, mutata poſitione partium Telluris, in quas tenditur, mutari debet, & in ſphæroide quidem compreſſa ad polos, invenit Newtonus ipſe, majorem eſſe debere vim gravitatis primitivæ in ipſis polis, quam in æquatore, & eadem lege decreſcere, qua creſcit vis centrifuga, adeoque ab Hugenio e binis cauſis imminutæ gravitatis, & e binis principiis inveſtigandæ figuræ Terreſtris alterum conſideratum eſſe, alterum omiſſum.

Quamobrem inquirendum hic eſſet in hanc ipſam Newtoni gravitatem generalem, quam etiam Attractionem appellant. Sed ea diſquiſitio multo ſublimior eſt, & multo operoſior. Ipſi uni ſequentes deſtinati ſunt libri tres, in quibus tota cæleſtis Newroniana Mechanica continebitur, ubi hæc ipſa, quæ huc pertinent, multo accuratius in ſupplementis pertractabuntur. Interea conſiderata gravitate terreſtri, ut ante præcipua Newtoni inventa conſiderabatur, delati ſumus ad inæqualitatem ipſius in diverſis Terræ locis, ex qua ad inæqualitatem in diverſis Terræ diſtantiis conſiderandam fit gradus, & Cælo conſcenſo ipſius gravitatis leges per analyſim inveſtigantur e phœnomenis, tum ad mira ſane, & arctiſſimis inter ſe colligata vinculis, ac phœnomenis omnibus conformia conſectaria quam plurima per ſyntheſim deſcenditur. Sed hæc innuiſſe ſit ſatis.

[a] Ex alia in aliis Terræ locis vi gravitatis, occaſionem arripit ſane opportunam digrediendi ad varias humanæ mentis, atque animi inclinationes quaſdam aliam alibi vim exercentes.

Statuit, eſſe inditam noſtris animis

ab

Haud dubitem humanis in mentibus inſeruiſſe
Quaſdam Naturam leges, præſcriptaque certa,
Queis, ut ponderibus, declinent, atque ferantur,
Quo ſit opus ferri: verum ut quo ſæpe locati
Ordine nos inter ſumus, & ſunt undique circum
Qua varia res diſpoſitæ ratione, lociſque,
Sunt populi ut mores, exemplaque, juraque, quicum
Vivimus, affectus ut noſtri, ut tempora, & ætas;
Inſita Naturæ quæ conſtant pondera, flectunt
Seſe alio interdum, minuuntve, aut denique prorſus
Turbata, oppoſitis devictaque viribus ullos
Non jam edunt niſus, & nuſquam impellere poſſunt.
Exſurgunt aliæ tum prava ab origine vires
Scilicet, & veluti cum nobis exoriantur,
Ortum a Natura ſimulant duxiſſe potenti.
Hinc varia exagitant, diverſaque pondera mentes
Omnibus in rebus noſtras. Quid denique conſtat?
Jamque age, terram oculos late circumfer in omnem,
Atque hominum luſtra genus, & mortalia corda.
Queis non in rebus videas diſtare, puteſque

ab ipſa natura vim quandam, quam nimirum dicimus Rationis lumen, qua & mentes noſtræ ad vera quædam affirmanda, & animi ad bona quædam approbanda ab ipſa Natura determinentur. Id quidem non requirit rerum ideas a natura inditas, atque innatas, ut primo libro oſtenſum eſt, ſed animi vim, qua ideatum per ſenſus acceptarum natura cognoſcatur, & innoteſcat, quæ conjungendæ ſint, quæ disjungendæ, quarum objecta approbatione digna ſint, quarum objecta reprobatione.

Porro id lumen a variis humanæ vitæ conditionibus ita variari, affirmat, ut aliquando etiam penitus extinctum videatur. Eæ conditiones ſunt educatio in primis, & aliorum exempla, affectus animi diverſi ex ipſa fortaſſe etiam diverſa corporum ſtructura orti, ac diverſa ætas, diverſa temporum conditio, quæ quidem omnia externa ſunt ipſi animo, & æquipatari poſſunt diverſæ diſpoſitioni partium Terræ, quæ diverſam gravitatem primitivam reddunt corporis ab iis omnibus attracti. Tum pravæ quædam animi ipſius inclinationes, quas Theologi *concupiſcentiam ſolutam* appellant, quæ cum in ipſo animo inſideant, & ipſum, ni contra validiſſime obnitatur, tranſverſum agant, vi centrifugæ in ipſis corporibus ex motu diurno obortæ aptiſſime ſane comparantur.

Ut hoc ipſum exemplis illuſtret, proponit primum, quod pertinet ad mentem, variam nimirum apud varias ſectas principiorum quorundam vim, quæ alibi, ut axiomata habeantur per ſe nota, alibi contra reſpuantur, ut errores, & præjudicia. Tum ad voluntatem progreditur, & varios abſurdoſque variarum gentium mores enunciat, qui quidem ita ſunt ſibi invicem, & recto rationis lumini oppoſiti, ut aliud alibi

Diverſis animis, diverſa mente potiri,
Et genus eſſe unum, bipedi veſtigia tantum
Quandoquidem ſignat greſſu, pennaſque volantum
Non habet, aut motis proſcindit cærula pinnis?
  Principio ut vario fertur ſermone per ora,
Sic itidem varium eſt doctrina pondus in ipſa
Pro regione, locoque alio, terriſque remotis.
Quamque in naturæ clarandis rebus abire
Diverſos, ipſiſque elementis notitiarum
Cernimus interdum vario ſub ſidere natos?
Albin [a] qui Rhenumque bibunt, undiſque minorem
Danubium, ſeptemque vident fulgere Triones
Altius, in claro veri radiare nitore
Plurima conſpiciunt, manifeſta imbutaque luce,
Quæ tamen ad Thameſim longe natalibus auris
Veſcentes obſcura ſibi, nec vera videri,
Prorſus & ambigua poſita in ratione fatentur;
Poſſe nec omniparente ſua contendere cum vi
Illa, nec indigenis inventis æquiparari;
Quæ tamen ipſa aliis quoque rejiciuntur in oris,
Nempe ubi vorticibus locus eſt, terniſque elementis.

Ni-

alibi eſſe ipſum humanum genus videri poſſit. At iis omnibus fuſius expoſitis, quæ, ut in ipſo hujus libri exordio monuimus, excerpſit ex opere illo, *Exprit des loix*, pernicioſis, quæ inde erui poſſent, conſectariis remedium affert, inculcando illud, & poſſe Sapientem, & debere recto rationis lumini inſiſtere, & inniti ita, ut nulla obliqua vis tranſverſum abripiat.

Huc autem deſtinaverat ea etiam, quæ deinde in exordium tranſtulit hujus libri. Creſcente nimirum uberrimi ſane argumenti campo, œſtro quodam poetico abreptus, ac longe, lateque evagatus epiſodium hoc in immenſum protraxerat; ac proinde eorum, quæ ad diverſas regiminum formas pertinent, quæ ipſa fuſiora erant, partem quandam in exordium tranſtulit, longe alio adſpectu propoſitam.

a Germanos hic exprimi patet, & Helvetios in primis, quos indicat etiam per illud *undiſque minorem Danubium*, ipſum nimirum fontibus propiorem, nam cum jam auctiorem *Barbari* circumſident, tum Anglos, & Gallos. Ut aliquod exemplum proferam, principium indiſcernibilium, quo omnia prorſus ſimilia a Natura excludantur, Leibniriani in Germania habent pro evidentiſſimo; rident contra Newtoniani plerique in Anglia, qui materiam potius ſimilarem admittunt. Illi abſurdum putant materiam ſine ullis primis indiviſibilium, & inextenſorum elementis conſtare, & monades ſuas idcirco inculcant: his abſurdiſſimum videtur contra extenſum ex inextenſis compoſitum, & hanc materiæ proprietatem particulis quibuſque, affirmant, communem eſſe debere. Sic Attractionem

Nimirum quæ res eadem ſit ſæpe voluta
Mente, diuque animo circumſonet, atque probetur
A multis, quamque interſit quoque noſtra probari,
Fit facilis credi ſubito, manifeſtaque prorſus;
Menſque videt, quod ſæpe fuit conata videre:
Nomina miteſcunt, reſque aſſuetudine longa.
Jam nunc pro varia regione, & tempore mores
Mens varios eſt inſpicere, & Natura magiſtra
Injuſti, juſtique licet ſit certior intus
In nobis, quam rerum ullarum forſitan extet,
Non minus ipſius manifeſtæ lumina lucis
Obruere interdum, penituſque extinguere poſſunt
Mores, judicia, affectus, exemplaque, & uſus;
Propterea ut ſtulte videamur, ſive doceri
Nil a Natura nos, ſeu contraria prorſus.
Nunc quoque, ſæva tulit quales Germania quondam,
Sunt variæ, rapto quæ ſemper vivere gentes
Aſſuerunt, quæruntque decus crudelibus auſis.
Hæ pueris tinctas humano ſanguine prædas,
Ut pellem catulis, aut cervi cornua, monſtrant;
Et queis mitius eſt, neque longe immane, feroxque
Ingenium, terræ allidunt, mortemque minantur,
Degeneres patria nimium a virtute vocantes.
Ut pennas, dicunt, avibus natura, volare
Queis poſſint, dedit, & caudam, ut proſcindere limphas,
Piſcibus, & nobis ſic ingeniumque, manuſque,
Ut ſtruere inſidias, rapere, & pugnare queamus.
Sunt quibus, ut referunt Læſtrygonas ante tuliſſe
Auſoniam, humanos ſit mandere dulcius artus,
Prolui & humano longe hauſto ſanguine, quam quos
Herbarum mites ſuccos mortalibus offert
Natura, aut pecudes, aliud genus: ire per altos

Ve-

nem ſuam pleriſque Newtoniani in Anglia Naturæ admodum conſentaneam arbitrantur, irrident Carteſiani in Gallia ſuis contra addicti vorticibus, quos ubique in Cælo, in magnete, in exiguis elaſticorum corporum particulis videntur ſibi intueri oculis ipſis, & propemodum manibus contrectare.

Originem autem hujuſmodi præjudiciorum aperit. Sunt quædam, quæ ubi primo excipimus, averſamur etiam, tum conſuetudine quadam ita ipſis paulatim adhæreſcimus, ut pro evidentiſſimis habeamus. Videntur ideæ quædam attrectatione ipſa velut magneticam quandam, vel electricam vim contrahere, qua ſibi invicem adjungantur, copulenturque.

Quæ

Venatum montes, hominumque cubilia ſilvas
Armati ſaxis, & multa cuſpide gaudent:
Cum capiunt, rediere domum Pæana canentes,
Et fera laudatis celebrant convivia prædis.
Mos apud eſt Indos natis mactare Parentes
Ob pietatem, annis cum languet vita per artus
Effœtos, ſibi ſint oneri ne forte, ſuiſque,
Ne ſubeant duræ pertæſi incommoda vitæ:
Mos etiam morbo, aut fato quocumque peremptos
Mandere, viſceribuſque ſuis tumulare ſuorum
Viſcera: noſtrorum quo, dicunt, membra ſepulchro
Condere poſſimus potiori? avellier unquam
Quis ferat artubus a caris? nos reddere pacto,
Quo licet, his vitam cupidi certamus ademptam
Corpora corporibus miſcentes mortua vivis,
Et facimus, pars ſint noſtri, in nobiſque locamus.
Hunc ubi funereum Grajorum hauſere cohortes
Morem oculis illic longinquo Marte merentes,
Obſtupuere animis, damnaruntque horrida facta.
Interea inſueto tentata vel aere, longa
Sive via, magnoque armorum attrita labore,
Vulneribuſque abſumpta exanguia multa ſuorum
Corpora conſtructis medio ſuper aggere Graji
Impoſuere rogis, admotoque igne cremabant.
Flammæ conficiunt artus; it nidor in auras
Fumidus: obſtupuit peregrinos incola ritus
Edoctus, tantamque humano in pectore poſſe
Barbariem innaſci vix credidit, in ſocios ut
Igne velint etiam exanimos ſævire cremantes.
  Plurima ſed, genus hoc, facile excuſamus in Indis,
Gentibus atque aliis, quæ nobis eſſe videntur
Incultæ; quis, Roma, tuas facta horrida leges
Horrida facta neget leges, moreſque tuliſſe?
Quid memorem humani ſpectacula grata cruoris,
Quid Gladiatorum pugnas, ſervoſque coactos
In ſe urſos, tygreſque, atque irritare leones,

Plau-

Quæ ad diverſos diverſarum gentium mores pertinent, quæque de diverſis animi ejuſdem in diverſis circumſtantiis affectibus addit, Achillis exemplo illuſtrata, per ſe manifeſta ſunt, vel ita cognita, ut notis nequaquam indigeant. Illud unum adnotabo, quod de barbaro more ſuorum cadavera devorandi, & ſuis veluti viſceribus tumulandi profert, apud Herodotum haberi, qui id de Indis affirmat lib. 3.

Plaudente, & furias populo accendente ferarum?
In ſobolem ipſe ferus pietate potentior uſus,
Naturaque fuit: vix primum in luminis oras
Edita, ſæpe viis proles deſerta jacebat,
Et loca vagitu complebat, parvaque circum
Brachia tendebat non amplexura Parentes,
Vitale auxilium fruſtra ſic indiga poſcens.
Quæ teneris, quæ culpa ingens, ut lege liceret
Ipſos hoc ritu in prolem ſævire Parentes?
Tibri Pater, quot eras parvos miſeratus alumnos
Ripis ſæpe tuis viſos reptare, memorque
Expoſiti quondam tenero cum Fratre Quirini
In mare pertuleras forſan parcentibus undis.
  Plus ubi quæſitum eſt de moribus, ipſaque virtus
Cui laudata magis, Grajæ telluris alumnis
Quam fuerit, ſtudioque diu affectata ſevero?
Haud minus hos rigidos tamen, hirſutoſque magiſtros
Fama refert teneram ætatem corrumpere ſuetos,
Nam pulchra facie pueros, & corpore pulchro
Turpiter, ipſa quod eſt Venus execrata, peribant:
Ponere naturam motus non poſſe ferinos,
Nec ſuavi inſtitui vitæ ratione putabant,
Ni pueri prius incipiant molleſcere amore,
Contendantque ſuis jam tum placuiſſe docenti
Scilicet & factis, & corpore, flexile fiat
Ut ſic ingenium, culturæque artibus aptum:
Blanditiis facile eſt mentes fregiſſe ſuperbas.
  Crimen adulterium eſt, & dedecus; eſt ubi neutrum
Credatur tamen; hoſpitibus præbere domumque,
Conſortemque thori gaudent. Sunt, gaudia tantum
Qui Veneris norunt incæſtæ, vulgivagæve.
Carcere ut Acriſii claudunt, multoque tuentur
Exſecto cuſtode alibi genus omne putantes
Fœmineum infidum: fluxam muliebribus eſſe
Nonne fidem hic norunt animis? ideone tuentur?
Quin & amicitias colere, & celebrare virorum
Conventus licet, & m xtim ſpectacula adire,
Et comites ſibi habere procos, quocumque libido eſt,
Et licet, & mos eſt, &, qui non talia perfert,
Exercet durum imperium, ferus eſſe putatur.
  Quid Natura magis vita commendat, & atra
Quid nos morte docet crudelius eſſe? tuendam

Haud

Haud tamen ad vitam Naturæ hæc pondera, vimque
Pectora ſenſerunt aliquo obfirmata recepto
Contra judicio, atque diu ſub mente voluto.
Ipſi etiam ſenſere minus, gens tota, Britanni,
Non jam inculta, ut erat quondam, ſed quæ inclita floret.
Nempe putant has cuique fores liquiſſe patentes
Naturam, ut, tædet cum vitæ, erumpere poſſint.
Ergo, quæ ſubeat prædura incommoda, vitam
Exſolvunt letho, ſeu ferrum in viſcera condunt,
Seu ſe præcipites in flumen, in æquora mittunt,
Seu potius laqueo innexo ſuſpendere gaudent
Se manibus perſæpe ſuis ante ora Parentum
Nati, atque imbelles, ſed iniqua ſorte, Puellæ.
Incita laudatis exemplis acrius uſque
In ſcelus hoc agitur plebs, atque exempla novantur,
Scilicet unum plebs imitatur multa Catonem.
 Mos ferus Europam late olim invaſerat omnem,
Inſimulatus, uti, fuerat qui crimine quovis,
Diceret orando non coram judice cauſam,
Verum igni injiceret dextram, accenſove mearet
Sæpe rogo, & limphas ferventes ſæpe ſubiret:
Servandum fore credebant, qui juſtus, & inſons,
Juſtitiam Superis, rectumque probantibus ipſis;
Ac ſi proinde forent verſuri rerum elementa,
Et ſubito arbitrio miſſuri fulmina noſtro.
Sæpe etiam ſumptis pugnabant cominus armis:
Sed rectum, verumque tamen cum viribus eſſe
Conjunctum, ſectamque ſequi, quæ pollet, & arte eſt
Conſuefacta magis dira, plerumque videbant.
Exinde inter nos etiamnum barbarus iſte
Mos viget, ut qui ſit factis, verbiſque protervis
Exceptus, ſubito in certamen provocet hoſtem,
Atque eadem ſubeat ſimul ipſe pericula vitæ
Inſons, atque ſui cadat hoſtia ſæpe furoris.
Ni faciat, non ingenuos erit inter habendus,
Et trahet inviſos ſine laude, & degener annos.
Nempe animos, verum quod ſit, minus incitat, ipſi
Quam quod optinantur mortales, fictaque majus
Plurima pondus habent; fictis ſtant plurima rebus.
 Scilicet ipſa ſolet varios convertere in uſus
Se ratio, & facies, quas tum circumſpicit extra,
Induit, ut, quo non paulatim aſſueſcere poſſit,

Nil

Nil adeo incultum conſtet, dirumque, ſuamque
Sponte etiam per quod nolit traducere vitam.
Nonne vides ſolos ævum cum bobus agentes
In morem gregis ire ſui, exemploque ferino
Vivere paſtores, vix extra agnoſcere pauca?
Tota illos ratio tantum propendet in uſus.
Quid genus omne foret noſtrum, ſi viveret altis
In ſilvis, aliquas ut dicunt vivere gentes,
Diſperſum? nigris quid tum diſtaret ab urſis,
Sive lupis, quos nocturnis ululare tenebris
Audiret, ſævisque leonibus, atque elephantis?
More oppreſſa truci ratio fors muta jaceret,
Uſus exciperet, quos cerneret, haud meliores;
Difficile eſt reperire novos, & abire receptis.
Præterea quid jam repetam, quæ, quantaque moti
Momenta affectus in noſtris mentibus addant?
Ut mutent, verſentque animum, ad diverſaque raptent,
Et magico veluti transforment pectora cantu?
Qui timuit, quam nunc irato diſcrepat a ſe
Nimirum, a triſti quam gaudens, atque dolente,
Et qui nunc odit, nimium cum nuper amavit?
Quam diverſa probat? quantum fuit inter Achillem,
Cum lectam præda ex omni Briſeida amaret,
Et cum indignatus poſt ob Briſeida raptam
Implacabilis Argivis abſcederet armis
Secum deducto cum milite Lariſſæo,
Grajugenum ſpectans alio de littore cædes
Immotus, cytharam & pro ferro ſæpe retentans;
Cumque ſuum letho jam Patrocla fleret ademptum
Noctes atque dies, & fœmineos ululatus
Ederet, & pulchros fœdaret pulvere crines,
Mactaretque greges tumulo, puerumque cruorem
Manibus inferias ſacris hauriret ad aras;
Aut cum mox ſumptis congreſſus ſterneret armis
Hectora, tapraretque diu defoime cadaver,
Exciperetque ſenem Priamum, ſtratumque videret
Ante pedes nati exuvias depoſcere regem.
Scilicet his animi vita vertuntur in omni
Perpetuis vicibus; vix idem permanet una
Sæpe die tenor in nobis; mutamur in horas
Interdum, rebuſque novis quia pellimur uſque,
Proinde novis mentes cum motibus uſque novantur,

Atque alias ſubeunt formas, aliæque videntur.
At non propterea eſt, Sapiens ut moribus ullis,
Judiciiſque Virum popularibus abducatur
Tranſverſa ratione viæ; nil rebus in ullis
Admiratur enim nimium, nil æſtimat ultra,
Quam par eſt; tantum, quæ nobis indita, ſentit
Pondera naturæ vigilans, & ducitur illis:
Scilicet huic æquam rationem accommodat uni,
Incertus vita huc illuc ne fluctuet omni.

SUP-

Digitized by Google

SUPPLEMENTUM AD LIBRUM PRIMUM

§. I. Ad verſ. 78.

DE CORPORIS, ET SPIRITUS DEFINITIONE.

1 CUM eas, quas ſubſtantias completas dicunt, hic Noſter in duas claſſes partitus ſit, eas complectens, quæ a nobis cognoſci poſſunt (nam alia etiam fortaſſe poſſunt eſſe ſubſtantiarum genera, nobis ignota, & quæ a nobis cognoſci omnino non poſſint) nimirum corpus, & ſpiritum, breviſſime exponit, quid corporis, quid ſpiritus, aut mentis nomine intelligat. Locus hic eſſet accuratam exhibendi definitionem ipſius corporis, & ſpiritus. At quoniam ipſi perſuaſum eſt, quod & mihi, intimas rerum ſubſtantias a nobis immediatè non cognoſci, eam omittit, & deſcriptionem quandam adhibet, quæ ejuſmodi ſubſtantias ita nobis exhibeat, ut eas cognoſcimus.

2 Bina in nobis idearum in noſtra mente excitatarum genera per reflexionem deprehendimus. Alias naturali quodam, & omnibus communi validiſſimo inſtinctu impulſi originem extra ipſam mentem habere, & ad externa quædam objecta pertinere, alias ab ipſa oriri mente, & in ipſa conſiſtere firmiſſimo aſſenſu credimus. Inſtrumenta, quibus illud primum idearum genus excipimus, vocamus ſenſus, earum cauſam illam externam, & ut ajunt, objectum, appellamus materiam, & corpus: harum ſecundi generis idearum originem hane, quam in nobismetipſis intuemur, dicimus mentem, ſive animum.

3 Hinc nimirum bina illa ſola ſubſtantiarum genera nobis innoteſcunt, alterum ſubſtantiæ ſenſibilis, alterum ſubſtantiæ cogitantis, & volentis, de quorum exiſtentia generum, intima illa Naturæ voce admoniti dubitare omnino non poſſumus, ne tum quidem, cum nobis ipſis vim inferre forte conemur, ut de noſtrorum ſenſuum, de ſubſtantia extra nos poſita, & ipſos noſtros impellente ſenſus dubitemus cum Pirroniſtis, cum Egoiſtis, atque aliis ejuſmodi mendaciſſimis viris, qui quidem intima illa eadem Naturæ voce perpetuo pariter commonefacti, de eo ipſo, de quo ſe, reflexo quodam ſuſpenſi dubio, dubitare affirmant quandoque, ſæpe deinde mentis aciem eodem directe defigentes dubitare omnino non poſſe profitentur.

4 Primam hanc ſubſtantiæ diviſionem, & horum generum notionem hoc quidem pacto immediate a Natura haurimus, cætera paulatim per reflexionem acquirimus. Et quidem, quod ad materiam, & corpus pertinet, quinque in nobis potiſſima ſenſuum genera deprehendimus, vel potius ad quinque genera reducimus ſenſus omnes noſtros, multa ex pluribus inter ſe diverſis reducendo potiſſimum ad tactum. Experimur autem conſtantem quandam relationem inter ideas prorſus ſimiles per hoſce ſenſus excitatas in nobis, quas in certas quaſdam claſſes partimur, quibus reſpondentes illius externi objecti proprietates certis nominibus deſignamus.

5 Has proprietates vulgus ita ſimiles cenſet illis noſtris ideis, ut eſt hominis imago depicta homini ipſi. Philoſophi autem aliqui, ut Carteſiani in primis, eas proprietates dividunt in relativas, & abſolutas. Abſolutas putant, eas, quæ ad tactum pertinent, extenſionem in primis, & ſoliditatem continuam, ac impene-

penetrabilitatem, relativas vero reliquas, odores, colores, ſapores, ſonos. Illas nimirum eo pacto exiſtere in corporibus, quo nobis a noſtris ideis repræſentantur, quæ illis eo prorſus pacto ſimiles ſint, quo vulgus omnes ideas corporis proprietatibus omnino ſimiles arbitratur. Has omnes relationem quandam habere ad noſtras ideas, ad ideas abſolutarum proprietatum, & ipſas abſolutas proprietates, ac inter ſe, vi cujus conſtanti lege ſuas excitent ideas, ſed longe aliter eſſe in rebus, ac nobis appareant. Cumque omnes haſce relativas proprietates ad illas abſolutas reduci arbitrentur, & diverſas illarum eſſe modificationes tantummodo cenſeant, hinc corpus definiunt alii ſubſtantiam extenſam in longum, latum, & profundum, continuam, ac ſolidam, alii ſubſtantiam impenetrabilem.

6 Verum alii ſane multi ſubtiliori Methaphyſica uſi, omnes omnino corporum proprietates æque relativas eſſe cenſent, nec uni tactui id a Natura conceſſum eſſe arbitrantur, ut is unus proprietates exhibeat per imagines ipſis omnino ſimiles. Qui idcirco, ut in ſequentibus etiam Noſter, ignotam prorſus eſſe nobis intimam corporis naturam arbitrantur, & non ut accuratam definitionem, ſed ut denotationem quandam a noſtro cognoſcendi modo petitam, quod unum præſtari poſſe cenſent, proferunt illud: corpus, ſeu materiam eſſe *ſubſtantiam ſenſibilem*.

7 Ego ſane illud in primis diligenter notandum cenſeo, ideas noſtras proprietatibus illis ſimiles omnino eſſe non poſſe, ut externæ hominis figuræ pictura eſt ſimilis. Nam horum utrumque & ſubſtantiale eſt, & æque materiale, & eundem prorſus effectum præſtat, eum eoſdem lucis radios eodem ordine ad oculos noſtros reflectat. At idea ad mentem pertinens nec ſubſtantialis eſt, nec materialis, ut illud ejus objectum. Quare hoc ſimilitudinis genus, ne in ideis quidem per tactus excitatis haberi poteſt.

8 Deinde certum & illud eſt, haberi in omnibus ideis relationem ejuſmodi ad objecta, ut ab iiſdem objectis eodem applicatis modo eædem in noſtra mente ideæ excitentur. Id noſtra nobis experientia oſtendit. Eaſdem in aliis hominum mentibus noſtris omnino ſimiles excitari, jure credimus ex eo, quod in ipſis tam multa alia deprehendamus nobis uſque adeo ſimilia, ut vultum videlicet, ac totam corporis conformationem externam, propenſiones itidem quaſdam eaſdem ad reliqua objecta externa communia, ac alia ejuſmodi ſane multa. Fieri tamen abſolutè poſſet, ut noſtræ ideæ ab illorum ideis ad idem objectum eodem modo applicatum pertinentibus plurimum differrent. Si enim inter illas ipſorum ideas conſtans quædam relatio eſſet, quæ inter noſtras; iiſdem conſtanter nominibus illa objecta appellaremus, & de iis communi idiomate ageremus inter nos, quin unquam alter alteri ſuæ formam ideæ communicare poſſet, &, ſi quod eſt, diſcrimen agnoſcere. Omnino autem mihi perſuaſum eſt, eſſe poſſe, & fortaſſe in omni rerum univerſitate eſt aliquod mentium genus a noſtris admodum diverſum, quibus hæ eædem ſubſtantiæ materiales, & corporeæ alia idearum genera excitent a noſtris ideis prorſus diverſa.

9 Præterea ita mihi perſuaſum eſt, extenſionem accuratè continuam, & ſoliditatem, ac impenetrabilitatem ex immediato contactu ortam, non eſſe abſolutas materiæ, & corporum proprietates, ut illas nullo modo eſſe proprietates ipſorum arbitrer. Cenſeo igitur materiam omnem, & corpora conſtare punctis prorſus indiviſibilibus, & inextenſis, quæ puncta ſemper a ſe invicem diſtent

aliquo

aliquo intervallo, quod imminui poſſit in infinitum, ſed auferri non poſſit ſine compenetratione punctorum. Hæc puncta puto prædita eſſe a Natura viribus quibuſdam, quæ in minimis diſtantiis cogant ipſa a ſe invicem recedere, quas idcirco repulſivas appello, & quæ imminutis in infinitum diſtantiis augeantur in infinitum, auctis autem diſtantiis minuantur, donec in quadam diſtantia adhuc tamen perquam exigua nullæ ſint, tum directione mutata ad acceſſum determinent, & attractivæ dicantur, ac creſcant itidem, & decreſcant, ac plurimis vicibus directione mutata migrent ex attractivis in repulſivas, ac viceverſa: exponantur nimirum per ordinatas ad curvam lineam, cujus abſciſſæ exprimant diſtantias, & prout illa curva axem in pluribus punctis ſecans ordinatarum ſuarum directionem mutet, mutetur & virium directio.

10 Hanc theoriam non ut arbitrariam hypotheſim propoſui, ſed mihi quidem validiſſimo poſitivo argumento probavi in Diſſertationibus de Viribus Vivis anno 1745, de Lumine 1748, de Continuitatis lege ſuperiore anno, ubi & uſum ejus multiplicem exhibui, quam cum ipſis uſibus in ſua Synopſi Phyſicæ Generalis P. Carolus Benvenutus anno pariter ſuperiore admodum diligenter expreſſit, extenditque. Eam Noſter libro 10 fuſe perſequetur, ubi ego eandem in Supplemento illuſtrabo.

11 Porro in ea theoria materia punctis prorſus inextenſis, & indiviſibilibus, ac a ſe invicem diſtantibus conſtans in immenſo vacuo innatat. Nullam accuratam continuitatem habet, aut ſoliditatem, ut vulgo, vel a Philoſophis concipitur, licet poſſit maſſas firmiſſimas conſtituere, ubi nimirum puncta in iis a ſe invicem diſtantiis, & virium limitibus ſunt ſita, in quibus acceſſu modico ingens habeatur repulſiva vis, modico receſſu ingens vis attractiva. Contactus immediatus excluditur, & impenetrabilitas oritur ex viribus illis, quæ in minimis diſtantiis repulſivæ ſunt, non ex immediato impulſu, & conflictu.

12 Hujus theoriæ ideam hic præmittendam cenſui, cum eam infra adhibere debeam pluribus in locis; ejus autem fundamenta, & ampliores uſus in decimo libro ubetius, ut monui, perſequemur. Interea notandum cenſeo illud, extenſionis continuæ, & ſoliditatis ideam nos ab infantia hauſiſſe ex ipſo matris utero, cum ex altera parte reſiſtentiam ſentiremus, ex altera vero nec reſiſtentiæ interruptionem ullam deprehenderemus ſenſu, nec per reflexionem adverteremus fieri poſſe, ut ea adeſſet, ſed ob exiguum intervallum ſenſus noſtros effugeret: præterea cum per tot menſes nullam per alios ſenſus ideam hauſerimus, plurimas autem perpetuo unus nobis tactus ſuggeſſerit; hinc factum eſſe, ut ex animum ideæ præoccuparint, & eas ad propriatates abſolutas pertinere, earum objecta baſim eſſe omnium reliquarum proprietatum cenſuerimus, quarum ideæ tanto intervallo poſt, nobis nimirum in lucem jam editis, adventarint. Si in primo noſtræ vitæ exordio per oculos tantummodo ideas hauſiſſemus, omnino cenſeo futurum fuiſſe, ut colores nobis maxime ad eſſentiam corporis pertinere viderentur, eos pro abſolutis proprietatibus haberemus, & ut nunc reliquas proprietates ad magnitudinem, figuram, motum reducimus, eaſdem ad colores potius reduceremus, inveſtigantes relationem, quam habent ad colorum ideas, & ea relatione inventa, tanquam natura ipſa detecta triumphantes.

13 Nec vero ex eo, quod omnes corporum proprietates relativæ hoc pacto ſint, illud conſequitur, corpus revera non habere eam determinatam magnitudinem, eam figuram, eum motum. Nam quod ea revera habeat, nihil a-

aliud

liud ſignificat , niſi quod in ſe tale ſit, ut illas in nobis ideas excitet, quas experimur.

14 Hæc quidem de materia, & corpore, de quorum exiſtentia dubitare non poſſumus, interna illa nimirum Naturæ voce admoniti, & coacti, abreptique, quam fallacem eſſe, nec debemus credere, nec vero poſſumus. Quod autem ad mentem, & animum pertinet, cujus ſibi ipſi præſentis intimiorem quandam habemus veluti intuitionem, eam dicemus eſſe ſubſtantiam cognoſcendi, volendique vi præditam. Eam plurimum diſtare a materia cognoſcimus ex ipſo tanto idearum, quas in nobis excitant, diſcrimine. Et quidem materiam cogitandi, & volendi vi expertem eſſe, jure credimus ex eo, quod nullum uſquam in ea earum operationum principium vidimus. Sic nullum lapidem gravitate deſtitutum eſſe, idcirco jure credimus, quod nullum uſpiam ſibi relictum non delabi deprehendimus.

15 Illud addiiciam unum, nam quæ huc pertinent, integrum volumen requirerent, ſi forte Brutorum animæ cognoſcendi, ac volendi vi præditæ ſint, quod quædam earum operationes noſtris nimis analogæ requirere videantur, poſſe eas facile a ratione ſpiritualis ſubſtantiæ removeri, ſi definitione ipſa aſſumamus, ſpiritualem ſubſtantiam eſſe eam, quæ vim cognoſcendi, ac volendi habeat ita, ut a materia ejuſmodi vi experte in ſuo agendi modo, & in ſua conſervatione nequaquam dependeat. Ubi enim nobis per revelata principia conſtiterit, Brutorum animas corporis diſſolutione penitus interire, animos vero noſtros ſupereſſe, & adhuc cogitare, ac velle, nihil oberit illarum corpori conjunctarum cogitandi vis, ac volendi, quominus, illa definitione ſemel admiſſa, a ratione ſpiritualis ſubſtantiæ excludantur.

§. II. Ad verſum 153.

DE MOTU MATERIÆ NECESSARIO.

16 Noſter de corporibus hic illud affirmat, *Sæpe moveri cernimus, & propriam naturam immota tueri*. Cernimus quidem ſæpe moveri, nam motus reſpectivos, de quibus Noſter agit infra, videmus plures, & motus reſpectivus ſine abſoluto cujuſpiam motu haberi non poteſt. At immota corpora nuſquam omnino cernimus. Ego quidem cenſeo, ut in nota huc pertinente affirmavi, ***nullum eſſe materiæ punctum, quod perfecte quieſcat***. Ex mea ſuperiore theoria id facile deducitur. Cum enim omnia puncta materiæ vires quaſdam mutuas habeant, quæ extendantur ad diſtantias utcumque magnas, nullum moveri punctum poteſt, quin omnium aliorum punctorum vires mutentur. Hinc arbitror quodvis materiæ punctum curvam quandam continuam deſcribere, quæ uniformis naturæ ſit, & in infinitum utraque ex parte produci poſſit, cujus arcus præcedens aliquis continuus deſcriptus ſit, conſequens deſcribi debeat ſine ulla interruptione, aut ſaltu.

17 Idem in Newtoniana gravitatis generalis theoria eandem accidit ob cauſam, idem in Leibnitiana ſententia monadum a ſe invicem pendentium, idem in ipſa Peripateticorum ſententia Tellure etiam quieſcente. Nam in hac cæleſtia corpora omnia, quæ intuemur in perpetuo ſunt motu, & cum Terræ centrum in centro gravium eſſe debeat, ad cujuſvis lapidis jactum æquilibrio nonnihil mutato tota Telluris moles commovetur.

18 Præ-

Digitized by Google

18 Præter hoc argumentum eſt etiam aliud petitum ex eo, quod ſtatus puncti cujuſvis poſſibiles pro quovis ſequenti tempore ſint infinities, infinities, infinities plures, quam permanentia in eodem loci puncto, ob numerum punctorum loci infinities, infinities infinitum. Sed id accuratius pertractabimus paulo infra, ubi fuſius aliquanto agemus de ſpatio, ac tempore. Intereа hic illud adnotabo tantummodo, numerandam non eſſe, excluſa poſſibilitate quietis puncti cujuſvis materiæ, quieſcibilitatem inter naturales materiæ ipſius proprietates.

19 Adhuc tamen ſi Naturæ Auctor Materiæ vim auferat, & id efficiat, ut quieſcat; non idcirco naturam illa ſuam exueret, quod hic Noſtro eſt ſatis.

§. III. Ad notam in verſ. 318.

DE HARMONIA PRÆSTABILITA.

20 Quid ſit Harmonia Præſtabilita Leibnitii in ea nota expoſui, in qua me ab ipſa plurimum abhorrere affirmavi. Quod me potiſſimum ab ea removet, eſt illud, quod ſi non admittatur ejuſmodi commercium animi noſtri cum corpore, ut alterius actiones ab alterius actionibus dependeant, & ab illis determinentur, nulla prorſus erit ratio, cur ego credam me ullum habere corpus, quod ſuas operationes peragat, dum meæ ideæ evolvuntur per ſeſe, adeoque cur credam, eſſe aliquid quodcumque extra me ipſum, ut alios homines, alia corpora. Si enim corporis operationes, & motus non determinant animum, & viceverſa, eaſdem prorſus ego haberem ideas, licet vel corpori conjunctus non eſſet meus animus, vel corpori conjunctus eſſet operationes habenti prorſus difformes. Porro unde ego argumentum ullum habere poſſum, quod mihi perſuadeat eſſe, aliquod corpus, quod meo conjunctum ſit animo, & operationes evolvat ipſi conformes; ſi omnia eodem modo experirer etiam in caſu, in quo nullum, vel difforme haberem corpus? Quis mihi id indicare poſſet, ſi nullum mihi indicium extrinſecus adveniat, ſed ubi loquentem audire mihi videor, debeo credere in mea mente verborum ideas excitari eodem prorſus pacto, quo excitarentur, ſi verba extra me nulla eſſent? Quin imo haberem argumentum prorſus contrarium, & validiſſimum. Nam unico caſui conjunctionis cum corpore conformes operationes evolvente, reſpondent infiniti caſus conjunctionis cum corporibus diverſas admodum operationes evolventibus, & vero etiam caſus nullius corporis adjuncti. Quare infinities mihi improbabilior eſſet ille unicus caſus, quam aliquis ex his numero infinitis.

21 Accedit, quod hæc ſententia in homines transfert difficultatem illam omnem, quæ habetur in Carteſiana ſententia, quæ affirmat, Bruta eſſe mera automata. Eſſent enim mera automata omnium hominum corpora, quæ omnes ſuas operationes exercerent per ſeſe.

§. IV. Ad verſ. 339.

DE RATIONE SUFFICIENTI.

22 Rationis ſufficientis principium, & rationes, quibus id Noſter impugnat, innui in notis in hunc locum. Debet omnino id principium, ut a Leibnitianis admittitur, diſtingui ab illo alio, quod communiter omnes admiſerunt ſemper Philoſophi: *nihil fit ſine cauſa*. Quidquid inter creatas exiſtit res, [illegible] habere

bere in ipſo ſuo exortu cauſam, quæ ejus exiſtentiam determinat, quæ quidem erit ratio phyſica, cur potius ſit, quam non ſit. Et quidem ubicumque rebus, quæ a cauſis neceſſariis oriuntur, principium rationis ſufficientis rite applicatur, ubique ad illud alterum, *nihil exiſtit ſine ſua cauſa*, reduci poteſt.

23 Leibnitiani idem principium etiam iis applicant, quorum exiſtentia a libertate pendet, vel humana, vel etiam divina ita, ut quotieſcumque libertas ſe determinat ad aliquid, debeat haberi ratio, propter quam ſe potius ad id eligendum determinaverit, quam ad non eligendum. Hinc ex eorum principiis fieri omnino non poteſt, ut iiſdem rationibus liberæ menti objectis, aliud eligatur, quam id, quod eligitur, nimirum quod ratio, quæ apparet prævalens, ſuadet. Libertatem autem ſalvam eſſe contendunt idcirco, quod voluntas ipſa ſe determinet per ſeſe ob eam rationem, non ab alio cogatur invita.

24 Hoc quidem pacto haberi libertatem a coactione patet, non autem libertatem a neceſſitate, vel indifferentiæ. Nam voluntati liberum non eſt idipſum, ut hæ potius, quam illæ rationes ipſi offerantur, nec oblatis iis rationibus fieri poteſt, ut aliud eligat, quam id, pro quo ſtat ratio, quæ apparet prævalens. Id autem in creatis voluntatibus abſurdum omnino eſt. Quo enim pacto aut laudandus, aut culpandus quis erit, quod id elegerit, quod poſitis rationibus ſibi oblatis, poſita ſui animi conſtitutione, a ſuo arbitrio non pendentibus, non eligere omnino non potuit?

25 In Deo itidem abſurdum eſt, cui ſumma illa perfectio, quæ in plena arbitrii libertate eſt ſita, prorſus adimitur. Et quidem fatentur Leibnitiani ipſi, Deum ex principio rationis ſufficientis determinari ad optimum, cum ex infinita bonitate debeat illud eligere, ac cæteris anteferre. Hinc ipſi putant, hunc Mundum, hanc ipſam rerum ſeriem, hunc ordinem omnium poſſibilium optima eſſe, & idcirco a Deo ſelecta. Eſſe quidem in iis & aliqua mala, ſed ea cum aliis bonis connexa eſſe, & in quovis poſſibili Mundo, eſſe itidem mixta ſemper bonis mala. In hoc autem, quem Deus elegit, ſummam omnium malorum cum omnibus bonis conjunctam, minimum mali, boni plurimum continere, vel minimam continere rationem mali ad bonum.

26 Quamobrem ad ea, quæ Noſter ipſis hic objicit, cur Deus alio loco Mundum non condiderit, aut alio tempore, ut, ubi nunc eſt Syrius, vel Cynoſura, eſſet Sol, manente eodem omnium reliquorum tantundem in eandem plagam promotorum ordine, & ut tum, cum Mundus eſt conditus, jam ea acciderent, quæ poſt multos annos acciderunt, reliquis omnibus æque retractis, & ordine ſucceſſivorum manente eodem, & cur non multo perfectiora condiderit iis, quæ condidit, reſpondent generaliter, nihil aliud potuiſſe ipſum condere, quam id quod condidit, nec alia ratione, quam ea, qua condidit. Alios mundos, alias rerum ſeries, alium ordinem, locum, ac tempus, eſſe impoſſibilia, non quidem impoſſibilitate, quam dicunt contradictionis, quod nimirum in ſe non repugnent, non opponantur principio contradictionis, *quodlibet eſt, vel non eſt: non poteſt idem ſimul eſſe, & non eſſe*, ſed impoſſibilitate morali, quod rationi ſufficienti voluntatem moventi opponantur. Quod autem ad tempus, & locum pertinet, dicunt, tempus ipſum, ac locum nihil aliud eſſe, niſi ipſum ordinem, quo ſucceſſiva, vel coexiſtentia exiſtunt, quæ proinde mutari non poſſint, niſi ipſo mutato ordine: fieri idcirco non poſſe, ut totus Mundus cum hoc ipſo ordine retrahatur per annos plures, vel promoveatur per intervallum Solis a Syrio

rio; ſed ordine hoc manente, conſtitui Mundi initium eo tempore, quo nunc eſt, & Solem eo loco, quo nunc eſt. Quamquam aliqui eodem principio uſi eo etiam delabuntur, ut dicant, & æternum, & infinitum eſſe Mundum, ut non ſit, quo vel in tempore, vel in loco retrahi poſſit, ac promoveri.

27 At in primis id ipſum de Divina ſumma perfectione plurimum omnino detrahit, quod omne ipſi arbitrium adimitur. Deinde quæcumque exiſtunt non tam ipſi Deo, quam ſibi ipſis, & ſuæ naturæ debebunt, quod exiſtant. Nam poſita hac eorum natura, & cæterarum creatarum rerum conſtitutione, fieri non potuit, ut ipſa Deus præ aliis creanda non elegerit. Accedit, quod admodum facile delaberemur ad ipſum Naturæ Auctorem ſupremum, & Moderatorem penitus ſummovendum. Scluſo enim omni ejus arbitrio, quam pronum eſt, ut ea, in quorum natura admittitur ratio ipſum Deum neceſſario determinans ad ea creanda, dicantur neceſſario omnino exiſtere, & ſuam per ſe exiſtentiam determinare? Ego quidem adeo proximos video utriuſque ſententiæ fines, ut maxime verear, ne qui ad eam immanis veluti barathri oram præcipiti rationis curſu devenerit, conſiſtere, & mentem cohibere omnino non poſſit, ne ruat. Ac miror ſane eos, qui principium fovent adeo periculoſum, a quo libertati, & humanæ, & Divinæ, ac Divinæ ipſi exiſtentiæ tam facilis pernicies imminet, ejuſmodi conſectaria vel non videre, vel non metuere.

28 Accedit, quod quæcumque non exiſtunt, impoſſibilia omnino eſſent etiam impoſſibilitate contradictionis. Nam impoſſibilitate contradictionis impoſſibile eſt, rationes illas, quæ fuerunt, non fuiſſe: Deum non vidiſſe rationes omnes, quæ eſſent: viſis rationibus non egiſſe id, quod rationes illæ optimum eſſe indicarent, reliquis omiſſis: Quare ſi illa reliqua exiſterent, exiſterent ſimul, ut ponitur, & non exiſterent, quia nec per ſe exiſtere, nec a Deo ad alia perfectiora ſeligenda determinato, creari potuiſſent. Quæ iſta eſt poſſibilitas rerum reliquarum, quarum exiſtentia haberi non poteſt, niſi Deo ea ſeligente, qui ea ſeligere, poſita ſapientia ſua, & bonitate, nequaquam potuerit? Ubi vera aliqua, & non tantummodo ficta quædam rerum exiſtentium contingentia, non exiſtentium poſſibilitas? Admiſſa autem vera rerum omnium exiſtentium neceſſitate, non exiſtentium impoſſibilitate, quanto gravius iterum creationis, & Creatoris amovendi periculum!

29 At imperfectiora perfectioribus anteferre Divinæ Sapientiæ repugnat, nec id præſtare poſſe, perfectio quædam eſt, ſed imperfectio. Huic argumento, quod maximam præſeferre videtur vim, haud difficulter reſponderi poſſe cenſeo. In primis quidquid eſt in ſe determinatum in rerum naturis, unico, infinito, & perfectiſſimo Conditore dempto, finitum eſſe arbitror, & ita finitum, ut alia, atque alia finita itidem, ſed ſe perfectiora, ac majora habeat ſine ullo fine. Id numeris contingere omnibus, omnes norunt, cum quivis numerus finitus ſit, ac alios itidem finitos numeros ſe majores habeat, & facile ſane refelluntur, qui numerum in ſe determinatum, & abſolute infinitum admittunt. Idem in extenſione ego quidem demonſtravi pluribus in locis, ac in primis in diſſertationibus de Natura, & Uſu infinitorum, & infinite parvorum, de Lege Continuitatis, ac de Transformatione locorum geometricorum, quæ poſtrema ſectionum Conicarum tomo ſuperiore anno inſerta eſt, ut adeo quicumque exiſtat numerus, quæcumque extenſio, finita ſint, & alia ſe majora non exiſtentia relinquant, quæ ſi exiſterent ſingula, finita itidem eſſent, ac aliis majoribus adhuc poſſibilibus

locum relinquerent, ut adeo in exiſtentibus numero, & longitudine ſit ſemper finis, & terminus, in poſſibilibus limes ſit nullus. Idem autem, & ad perfectiones omnes creatas, quæ nec numero, nec extenſione definiuntur, omnino extendendum eſſe cenſeo. Hine autem fieri non poteſt, ut Deus quidquam creet numero, magnitudine, perfectione non finitum, quo majus aliquid adhuc creare non poſſit. Et eo ſpectat, quod Noſter addit. *Tantis faciundis ſumma poteſtas rebus an exhauſta eſt, majus, meliuſque nec ultra eſt?* Divinæ Omnipotentiæ, cujus, quo maxime poſſumus ampliorem, ideam habere debemus, omnino repugnat is ſtatus, in quo exhauſta ſit, in quo quidem ſtatu eſſet, ſi quidquid perfectionis creare poteſt, creaſſet, nec quo ultra progredi poſſet, haberet.

30 Igitur fieri non poteſt, ut optimum eligat, cum optimum ſit nullum, & quocumque electo, meliora ſemper eſſe poſſint alia, atque alia ſine ullo fine. Quæ ſi eſt rerum creatarum natura, ut in iis nullum ſit optimum; nihil Divinæ Bonitati obeſt, quod minus perfecta elegerit perfectioribus omiſſis, cum id præſtiterit, quod non præſtare omnino non potuit.

31 Verum difficultas magis etiam minuetur, ſi diſtinguamus id, quod eſt eſſe aliquid alio melius, & perfectius, ab eo, quod eſt eſſe melius, ac perfectius creare illud primum, quam hoc ſecundum. Divinæ bonitati repugnat id non agere, quod agere perfectius eſt. Sed ajo, æque perfectum eſſe, creare perfectiora, ac creare minus perfecta. Tota illa naturalis perfectio, & bonitas, quæ in rebus creatis habetur, Divinæ perfectioni comparata non modo tenuiſſima eſt, ſed purum nihil. Hinc apud Deum in ea bonitate nullum habetur poſitivum meritum, ut e nihilo ad hanc rerum univerſitatem traducatur. Quare nec ea condere, nec ea non condere melius erit, ſed æque bonum, & gratuitum omnino eſſe debet, quod condantur potius, quam non condantur. Solum illud liberrimum Divinæ libertatis exercitium eſt infinities magis perfectum, quam quivis, qui in creata re exceſſus perfectionis ſupra aliam rem haberi poſſit.

32 Et hæc quidem, quod ad optimi electionem pertinet. Nam quod pertinet ad locum, & tempus, illud mihi ſane perſuadere non poſſum, totum hunc ordinem promoveri non poſſe, vel retrahi ita, ut ordine ipſo illæſo, alium occupet locum, & aliud tempus. Si nunc Sol collocetur, ubi eſt Syrius, quod quidem fieri poteſt, manentibus reliquis, tum Syrius tantundem promoveatur in eadem directione, tum alia, poſt alia corpora omnia tantundem; in ſingulis tranſlationibus omnino & in ſingulis corporibus mutatio ſit, & in ordine. Tranſlatis omnibus, redit ordo ille prior, & ut locum priorem rediiſſe arbitrer, mutationum ſumma reſpectu loci, quæ perpetuo creverat, evaneſcente, in animum inducere non poſſum; ac idcirco etiam ſpatium, & locum a puro ordine diſtinguendum eſſe omnino cenſeo, quod idem & de tempore ſentio, ſed de iis infra. Cum autem poſſit alio loco, vel tempore conditus eſſe Mundus, qui nec æternus eſſe potuit, nec infinitus, vim habet ſummam contra Leibnitianos argumentum a Noſtro propoſitum, cum nulla excogitari poſſe videatur ratio, cur hic potius creatus ſit, quam alibi, & hoc potius, quam alio tempore.

33 Eodem pacto ſine ulla etiam ratione, quam nos excogitare poſſimus, ex omnino ſimilibus potuit Deus ſeligere potius aliqua, quam alia, & ex iis, quæ ſelegit alia alibi collocare, ut ex prorſus ſimilibus materiæ punctis, aliud in Sole, aliud in Syrio, quorum ſimillum bina etiam haberi in Mundo nequaquam poſſe Leibnitiani affirmant, quia diſcerni a ſe invicem non poſſent, nec haberi

poſſet

poſſet ratio ſufficiens, cur primum ſecundi loco collocatum non eſſet, & viceverſa. Diſcernere poterit Deus ipſa etiam prorſus ſimilia, ſi illam intimam cujuſque naturam, quam individuationem dicimus, videat, per quam hoc non eſt illud. Eam autem ipſam ſine ulla diſſimilitudine Divinæ Sapientiæ oculos effugere, quis affirmet? Porro ratio, cur hæc potius hic, quam alibi collocata ſit, phyſica erit ſemper aliqua, nimirum ipſa actio Divina, qua collocatur. Moralis nulla erit *cur potius*, ſed libertas, & ipſa voluntas Divina ſtabit pro ratione. Sic etiam, ubi nos aliquid eligimus, electionis phyſica ratio erit ipſa voluntas noſtra volitionem producens, moralis erit ſemper aliqua, cum voluntas in incognitum non feratur, nec ſine motivo operetur, ſed non erit ratio, cur potius eligat, quam non eligat, verum motivis omnibus, ſive moralibus rationibus conſideratis, ſupererit facultas eo ſe inclinandi, ubi etiam minus ponderis rationes habent, ut accuratiſſime verum ſit illud: *video meliora* (& eodem etiam pacto, jucundiora, utiliora) *proboque*; *deteriora ſequor*.

34 Quod ſi pro ratione ſufficiente admittatur etiam liberum arbitrium; id quidem totam Leibnitiani principii vim evertet, & ipſius Leibnitii Philoſophiam confundet; at principium eo modo correctum admitti poterit, ut verum, ſed adhuc erit inutile, quod Noſter ſecundo loco propoſuit. Verum erit; ſemper enim erit ratio, cur aliquid ſit potius, quam non ſit, nimirum vel ipſa rei natura, ut in Deo neceſſario exiſtente, vel cauſæ neceſſariæ actio, vel liberæ arbitraria determinatio. Sed cum nos omnes cauſas, quæ eſſe poſſint, omnino ignoremus; ſolum id negativum principium prodeſſe non poterit. Nam nunquam nobis conſtabit, nullam eſſe rationem, cur hoc potius ſit, quam non ſit, niſi omnes penitus cauſarum neceſſariarum nexus cum eo effectu, & omnes liberarum voluntatum determinationes noverimus. Plerumque videbimur eo uti negativo principio, & tamen potius poſitivo principio utemur, cauſæ cum effectu connexæ, conjuncto cum ſuppoſitione nullius alterius cauſæ ipſum effectum turbantis.

35 Solet afferri pro exemplo uſus ejus principii Archimedea demonſtratio æquilibrii, quod nimirum neutra pars alteri parti debeat cedere deſcendendo, ubi gravitatis vires utrobique æquales ſint. At ibi ex una parte ſupponitur in corporibus vis inertiæ poſitiva, quæ ſtatum conſervet: ſupponuntur bina pondera æqualia, quorum alterum alterius vim elidat, & ſupponitur, nihil aliud in ipſa corpora æquilibrata agere. Hinc ſupponitur poſitiva cauſa quietis, & excluditur per ſuppoſitionem omnis alia cauſa; unde conſequitur quies, poſitivus poſitivæ cauſæ effectus. At ubi independenter ab omni ſuppoſitione id ipſum principium Archimedes adhibuit pro ſphærica Terræ forma, erravit ſane ob id ipſum, quod vim centrifugam motus diurni, gravitatem non ad certum punctum directam, ſed ad omnes Terræ particulas, inæqualem Lunæ, ac Solis actionem in ipſas Tarræ particulas ignoraret, ex quarum prioribus cauſis figuram Terræ ad polos compreſſam hodie repetimus, ex poſtrema mutationem continuam figuræ in mari, unde ipſius maris æſtus pendet, ut in ſequentibus libris apparebit. Quid igitur nobis objiciunt utilem ejus principii uſum apud Archimedem, cum id ipſum principium Archimedem cauſas ignoratas habentem pro nullis in errorem induxerit?

§. V. Ad verſ. 523.

DE NUMERO SUBSTANTIARUM SUPRA, ET INFRA NOS.

36 In nota ad verſum 513 propoſui illud, agere hic Noſtrum de quadam veluti continuitate mentium, & vero etiam ſubſtantiarum in genere infra, & ſupra nos, quam Lockius proponit *lib. 3. cap. 6.* §. 12. Et quidem ipſe Lockius cenſet innumeras eſſe, & ſupra nos, & infra. Suſpicatur autem in immenſum plures exiſtere ſupra, quam infra, quia nimirum inter nos, & Dei perfectiſſimæ ſubſtantiæ infinitum veluti terminum infinities majus ſit intervallum, quam inter nos, & nihilum, adeoque infinities plures ſint poſſibiles ſubſtantiæ ſupra nos, quam infra.

37 Ego quidem in primis illud notandum cenſeo, eam ſeriem in iis, quæ exiſtunt, non eſſe accurate continuam, licet in poſſibilibus ut accurate continua concipi poſſit. Quæ enim exiſtunt, cenſeo, ut ſupra innui, finita numero eſſe omnia, & finitæ eſſe magnitudinis, ac perfectionis creata ſingula. Quare ſeries terminis numero finitis, & intervallis quibuſdam inter binos quoſvis terminos interiectis conſtare debet, quæ intervalla exigua eſſe poſſunt reſpectu ipſorum terminorum, ſed intervalla illa minui poterunt aliis ſubſtantiis interiectis, quæ ad utrumlibet extremum accedant quantumlibet. Sic in cono, qui concipiatur infinitus, quo alibi ad has ipſas ſeries Lockius utitur, ſectiones fieri poſſunt quotlibuerit parallelæ, quæ cum factæ fuerint, erunt ſemper numero finitæ, & certis intervallis a ſe invicem diſtabunt, ſed aliæ, atque aliæ ad eas utcumque magis accedentes poterunt interſeri ſine ullo fine.

38 Deinde illud, mihi quidem perſuaſum eſſe, nos ex ſola contemplatione naturæ penitus ignorare, quem in ordine exiſtentium teneamus locum, an plures ſint infra nos, an pauciores, ac illud etiam ipſum, an ullum ſit ſubſtantiæ ſpiritualis genus infra nos, an ullum corporeæ ſupra nos. Liberum enim Auctori Naturæ fuit ea condere, quæ libuit, & ea omittere, quæ libuit. Si eſt aliqua infima, & aliqua ſumma ſpiritualis ſubſtantia, ut ex iis, quæ diximus, eſſe debet, ea Lockiano argumento uti poſſet æque, ac ipſe Lockius, & tamen erraret omnino. Imo erraret quævis ex iis, quæ plures infra ſe habet, quam ſupra. Unde igitur nobis conſtabit, nos in ea ratiocinatione non errare? Ab iis, quæ fieri poſſunt, ad ea, quæ facta ſunt, nullum eſt argumentum, cum id ipſum, quod fiant, ab unico pendeat Conditoris arbitrio. Cum in ſerie exiſtentium habere poſſimus locum quemcumque, æqualis eſt prorſus probabilitas pro quocunque, vel potius nulla pro quovis.

39 Accedit, quod ſi ipſa poſſibilia ſpectentur, & quæ ſupra nos ſunt uſque ad Deum, & quæ infra nos uſque ad nihilum, difficile omnino eſt definire, an ex altera parte ſint plura, an pauciora. Si finitam lineam accipiamus, ut palmi unius, videntur inter ipſam, & infinitum eſſe infinities plures longitudines, quam inter ipſam, & nihilum. Sed quoniam quavis majore linea aſſignata, inveniri ſemper poteſt linea minor, quæ ſit ad finitam illam, ut illa ad illam majorem; videntur totidem eſſe minores, quot majores. Ideirco in linea logiſtica, in qua ordinatæ æquidiſtantes procedunt in progreſſione geometrica, axis utrinque

a qua-

a quavis finita ordinata æquè in infinitum protenditur, & proinde æqualis eſt majorum, ac minorum ordinatarum numerus.

40 Præterea ſi accipiamus numerum quemvis; infiniti ſunt numeri ipſo majores, qui fiunt unitate ſemper adjecta. Unitate ſemper adempta, habentur infra ipſum minores aliquot poſitivi, tum totidem negativi, tum tot alii negativi, quot fuerant poſitivi ſupra. Quid ſi creatæ ſubſtantiæ, in quibus perfectio imperfectionem ſuperat, conſiderentur, ut poſitivæ; eæ, in quibus imperfectio perfectionem, ut negativæ? Tum æque multæ erunt ſupra, ac infra in iis, quæ perfectionem æqualem imperfectioni habent, in reliquis plures infra, quam ſupra; vel viceverſa: uſque adeo ea comparatio incerta eſt.

§. VI. Ad verſ. 625.

DE SPATIO, AC TEMPORE.

41 In nota in hunc locum innui præcipuas aliorum ſententias de ſpatio, ac tempore, & meam hic expoſiturum promiſi. Ego, ut expoſui hujus ſupplementi num. 9. materiæ extenſionem prorſus continuam non admitto, ſed eam conſtituo punctis prorſus indiviſibilibus, & inextenſis, a ſe invicem disjunctis aliquo intervallo, & connexis per vires quaſdam jam attractivas, jam repulſivas pendentes a mutuis ipſorum diſtantiis. Videndum hic, quid mihi ſit in hac ſententia ſpatium, ac tempus, quomodo utrumque dici poſſit continuum, diviſibile in infinitum, æternum, immenſum, immobile, neceſſarium, licet neutrum, ut in ipſa nota oſtendi, ſuam habeat naturam realem ejuſmodi proprietatibus præditam.

42 In primis illud mihi videtur evidens, tam eos, qui ſpatium admittunt abſolutum, natura ſua reali, continuum, æternum, immenſum, tam eos, qui eum Leibnitianis, & Carteſianis ponunt ſpatium ipſum in ordine, quem habent inter ſe res, quæ exiſtunt; præter ipſas res, quæ exiſtunt, debere admittere, modum aliquem non pure imaginarium, ſed realem exiſtendi, per quem ibi ſint, ubi ſunt, & qui exiſtat tum, cum ibi ſunt, pereat, cum ibi eſſe deſierint, ubi erant. Nam admiſſo etiam in prima ſententia ſpatio illo, ſi hoc, quod eſt, eſſe rem aliquam in ea parte ſpatii, haberetur tantummodo per rem, & ſpatium, quotieſcumque exiſteret res, & ſpatium, haberetur hoc quod eſt, rem illam in ea ſpatii parte collocari. Rurſus ſi in poſteriore ſententia ordo ille, qui locum conſtituit, haberetur per ipſas tantummodo res, quæ ordinem illum habent, quotieſcumque res illæ exiſterent, eodem ſemper exiſterent ordine illo, nec proinde unquam locum mutarent. Atque id, quod de loco dixi, dicendum pariter de tempore.

43 Neceſſario igitur admittendus eſt realis aliquis exiſtendi modus, per quem res eſt ibi, ubi eſt, & tum, cum eſt. Sive is modus dicatur res, ſive modus rei, ſive aliquid, ſive nonnihil; is extra noſtram imaginationem eſſe debet, & res ipſum mutare poteſt, habens jam alium ejuſmodi exiſtendi modum, jam alium.

44 Ego igitur pro ſingulis materiæ punctis, ut de his loquar, e quibus ad res etiam immateriales eadem omnia facile transferri poſſunt, admitto bina realia modorum exiſtendi genera, quorum alii ad locum pertineant, alii ad tempus, & illi locales, hi dicantur temporarii. Quodlibet punctum habet modum realem

lem exiſtendi, per quem eſt ibi, ubi eſt, & alium, per quem eſt tum, cum eſt. Hi reales exiſtendi modi ſunt mihi reale tempus, & ſpatium, horum poſſibilitas a nobis indefinite cognita eſt mihi ſpatium vacuum, & tempus itidem ut ita dicam vacuum, ſive etiam ſpatium imaginarium, & tempus imaginarium.

45 Modi illi reales ſinguli & oriuntur, ac pereunt, & indiviſibiles prorſus mihi ſunt, ac inextenſi, & immobiles, ac in ſuo ordine immutabiles. Ii & ſua ipſorum loca ſunt realia, ac tempora, & punctorum, ad quæ pertinent. Fundamentum præbent realis relationis diſtantiæ, ſive localis inter duo puncta, ſive temporariæ inter duo eventa. Nec aliud eſt in ſe, quod illam determinatam diſtantiam habeant illa duo materiæ puncta, quam quod illos determinatos habeant exiſtendi modos, quos neceſſario mutent, ubi eam mutent diſtantiam. Eos modos, qui in ordine ad locum ſunt, dico puncta loci realia, qui in ordine ad tempus, momenta, quæ partibus carent ſingula, ac omni illa quidem extenſione, hæc duratione, utraque diviſibilitate deſtituuntur.

46 Porro punctum materiæ prorſus indiviſibile, & inextenſum, alteri puncto materiæ contiguum eſſe non poteſt, ſed, ſi nullam habent diſtantiam, prorſus coeunt, ſi non coeunt penitus, diſtantiam aliquam habent. Neque enim, cum nullum habeant partium genus, poſſunt ex parte coire tantummodo, & ex parte altera ſe contingere, ex altera mutuo averſari. Præjudicium eſt quoddam ab infantia, & ideis ortum per ſenſus acquiſitis, ac debita reflexione deſtitutis, qui nimirum nobis maſſas ſemper ex partibus a ſe invicem diſtantibus compoſitas exhibuerunt, cum videmur nobis puncta etiam indiviſibilia, & inextenſa poſſe punctis adjungere ita, ut ſe contingant, & oblongam quandam ſeriem conſtituant. Globulos nobis confingimus, nec abſtrahimus animum ab extenſione illa, & partibus, quas voce, & ore ſecludimus.

47 Porro ubi bina materiæ puncta a ſe invicem diſtant, ſemper aliud materiæ punctum poteſt collocari in directum ultra utrumque ad eandem diſtantiam, & alterum ultra hoc, & ita porro, ut patet, ſine ullo fine. Poteſt itidem inter utrumque collocari in medio aliud punctum, quod neutrum continget. Si enim alterum contingeret, utrumque contingeret, adeoque cum utroque congrueret, & illa etiam congruerent, non diſtarent, contra hypotheſim. Dividi igitur poterit illud intervallum in partes duas, ac eodem argumento illa itidem duo in alias quatuor, & ita porro ſine ullo fine. Quamobrem, utcumque ingens fuerit binorum punctorum intervallum, ſemper aliud haberi poterit majus, utcumque id fuerit parvum, ſemper aliud haberi poterit minus, ſine ullo limite, & fine.

48 Hinc ultra, & inter bina loci puncta realia quæcumque alia loci puncta realia poſſibilia ſunt, quæ ab iis recedant, vel ad ipſa accedant ſine ullo limite determinato, & diviſibilitas realis intervalli inter duo puncta in infinitum eſt, ut ita dicam, interſeribilitas punctorum realium ſine ullo fine. Quotieſcumque illa puncta loci realia interpoſita fuerint, interpoſitis punctis materiæ realibus, finitus erit eorum numerus, finitus intervallorum numerus illo priore interceptorum, & ipſi ſimul æqualium; at numerus ejuſmodi partium poſſibilium finem habebit nullum. Illorum ſingulorum magnitudo certa erit, ac finita; horum magnitudo minuetur ultra quoſcumque limites, ſine ullo determinato hiatu, qui adjectis novis intermediis punctis imminui adhuc non poſſit, licet nec poſſit actuali diviſione, ſive interpoſitione exhauriri.

49 Hinc

49 Hinc vero dum concipimus poſſibilia hæc loci puncta, ſpatii infinitatem, & continuitatem habemus, cum diviſibilitate in infinitum. In exiſtentibus limes eſt ſemper certus, certus punctorum numerus, certus intervallorum. In poſſibilibus nullus eſt finis. Poſſibilium abſtracta cognitio excludens limitem a poſſibili augmento intervalli, & diminutione, ac hiatu infinitatem lineæ imaginariæ, & continuitatem conſtituit, quæ partes actu exiſtentes non habet, ſed tantummodo poſſibiles. Cumque ea poſſibilitas & æterna ſit, & neceſſaria, ab æterno enim, & neceſſario verum fuit, poſſe illa puncta cum illis modis exiſtere; ſpatium hujuſmodi imaginarium continuum, infinitum, ſimul etiam æternum fuit, & neceſſarium, ſed non eſt aliquid exiſtens, ſed aliquid tantummodo potens exiſtere, & a nobis indefinitè conceptum: immobilitas autem ipſius ſpatii a ſingulorum punctorum immobilitate oritur.

50 Atque hæc omnia, quæ hucuſque de loci punctis ſunt dicta, ad temporis momenta eodem modo admodum facile transferuntur, inter quæ ingens quædam habetur analogia. Nam & punctum a puncto, & momentum a momento quovis determinato certam diſtantiam habet, niſi coeunt, qua major, & minor haberi alia poteſt ſine ullo limite. In quovis intervallo ſpatii imaginarii, ac temporis adeſt primum punctum, vel momentum, & ultimum, ſecundum vero, & penultimum habetur nullum, quovis enim aſſumpto pro ſecundo, vel penultimo, cum non coeat cum primo, vel ultimo, debet ab eo diſtare, & in eo intervallo alia iidem poſſibilia puncta vel momenta interjacent. Nec punctum continuæ lineæ, nec momentum continui temporis, pars eſt, ſed limes, & terminus. Linea continua, & tempus continuum generari intelligentur non repetitione puncti, vel momenti, ſed ductu continuo, in quo intervalla alia aliorum ſint partes, non ipſa puncta, vel momenta, quæ continuo ducuntur. Illud unicum erit diſcrimen, quod hic ductus in ſpatio fieri poterit, non in unica directione tantum per lineam, ſed in infinitis per planum, quod concipietur ductu continuo in latus lineæ jam conceptæ, & iterum in infinitis per ſolidum, quod concipietur ductu continuo plani jam concepti, in tempore autem unicus ductus durationis habebitur, quod idcirco ſoli lineæ erit analogum, & dum ſpatii imaginarii extenſio habetur triplex in longum, latum, & profundum, temporis habetur unica in longum, vel diuturnum tantummodo. In triplici tamen ſpatii, & unico temporis genere, punctum, ac momentum erit principium quoddam, a quo ductu illo ſuo hæc ipſa generata intelligentur.

51 Illud jam hic diligenter notandum: non ſolum ubi duo puncta materiæ exiſtunt, & aliquam diſtantiam habent, exiſtere duos modos, qui relationis illius diſtantiæ fundamentum præbeant, & ſine bina diverſa puncta loci realia, quorum poſſibilitas a nobis concepta exhibeat bina puncta ſpatii imaginarii, adeoque infinitis numero poſſibilibus materiæ punctis reſpondere infinitos numero poſſibiles exiſtendi modos; ſed cuivis puncto materiæ reſpondere itidem infinitos poſſibiles exiſtendi modos, qui ſint omnia ipſius puncti poſſibilia loca. Hæc omnia ſatis ſunt ad totum ſpatium imaginarium habendum, & quodvis materiæ punctum ſuum habet ſpatium imaginarium immobile, infinitum, continuum, quæ tamen omnia ſpatia pertinentia ad omnia puncta ſibi invicem congruunt, & habentur pro unico. Nam ſi aſſumatur unum punctum reale loci ad unum materiæ punctum pertinens, & conferatur cum omnibus punctis realibus loci pertinentibus ad aliud punctum materiæ; eſt unum inter hæc poſteriora.

quod

quod ſi cum illo priore coexiſtat, relationem inducet diſtantiæ nullius, quam compenetrationem appellamus. Unde patet punctorum, quæ exiſtunt, diſtantiam nullam non eſſe nihil, ſed relationem inductam a binis quibuſdam exiſtendi modis. Reliquorum quivis cum illo eodem priore induceret relationem aliam, quam dicimus cujuſdam determinatæ diſtantiæ, & poſitionis. Porro illa loci puncta, quæ nullius diſtantiæ relationem inducunt, pro eodem accipimus, & quemvis ex infinitis hujuſmodi punctis ad infinita puncta materiæ pertinentibus pro eodem accipimus, ac ejuſdem loci nomine intelligimus. Ea autem haberi debere pro quovis punctorum binario, ſic patet. Si tertium punctum ubicumque collocetur, habebit aliquam diſtantiam, & poſitionem reſpectu primi. Summoto primo, poterit ſecundum collocari ita, ut habeat eandem illam diſtantiam, & poſitionem, reſpectu tertii, quam habebat primum. Igitur modus hic, quo exiſtit, pro eodem habetur, ac modus, quo exiſtebat illud primum, & ſi hi bini modi ſimul exiſterent, nullius diſtantiæ relationem inducerent inter primum, ac ſecundum; Et hæc pariter, quæ hic de ſpatii punctis dicta ſunt, æque temporis momentis conveniunt.

52 An autem poſſint ſimul exiſtere, id vero pertinet ad relationem, quam habent puncta loci cum momentis temporis, ſive ſpectetur unicum materiæ punctum, ſive plura. In primis plura momenta ejuſdem puncti materiæ coexiſtere non poſſunt, ſed alia neceſſario poſt alia, ſic itidem bina puncta localia ejuſdem puncti materiæ conjungi non poſſunt, ſed alia jacere debent extra alia, atque id ipſum ex eorum natura, &, ut ajunt, eſſentia.

53 Deinde conſiderentur conjunctiones variæ punctorum loci, & momentorum. Quodvis punctum materiæ, ſi exiſtit, conjungit aliquod punctum ſpatii cum aliquo momento temporis. Nam neceſſario alicubi exiſtit, & aliquando exiſtit; ac ſi ſolum etiam exiſtat, ſemper ſuum habet, & localem, & temporarium exiſtendi modum, per quod ſi aliud quodpiam exiſtat, quod ſuos itidem habebit modos, diſtantiæ & localis, & temporariæ relationem ad ipſum acquiret. Id ſaltem omnino accidet, ſi omnium, quæ exiſtunt, vel exiſtere poſſunt, commune eſt ſpatium, ut puncta localia unius, punctis localibus alterius perfecte congruant, ſingula ſingulis. Quid enim, ſi alia ſint rerum genera, vel a noſtris diſſimilium, vel noſtris etiam prorſus ſimilium, quæ aliud, ut ita dicam infinitum ſpatium habeant, quod a noſtro itidem infinito non per intervallum quoddam finitum, vel infinitum diſtet, ſed ita alienum ſit, ita, ut ita dicam, alibi poſitum, ut nullum cum hoc noſtro commercium habeat, nullam relationem diſtantiæ inducat. Atque id ipſum de tempore etiam dici poſſet extra omne noſtrum æternum tempus collocato. At id menti, ipſum conanti concipere, vim ſummam infert, ac a cogitatione directa admitti vel nullo modo poteſt, vel ſaltem vix poteſt. Quamobrem iis rebus, vel rerum ſpatiis, & temporibus, quæ ad nos nihil pertinere poſſent, prorſus omiſſis, agamus de noſtris hiſce. Si igitur primo idem punctum materiæ conjungat idem punctum ſpatii, cum pluribus momentis temporis aliquo a ſe invicem intervallo disjunctis, habebitur regreſſus ad eundem locum; ſi ſecundo id conjungat cum ſerie continua momentorum temporis continui, habebitur quies, quæ requirit tempus aliquod continuum, cum eodem loci puncto, ſine qua conjunctione habetur continuus motus, ſuccedentibus ſibi aliis, atque aliis loci punctis, pro aliis, atque aliis momentis temporis. Si tertio idem punctum materiæ conjungat idem momentum

tem-

temporis cum pluribus punctis loci a ſe invicem diſtantibus aliquo intervallo, habebitur illa, quam dicimus replicationem. Si quarto id conjungat cum ſerie continua punctorum loci aliquo intervallo continuo contentorum, habebitur quædam, quam plures Peripatetici admiſerunt, virtualem appellantes extenſionem, qua indiviſibilis, & partibus omnino deſtituta materiæ particula ſpatium diviſibile occuparet. Sunt aliæ quatuor combinationes, ubi plura materiæ puncta conſiderentur; Nimirum quinto ſi conjungant idem momentum temporis cum pluribus punctis loci, in quo ſita eſt coexiſtentia; ſexto ſi conjungant idem punctum ſpatii cum diverſis momentis temporis, quod fieret in ſucceſſivo appulſu diverſorum punctorum materiæ ad eundem locum; ſeptimo ſi conjungant idem momentum temporis cum eodem puncto ſpatii, in quo ſita eſſet compenetratio; octavo ſi nec momentum ullum, nec punctum ſpatii commune habeant, quod haberetur, ſi nec coexiſterent, nec ea loca occuparent, quæ ab aliis occupata fuiſſent aliquando.

54 Ex hiſce octo caſibus primo reſpondet tertius, ſecundo quartus, quinto ſextus, ſeptimo octavus. Tertium caſum, nimirum replicationem, communiter cenſent naturaliter haberi non poſſe. Quartum cenſent multi habere animam rationalem, quam putant eſſe in ſpatio aliquo diviſibili, ut plures Peripatetici in toto corpore, alii Philoſophi in quadam cerebri parte, vel in aliquo nervorum ſucco ita, ut cum indiviſibilis ſit, tota ſit in toto ſpatio, & tota in quavis ſpatii parte, quemadmodum eadem indiviſibilis Divina Natura eſt tota in toto ſpatio, & tota in qualibet ſpatii parte, ubique neceſſario præſens, & omnibus creatarum rerum realibus locis coexiſtens, ac adſtans. Eundem alii caſum in materia admittunt, cujus particulas eodem pacto extendi putant, ut diximus, licet ſimplices ſint, licet partibus expertes, non modo actu ſeparatis, ſed etiam diſtinctis, ac tantummodo ſeparabilibus. Eam ſententiam amplectendam eſſe non cenſeo idcirco, quod ubicumque materiam loca diſtincta occupantem ſenſu percipimus, ſeparabilem etiam, ingenti ſaltem adhibita vi, videmus, ſejunctis partibus, quæ diſtabant; nec vero alio ullo argumento excludimus a Natura replicationem, niſi quia nullam materiæ partem, quantum ſenſu percipere poſſumus, videmus, bina ſimul occupare loca. Virtualis illa extenſio materiæ ſinities ulterius progreditur ultra ſimplicem replicationem.

55 Si ſecundus caſus quietis, & primus caſus regreſſus ad eundem locum naturaliter haberi poſſent, eſſet is quidem defectus quidam analogiæ inter ſpatium, & tempus. At mihi videor probare illud poſſe, neutrum unquam in Natura contingere, adeoque naturaliter haberi non poſſe. Id autem evinco hoc argumento. Sit punctum materiæ quodam momento in quodam ſpatii puncto, & pro quovis alio momento ignorantes, ubi ſit, quæramus, quanto probabilius ſit, ipſum alibi eſſe, quam ibidem. Tanto erit probabilius illud, quam hoc, quanto plura ſunt alia ſpatii puncta, quam illud unicum. Hæc in quavis linea ſunt infinita, infinitus in quovis plano linearum numerus, infinitus in toto ſpatio planorum numerus. Quare numerus aliorum punctorum eſt infinitus tertii generis, adeoque illa probabilitas major infinities tertii generis infinitate, ubi de quovis alio determinato momento agitur. Agatur jam indefinite de omnibus momentis temporis infiniti, decreſcet prior probabilitas in ea ratione, in qua momenta creſcunt, in quorum aliquo ſaltem poſſet ibidem eſſe punctum. Sunt autem momenta numero infinita infinitate ejuſdem generis, cujus puncta poſſibilia in linea infinita.

Igitur adhuc agendo de omnibus momentis infiniti temporis indefinite, eſt infinities infinite improbabilius, quod punctum in eodem illo priore ſit loco, quam quod ſit alibi. Conſideretur jam non unicum punctum loci determinato unico momento occupatum, ſed quodvis punctum loci, quovis indefinite momento occupatum, & adhuc probabilitas regreſſus ad aliquod ex iis creſcet, ut creſcit horum loci punctorum numerus, qui infinito etiam tempore eſt infinitus ejuſdem ordinis, cujus eſt numerus linearum, in quovis plano. Quare improbabilitas caſus, quo determinatum quodpiam materiæ punctum redeat, quovis indefinite momento temporis, ad quodvis indefinite punctum loci, in quo alio quovis fuit momento temporis indefinite ſumpto, remanet infinita primi ordinis. Eadem autem pro omnibus materiæ punctis, quæ numero finita ſunt, decreſcit in ratione finita ejus numeri ad unitatem (quod ſecus accidit in communi ſententia, in qua punctorum materiæ numerus eſt infinitus ordinis tertii). Quare adhuc remanet infinita improbabilitas regreſſus puncti materiæ cujuſvis indefinite, ad punctum loci quodvis, occupatum quovis momento præcedenti indefinite, regreſſus, inquam, habendi quovis indefinite momento ſequenti temporis, qui regreſſus idcirco ſine ullo erroris metu debet excludi, cum infinita improbabilitas in relativam quandam impoſſibilitatem migrare cenſenda ſit. Quæ quidem theoria communi ſententiæ applicari non poteſt. Quamobrem eo pacto, patet, in mea materiæ punctorum theoria e natura tolli & quietem, quam etiam ſupra excluſimus num. 16 & vero etiam regreſſum ad idem loci punctum, in quo ſemel ipſum punctum materiæ extitit. Unde fit, ut omnes illi primi 4 caſus excludantur ex Natura, & in iis accurata temporis, & ſpatii ſervetur analogia.

56 Quin imo ſi quæratur, an aliquod materiæ punctum occupare debeat quopiam momento punctum loci, quod alio momento aliquo aliud materiæ punctum occupavit, adhuc improbabilitas erit infinities infinita. Nam numerus punctorum materiæ exiſtentium eſt finitus, adeoque ſi pro regreſſu puncti cujuſvis ad puncta loci a ſe occupata adhibeatur regreſſus ad puncta occupata a quovis alio, numerus caſuum creſcit in ratione unitatis ad numerum punctorum finitum utique, nimirum in ratione finita tantummodo. Hinc improbabilitas appulſus alicujus puncti materiæ indefinite ſumpti ad punctum ſpatii aliquando ab alio quovis puncto occupati adhuc eſt infinita, & ipſe appulſus habendus pro impoſſibili; quo quidem pacto excluditur & ſextus caſus, qui in eo ipſo ſitus erat regreſſu, & multo magis ſeptimus, qui binorum punctorum materiæ ſimultaneum appulſum continet ad idem aliquod loci punctum, ſive compenetrationem. Octavus autem pro materia excluditur, cum tota ſimul creata perpetuo duret tota, adeoque ſemper idem momentum habeat commune. Solus quintus caſus, quo plura materiæ puncta idem momentum temporis cum diverſis punctis loci conjungant, non modo poſſibilis eſt, ſed etiam neceſſarius pro omnibus materiæ punctis, coexiſtentibus nimirum; fieri enim non poteſt, ut ſeptimus, & octavus excludantur, niſi continuo ob id ipſum includatur quintus ille, ut conſideranti patebit facile. Quamobrem in eo analogia deficit, quod poſſint plura materiæ puncta conjungere diverſa puncta ſpatii cum eodem momento temporis, qui eſt hic caſus quintus, non autem poſſit idem punctum ſpatii, cum pluribus momentis temporis, qui eſt caſus tertius, quem defectum neceſſario inducit excluſio ſeptimi, & octavi, quorum altero incluſo, excludi poſſet hic quintus, ut ſi poſſent materiæ puncta, quæ ſimul creata ſunt, nec pereunt, non coexiſtere, tum enim idem

Digitized by Google

idem momentum cum diverſis loci punctis nequaquam conjungeretur.

57 Ex illis 7 caſibus videntur omnino ſaltem 6 per Divinam Omnipotentiam poſſibiles, dempta nimirum virtuali illa materiæ extenſione, de qua dubium eſſe poterit, quia deberet ſimul exiſtere numerus abſolute infinitus punctorum illorum loci realium, quod impoſſibile eſt, ſi infinitum numero actu exiſtens repugnat in modis ipſis. Quoniam autem poſſunt omnia exiſtere alia poſt alia puncta loci in quavis linea conſtituta, in motu nimirum continuo, & poſſunt itidem momenta omnia temporis continui, alia itidem poſt alia in rei cujuſvis duratione; ambigi poterit, an poſſint, & omnia ſimul ipſa loci puncta, quam quæſtionem definire non auſim. Illud unum moneo, ſententiam hanc meam de ſpatii Natura & continuitate praecipuas omnes difficultates, quibus premuntur reliquæ, penitus evitare, & ad omnia, quæ huc pertinent, explicanda commodiſſimam eſſe. Tum illud addo, excluſo appulſu puncti cujuſvis materiæ ad punctum loci, ad quod punctum quodvis materiæ quovis momento appellit, & inde compenetratione, veram impenetrabilitatem materiæ neceſſario conſequi, quod in decimo nobis libro plurimum proderit. Nimirum niſi vires repulſivæ prohiberent, liberrime maſſa quævis per quamvis aliam maſſam permearet, ſine ullo periculo occurſus ullius puncti cum alio quovis, ubi haberetur apparens quædam compenetratio ſimilis penetrationi luminis per chryſtalla, olei per ligna, & marmora, ſine ulla reali compenetratione punctorum. In maſſis craſſioribus, & minori celeritate præditis vires repulſivæ motum ulteriorem plerumque impediunt ſine ullo impactu, & ſenſibilem etiam illam, ac apparentem compenetrationem excludunt; in tenuiſſimis, & celerrimis, ut in luminis radiis per homogeneas ſubſtantias vel per alios radios propagatis, evitatur per celeritatem ipſam, actionum exigua inæqualitas, ex circumjacentium punctorum inæquali diſtantia orta, ac liberrimus habetur progreſſus in omnes plagas ſine ullo occurſus periculo, quod ſummam, & unicam difficultatem propagationis luminis per ſubſtantiam emiſſam, & progredientem, penitus amovet. Sed de his jam ſatis.

§. VII. Ad verſ. 654.

DE SPATIO, ET TEMPORE, UT A NOBIS COGNOSCUNTUR.

58 Diximus in ſuperiore ſupplemento de ſpatio, ac tempore, ut ſunt in ſe ipſis; ſupereſt, ut illud attingam, quod pertinet ad ipſa, ut cognoſcuntur, de quibus hic agit Noſter. Multa in ipſis notis ſunt dicta, nonnulla maximè notatu digna addam. Nos nequaquam immediatè cognoſcimus per ſenſus illos exiſtendi modos reales, nec diſcernere poſſumus alios ab aliis. Sentimus quidem a diſcrimine idearum, quæ per ſenſus excitantur in animo, relationem determinatam diſtantiæ, & poſitionis, quæ e binis quibuſque localibus exiſtendi modis exoritur, ſed eadem idea oriri poteſt ex innumeris modorum, ſive punctorum realium loci binariis, quæ inducant relationes æqualium diſtantiarum, & ſimilium poſitionum tam inter ſe, quam ad noſtra organa, & ad reliqua circumjacentia corpora. Nam bina materiæ puncta, quæ alicubi datam habent diſtantiam, & poſitionem inductam a binis quibuſdam exiſtendi modis, alibi poſſunt per alios binos exiſtendi modos habere relationem diſtantiæ æqualis, & poſitio-

 nis

nis ſimilis, diſtantiis nimirum ipſis exiſtentibus parallelis. Si illa puncta, & nos, & omnia circumjacentia corpora mutent loca realia, ita tamen, ut omnes diſtantiæ æquales maneant, & prioribus parallelæ; nos eaſdem prorſus habebimus ideas, quin imo eaſdem ideas habebimus, ſi manentibus diſtantiarum magnitudinibus, directiones omnes in æquali angulo converterentur, adeoque æque ad ſe invicem inclinarentur, ac prius. Et ſi minuerentur etiam diſtantiæ illæ omnes, manentibus angulis, & manente illarum ratione ad ſe invicem, vires autem ex ea diſtantiarum mutatione non mutarentur, rite mutata virium ſcala illa, nimirum curva illa linea, per cujus ordinatas ipſæ vires exprimuntur, nullam nos in noſtris ideis mutationem haberemus.

59 Hinc autem conſequitur illud; ſi totus hic Mundus nobis conſpicuus motu parallelo promoveatur in plagam quamvis, & ſimul in quovis angulo convertatur, nos illum motum, & converſionem ſentire non poſſe. Sic ſi cubiculi, in quo ſumus, & camporum, ac montium tractus omnis motu aliquo Telluris communi ad ſenſum ſimul convertatur; motum ejuſmodi ſentire non poſſumus; ideæ enim eædem ad ſenſum excitantur in animo. Fieri autem poſſet, ut totus itidem Mundus nobis conſpicuus in dies contraheretur, vel produceretur, ſcala virium tantundem contracta, vel producta; quod ſi fieret, nulla in animo noſtro idearum mutatio haberetur, adeoque nullus ejuſmodi mutationis ſenſus.

60 Ubi vel objecta externa, vel noſtra organa mutant illos ſuos exiſtendi modos ita, ut prior illa æqualitas, vel ſimilitudo non maneat, tum vero mutantur ideæ, & mutationis habetur ſenſus, ſed ideæ eædem omnino ſunt, ſive objecta externa mutationem ſubeant, ſive noſtra organa, ſive utrumque inæqualiter. Semper ideæ noſtræ differentiam novi ſtatus a priore referent, non abſolutam mutationem, quæ ſub ſenſus non cadit. Sic ſive aſtra circa Terram moveantur, ſive Terra motu contrario circa ſe ipſam nobiſcum, eædem ſunt ideæ, idem ſenſus. Mutationes abſolutas nunquam ſentire poſſumus, diſcrimen a priori forma ſentimus. Cum autem nihil adeſt, quod nos de noſtrorum organorum mutatione commoneat; tum vero nos ipſos pro immotis habemus communi præjudicio habendi pro nullis in ſe, quæ nulla ſunt in noſtra mente, cum non cognoſcantur, & mutationem omnem objectis extra nos ſitis tribuimus. Sic errat, qui in navi clauſus ſe immotum cenſet, littora autem, & montes, ac ipſam undam moveri arbitratur.

61 Illud autem notandum in primis ex hoc principio immutabilitatis eorum, quorum mutationem per ſenſum non cognoſcimus, oriri etiam methodum, quam adhibemus in comparandis intervallorum magnitudinibus inter ſe, ubi id, quod pro menſura aſſumimus, habemus pro immutabili. Utimur autem hoc principio, *quæ ſunt æqualia eidem, ſunt æqualia inter ſe*, ex quo deducitur hoc aliud, ad ipſum pertinens, *quæ ſunt æque multipla, vel ſubmultipla alterius, ſunt itidem inter ſe æqualia*; & hoc alio, *quæ congruunt, æqualia ſunt*. Aſſumimus ligneam, vel ferream decempedam, quam uni intervallo ſemel, vel centies applicatam ſi inveniamus congruentem, tum alteri intervallo applicatam itidem ſemel, vel centies itidem congruentem, illa intervalla æqualia dicimus. Porro illam ligneam, vel ferream decempedam habemus pro eodem comparationis termino poſt tranſlationem. Si ea conſtaret ex materia prorſus continua, & ſolida, haberi poſſet pro eodem comparationis termino; at in mea punctorum a ſe invicem diſtantium ſententia, omnia illius decempedæ puncta, dum

dum transferuntur, perpetuo diſtantiam revera mutant. Diſtantia enim conſtituitur per illos reales exiſtendi modos, qui mutantur perpetuo. Si muteneur ita, ut qui modi ſuccedunt, fundent reales æqualium diſtantiarum relaciones; terminus comparationis non erit idem, adhuc tamen æqualis erit, & æqualitas menſuratorum intervallorum rite colligetur. Longitudinem decempedæ in priore ſitu per illos priores reales modos conſtitutæ, cum longitudine in poſteriore ſitu conſtituta per hoſce poſteriores, immediate inter ſe conferre nihilo magis poſſumus, quam illa ipſa intervalla, quæ menſurando conferimus. Sed quia nullam in tranſlatione mutationem ſentimus, quæ longitudinis relationem nobis oſtendat, idcirco pro eadem habemus longitudinem ipſam. At ea revera ſemper in ipſa tranſlatione nonnihil mutabitur. Fieri poſſet, ut ingentem etiam mutationem aliquam ſubiret, & ipſa, & noſtri ſenſus, quam nos non ſentiremus, & ad priorem reſtituta locum ad priori æqualem, vel ſimilem ſtatum rediret. Exigua tamen aliqua mutatio habetur omnino idcirco, quod vires, quæ illa materiæ puncta inter ſe nectunt, mutata poſitione ad omnia reliquarum Mundi partium puncta, nonnihil immutantur. Idem autem & in communi ſententia accidit. Nullum enim corpus ſpatiolis vacat interjectis, & omnis penitus compreſſionis, ac dilatationis eſt incapax, quæ quidem dilatatio, & compreſſio ſaltem exigua in omni tranſlatione omnino habetur. Nos tamen menſuram illam pro eadem habemus, eam, ut monui, nullam mutationem ſentiamus.

62 Ex his omnibus conſequitur, nos abſolutas diſtantias nec immediatè cognoſcere omnino poſſe, nec per terminum communem inter ſe comparare, ſed æſtimare magnitudines ab ideis, per quas eas cognoſcimus, & menſuras habere pro communibus terminis, in quibus nullam mutationem factam eſſe vulgus cenſet. Philoſophi autem mutationem quidem debent agnoſcere, ſed cum nullam violatæ notabili mutatione æqualitatis cauſam agnoſcant, mutationem ipſam pro æqualiter facta habent.

63 Porro licet, ubi puncta materiæ locum mutant, ut in decempeda tranſlata, mutetur revera diſtantia, mutatis iis modis realibus, quæ ipſam conſtituunt; tamen ſi mutatio ita fiat, ut poſterior illa diſtantia æqualis prorſus priori ſit, ipſam appellabimus eandem, & nihil mutatam ita, ut eorundem terminorum æquales diſtantiæ dicantur diſtantia eadem, & magnitudo dicatur eadem, quæ per eas æquales diſtantias definitur, ut itidem ejuſdem directionis nomine intelligantur binæ etiam directiones parallelæ; nec mutari diſtantiam, vel directionem dicemus in ſequentibus, niſi diſtantiæ magnitudo, vel paralleliſmus mutetur.

64 Quæ de ſpatii menſura diximus, haud difficulter ad tempus transferentur, in quo itidem nullam habemus certam, & conſtantem menſuram. Deſumimus a motu illam, quam poſſumus, ſed nullum habemus motum prorſus æquabilem. Multa quæ huc pertinent, & quæ ad idearum ipſarum naturam, & ſucceſſionem ſpectant, diximus in notis. Unum hic addo, in menſura temporis, ne vulgus quidem cenſere ab uno tempore ad aliud tempus eandem temporis menſuram transferri. Videt alium eſſe, ſed æqualem ſupponit ob motum ſuppoſitum æqualem. In menſura locali æque in mea ſententia, ac in menſura temporaria impoſſibile eſt certam longitudinem, ut certam durationem e ſua ſede abducere in alterius ſedem, ut binorum comparatio habeatur per tertium. Utrobique alia longitudo, ut alia duratio ſubſtituitur, quæ priori illi æqualis cenſetur,

nimi-

nimirum nova realia punctorum ejuſdem decempedæ loca novam diſtantiam conſtituentia, ut novus ejuſdem ſtyli circuitus, ſive nova temporaria diſtantia inter bina initia, & binos fines. In mea theoria eadem prorſus utrobique habetur analogia ſpatii, & temporis. Vulgus tantummodo in menſura locali eundem haberi putat comparationis terminum, Philoſophi cæteri fere omnes eundem ſaltem haberi poſſe per menſuram perfecte ſolidam, & continuam, in tempore tantummodo æqualem; ego vero utrobique æqualem tantum agnoſco, nuſpiam eandem.

§. VIII. Ad verſ. 893.

DE MOTU ABSOLUTO, AN POSSIT A RELATIVO DISTINGUI.

65. Explicata in ſuperioribus natura ſpatii, & temporis, idea motus abſoluti, & relativi ſponte conſequitur, quod quidem etiam in ipſis ſuperioribus ſupplementi hujuſce partibus attigimus. Motus abſolutus eſt continua mutatio loci, & habetur, cum ſingulis momentis temporis reſpondent ſingula ſpatii puncta, alia aliis, vel nunquam redeatur ad idem punctum, vel ſi redeatur, quod, ut demonſtravimus, nunquam accidet, intermediis ante reditum momentis alia loci puncta reſpondeant, nec idem cum continua momentorum ſerie conjungatur, in quo ſita eſſet quies. Motus autem reſpectivus eſt diſtantiæ, vel directionis mutatio.

66 Si in fig. 1. punctum quoddam moveatur motu abſoluto per rectam AB, aliud vero motu abſoluto per rectam CD ipſi parallelam, & æqualem; diſtantia BD in fine motus erit æqualis, & parallela diſtantiæ AC. Hinc & diſtantia, & directio habebitur pro eadem, & motum quidem abſolutum habebit utrumque, cujus menſura erit pro priore illo recta ipſa *AB*, pro poſteriore recta *CD*, ſive ſpatium percurſum, ſed motum abſolutum habebunt nullum, & dicentur reſpective quieſcere. Si ſecundum punctum percurrat quamvis aliam rectam *CE*, utcumque in quovis alio etiam plano poſitam, ducta *CD* parallela, & æquali ipſi *AB*, tum recta *DE*, hæc exprimet motum reſpectivum puncti poſterioris reſpectu prioris. Nimirum reſpectu utriuſque perinde erit, ac ſi punctum primum primo ejus temporis momento fuiſſet in *B*, ſecundum in *D*, quod ſecundum percurriſſet eo tempore rectam *DE*, primo interea quieſcente. Nam diſtantia nova erit *BE*, quæ comparanda eſt cum *BD*, cum ipſa *BD* habeatur pro eadem, ac *AC*, & ita comparata directionem, & longitudinem æque mutat, ac ſi ſecundum punctum percurriſſet rectam *DE*. Quare motum reſpectivum ſecundi puncti reſpectu primi metitur ipſa *DE*, quam, ſi primo puncto immoto in *B*, & exiſtente ſecundo initio temporis in *D*, percurriſſet ipſum ſecundum eo tempore; eodem modo diſtantiam, & poſitionem mutaſſet reſpectu ipſius.

67 Facile autem hinc deducitur, quod in notis affirmavi, poſse ſola motus natura conſiderata, haberi motum abſolutum utriuſque puncti ſine ullo motu ipſorum reſpectivo, ſive cum reſpectiva quiete, motum autem reſpectivum haberi non poſse, niſi vel alterum, vel utrumque motu abſoluto moveatur. Hic autem reſpectivus motus haberi poteſt vel mutata diſtantia, & manente directione, vel manente directione, & mutata diſtantia, vel mutata utraque, ut facile patet.

68. Por-

68 Porro abſolutum motum a relativo diſtinguere omnino non poſſumus. Newtonus quidem cenſuit poſſe, ac Noſter exhibet methodum excerptam ex ſcholio poſt defin: 8. Princip. lib. 1. Eam propoſui in nota ad verſum 838; quæ quidem adhibet motum circularem ſitulæ aqua plenæ. Quæ ibidem adjeci, ſatis evincunt, parum admodum ipſi fidendum eſſe ad evincendum propoſitum. Hic autem tantum innuit Noſter aliam methodum petitam ex eodem ſcholio, quam hiſce verbis Newtonus exhibet. *Motus quidem veros* (nimirum abſolutos) *corporum ſingulorum cognoſcere, & ab apparentibus* (nimirum reſpectivis) *actu diſcriminare difficillimum eſt; propterea quod partes ſpatii illius immobilis, in quo corpora vere moventur, non incurrunt in ſenſus. Cauſa tamen non eſt prorſus deſperata. Nam ſuppetunt argumenta partim ex motibus apparentibus, qui ſunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus, qui ſunt motuum verorum cauſa, & effectus. Ut ſi globi duo ad datam ab invicem diſtantiam filo intercedente connexi revolverentur circa commune gravitatis centrum; innoteſceret ex tenſione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari poſſet. Deinde ſi vires qualibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum, vel minuendum ſimul imprimerentur, innoteſceret ex aucta, vel imminuta fili tenſione augmentum, vel decrementum motus, & inde tandem inveniri poſſent facies globorum, in quas vires imprimi deberent, ut motus maximè augeretur, id eſt facies poſtica, ſive quæ in motu circulari ſequuntur. Cognitis autem faciebus, quæ ſequuntur, & faciebus oppoſitis, quæ præcedunt, cognoſceretur determinatio motus.*

69 De hac Newtoni methodo affirmavi hic in notis, ſuſpectam mihi eſſe, & rei conficiendæ nequaquam idoneam. Mitto enim illud, quod etiam hic oportet ſupponere vim inertiæ, & modum, quo motus a viribus producuntur, de quibus infra. Ipſa tenſio fili non poteſt definiri, niſi per diſtantiam globorum, diſtantiæ autem menſuram certam habere non poſſumus, niſi ſupponamus, eam ita in tranſlatione mutari, ut eadem maneat, quemadmodum diximus num. 61. quod in illo immenſo vacuo magis periculoſum eſſet, vel ſaltem dubium. Sed, quod ante cætera omnia inutilem reddit & hanc, & ſuperiorem methodum, & aliam quamcumque, eſt illud, quod ſi & nobis, & corporibus illis imprimerentur motus æquales, & paralleli in plagam quamcumque, omnes reſpectivi motus remanerent prorſus iidem, juxta ipſa recepta Mechanicæ principia, & applicatio virium eodem modo a nobis facta produceret motus reſpectivos prorſus eoſdem. Jam vero ſi adſit aliquis motus communis in certam plagam, motus abſolutus compoſitus ex illo communi, & hoc reſpectivo, quem per illud experimentum deprehenderemus, eſſet admodum diverſus a ſolo illo reſpectivo, & poſſet pars, quæ a nobis cenſetur in motu poſtica, eſſe revera antica, & viceverſa. Si nimirum motus ille communis ſit velocior, quam motus circularis reſpectivus, & fiat in eodem plano, eo caſu nunquam bina illa corpora motu abſoluto ferrentur in eam plagam, quam experimenta indicarent, demptis binis punctis diametri perpendicularis directioni motus communis, ubi in altero motus circularis cum communi conſpiraret, in altero opponeretur; ſed ab eo vinceretur adeoque abſoluti motus directio utrobique conſpiraret cum motu illo communi.

70 Hinc mihi quidem videtur evidentiſſimum illud, nos motum abſolutum a relativo nulla unquam ratione poſſe diſtinguere.

§. IX.

§. IX. Ad not. in verſ. 901.

DE FORMULIS MOTUS ÆQUABILIS.

71 Quid ſit motus æquabilis, & velocitas inde derivata, ut & diſcrimen inter velocitatem quandam, quam ego potentialem appello, & aliam, quam dico actualem, ſatis dixi in hac nota. Hic exhibebo formulas ad motum æquabilem ſpectantes, & præcipua ſimpliciſſima theoremata, quæ ex ipſis formulis ſponte conſequuntur.

72 Spatium, quod a puncto percurritur motu æquabili, relatum ad tempus, quo percurritur, exhibet ideam velocitatis ita, ut velocitas ſit ſpatium illud diviſum per tempus. Hinc ſi ſpatium dicatur S, tempus T, Velocitas, ſive celeritas C, oritur hæc formula $C = \frac{S}{T}$ ubi celeritas C eo magis creſcit, quo magis creſcit ſpatium S, & decreſcit tempus T.

73 In hac diviſione ſpatii per tempus, nimirum per quantitatem etherogeneam, notandum illud, quantitatem per numeros tantummodo revera multiplicari poſſe, vel dividi, non per alias quantitates, cum multiplicare ſit toties accipere, dividere autem ſit quandam partem accipere. At diviſio ſit, & multiplicatio per quantitates quaſcumque eas exprimendo numeris. In quovis quantitatum genere ſeligitur aliqua ad arbitrium, quæ dicitur unitas. Ea ſemel ad arbitrium aſſumpta, reliquæ omnes exprimi poſſunt numeris integris, vel fractis, prout illam aliquoties continent, vel aliquas ejus partes; vel etiam integris ſimul, & fractis, vel ſi incommenſurabiles ſint cum ea unitate, numeris ſurdis aliquo ſigno, vel littera denotatis. Ubi hoc pacto quantitates redactæ fuerint ad numeros, multiplicantur per ſe invicem, & dividuntur, ſed productum proveniet majus, vel minus, prout unitas aſſumpta minor fuerit, vel major, quotus vero eo major, quo unitates numeratoris fuerint minores, denominatoris majores, & viceverſa, quia ipſi numeri, qui exprimunt quantitates, erunt eo minores, quo unitas aſſumpta fuerit major, & viceverſa, ac productum e majoribus numeris evadit majus, quotus vero eo eſt major, quo numerator eſt major, ac denominator minor. Sic ſi pes aſſumatur pro unitate, decempeda exprimetur per 10, ſi pro unitate aſſumatur paſſus pedum 5, decempeda exprimetur per 2.

74 Igitur ſi in ſpatio, & in tempore quædam determinata menſura dicatur unitas, & celeritas, quæ habetur, ubi illo tempore illud ſpatium percurritur, dicatur itidem unitas in genere celeritatum; ubi quodvis aliud ſpatium, & tempus habebitur, erit ſemper illa alia celeritas æqualis illi alteri ſpatio diviſo per illud alterum tempus. Nam ſi dicantur illud aliud ſpatium, ac tempus, & illa alia celeritas s, t, c, habebitur ex ipſa celeritatis notione $C, c :: \frac{S}{T} . \frac{s}{t}$. Sed ob $C = 1$, $S = 1$, $T = 1$, eſt $C = \frac{S}{T} = \frac{1}{1} = 1$. Igitur etiam erit $c = \frac{s}{t}$, cum quantitates æquales eandem rationem non habeant, niſi ad æquales.

75 Iam vero ex illa formula $C = \frac{S}{T}$ oriuntur hæ duæ $S = CT$, & $T = \frac{S}{C}$.

Ex his tribus eruuntur hæc tria theoremata: Celeritas eſt directe, ut ſpatium, & reciproce, ut tempus conjunctim; Spatium eſt directe, ut celeritas, & tempus

pus conjunctim: Tempus eſt directe ut ſpatiū, & reciproce, ut celeritas conjunctim. Porro in quavis ex iis tribus formulis ſi ſupponatur alter e binis terminis comparationis invariabilis, ſive conſtans, is poterit haberi pro unitate, adeoq; omitti, ubi in denominatore invenitur, ſive in numeratore invenitur cum aliis, poſita pro ipſo unitate, ubi eſt ſolus in numeratore. Hinc e ſingulis habebuntur bina theoremata:

e prima, ſpatio eodem percurſo, $C = \frac{1}{T}$, tempore conſtanti percurſis diverſis ſpatiis, $C = S$, nimirum in prima hypotheſi celeritas reciproce, ut tempus, in ſecunda celeritas directe, ut ſpatium: e ſecunda, celeritate conſtanti, $S = T$, tempore conſtanti, $S = C$, nimirum in priore hypotheſi ſpatium, ut tempus, in poſteriore ſpatium, ut celeritas. E tertia, ſpatio conſtanti, $T = \frac{1}{C}$, celeritate conſtanti, $T = S$, nimirum in priore hypotheſi tempus reciprocè, ut celeritas, in poſteriore tempus directè, ut ſpatium.

76 Hoc pacto ex illa prima formula, quæ definitionem continet, oriuntur aliæ 8, & novem formulæ exhibent novem theoremata pertinentia ad motum æquabilem. Eadem ratione e ſimilibus formulis poterit quicumque, qui primam tantummodo calculi notionem habuerit, ſibi ipſe formulas alias derivare, & theoremata, quæ quidem e tribus terminis ſemper eruentur novem, creſcente autem terminorum numero, creſcunt in immenſum, quod patet etiam ex illo immenſo vocum numero, quæ e ſola diverſa 24 litterarum permixtione oriuntur, & linguis omnibus vocabula abunde ſubminiſtrant. Ego in ſequentibus ſolas plerumque præcipuas illas formulas proponam, e quibus cæteræ derivantur.

77 Interea illud addam tantummodo, motum continuum cum velocitatibus diverſis haberi non poſſe, ſi ſpatium conſtet punctis, tempus autem momentis prorſus indiviſibilibus, & inextenſis. Nam ſingulis momentis deberent reſpondere ſemper ſingula puncta loci, ſi nec eidem momento poſſent plura reſpondere loci puncta, quod virtualem illam induceret extenſionem, nec pluribus momentis idem loci punctum, quod requireret morulas, & continuitatem excluderet. At ea difficultas evadit penitus nulla, ſi illud conſideretur, lineam lineolis, continuum tempuſculis conſtare, quorum nullum ſit minimum, ſed quovis in ſe determinato utcumque parvo aliud minus haberi poſſit. Nam ſingulis quidem momentis erit materiæ punctum in punctis loci ſingulis, ſed eodem continuo tempuſculo utcumque parvo poterit percurrere ſpatia ſeu majora, ſeu minora, & quo tempore punctum celerius percurrit ſpatium minus, eo illud, quod minorem celeritatem habet, adhuc minus ſpatium percurret. Verum ea, & alia, quæ huc pertinent, fuſe, & admodum luculenter, ni fallor, expoſui in diſſertatione De Lege Continuitatis.

§. X. Ad notam in verſum 935.

DE MASSA, MOLE, ET DENSITATE.

78 Maſſa corporis cujuſvis, ut in nota diximus, eſt tota quantitas materiæ ad id ipſum corpus pertinentis, Moles autem magnitudo ſpatii externa ſuperficie incluſi, prout includit poros etiam vacuos, vel etherogeneas etiam ſubſtantias ipſis incluſas poris, quas Noſter appellat *res alienigenas*. Hic jam ſta-

tim ſumma exoritur difficultas, rem aliquanto altius conſideranti, utramlibet accurate determinandi. Nam admodum difficile eſt determinare, quæ ſint illæ ſubſtantiæ ætherogeneæ, quæ non pertinent ad corporis conſtitutionem. Si materiam ſpectamus, ea, & mihi, & aliis plurimis homogenea eſt, & e ſolis ejus diverſis combinationibus diverſæ oriuntur corporum ſpecies. Quare ab ipſa materia non poteſt deſumi diſcrimen illud inter ſubſtantias pertinentes ac non pertinentes. Si autem & diverſam illam combinationem ſpectemus, corpora omnia, quæ obſervamus, mixta ſunt ex ſubſtantiis admodum diſſimilibus, quæ tamen omnes ad ejus corporis conſtitutionem pertinent. Id in animalium corporibus, in plantis, in marmoribus pleriſque, oculis etiam patet, in omnibus autem corporibus Chymia docet, quæ mixtionem illam diſſolvit.

79 Ex alia parte tenuiſſima æetherea materia, quæ omnino eſt aliqua noſtro aere rarior, ad conſtitutionem Maſſæ nequaquam pertinere cenſetur, ut nec pro corporibus pleriſque aer, qui meatibus internis interjacet. Sic aer incluſus ſpongiæ meatibus, ad ipſius conſtitutionem nequaquam cenſetur pertinere. Idem autem ad multorum corporum conſtitutionem pertinet, ſaltem ad fixam naturam redactus, ut Haleſius demonſtravit, plures & animalis regni, & vegetabilis ſubſtantias magna ſui parte conſtare aere fixitatem adepto. Rurſus ſubſtantiæ volatiles, aere ipſo tenuiores multo, quæ in corporum diſſolutione chymica in halitus, & fumos abeunt, & plures fortaſſe, quas nos nullo ſenſu percipimus, ad ipſa corpora pertinebant.

80 Nec illud aſſumi poteſt, quidquid ſolidum, & fixum eſt tantummodo pertinere ad corporis Maſſam, quis enim a corporis humani Maſſa ſanguinem omnem, & tot lymphas excludat, a lignis recens reſectis ſuccos nondum concretos? Præterquamquod Maſſæ idea non ad ſolida ſolum corpora pertinet, ſed etiam ad fluida, in quibus ipſis alia tenuiora aliorum denſiorum meatibus interjacent. Nec vero dici poteſt, pertinere ad corporis conſtitutionem, quidquid materiæ, tranſlato corpore, ſimul cum ipſo transfertur, nam aer, qui intra ſpongiam eſt, partim mutatur in ea tranſlatione, is nimirum qui orificio eſt propior, partim manet, qui nimirum intimior, & qui aliquandiu manet, mutatur deinde.

81 Hæc & alia mihi diligentius perpendenti illud videtur demum, ideam Maſſæ non eſſe accurate determinatam, & diſtinctam, ſed admodum vagam, arbitrariam, & confuſam. Erit Maſſa materia omnis ad corporis conſtitutionem pertinens, ſed a craſſa quadam, & arbitraria æſtimatione pendebit illud, quod eſt, pertinere ad ipſam ejus conſtitutionem. Sed nihilo minus arbitraria eſt, & vaga, ac confuſa, Molis idea in corporibus, quæ habemus, & in mea quidem ſententia in omnibus corporibus, quæ haberi poſſunt. Cum enim moles ſit magnitudo ſpatii externa ſuperficie contenti, idea ejuſmodi vaga erit, & arbitraria, ſi determinata non ſit, & diſtincta, ac clara ſuperficiei idea. Ea quidem eſſet ejuſmodi, ſi corporis cujuſpiam ſuperficies tota continua eſſet. At in communi etiam ſententia, ut intra omnium corporum viſcera plurimi meatus ſunt, ita & in externa ejus ſuperficie plurimi habentur hiatus, nec particulæ aliæ alias contingunt, niſi in punctis quibuſdam tantummodo, nullis fortaſſe ſuperficiebus primigeniarum particularum ſibi accurate congruentibus. Quare ſi ſuperficiei ductum continuum quærimus, per illas omnes errabimus cavitates, quas appellamus internas. In mea autem ſententia id accidit multo magis, in qua omnia materiæ puncta a ſe invicem disjuncta ſunt, infinitæ ſuperficies duci pote-

poterunt ſe plicantes hinc, & inde, & nullum concludentes ſpatium, quin & infinitæ lineæ duci poſſunt, quæ per omnia puncta tranſeant, quæ ſuperficies, ſi pro forma ipſa corporis aſſumantur, jam nulla corporis Moles erit, quæ triplicem habeat dimenſionem, ſi verò illæ ipſæ aſſumantur lineæ, nulla erit corporis ſuperficies, & unica dimenſione præditum erit corpus.

82 Quamobrem confingenda eſt animo quædam ſuperficies continua, quæ in communi ſententia extimas illas prominentium partium ſuperficies contingat, vel in mea per extima illa puncta tranſeat, ſed arbitrarium erit definire, quæ particulæ pro extimis haberi debeant, ut eas concepta ſuperficies perradat, aliis paulo admodum demiſſioribus omiſſis, vel quæ puncta in ea ſuperficie includenda ſint. Deinde ab uno contactu ad alterum, ab uno ad alterum punctum liberum erit ex infinitis curvaturis ſuperficierum parum admodum diſtantibus alias præ aliis eligere; præter quam quod ſæpe procurrentes etiam particulas mente ſecludimus, ut abraſas, quemdmodum in ſuperficie Terræ æſtimanda a montibus mentem abducimus, quod iterum arbitrarium eſt, & admodum difficile, vel nullo etiam pacto poteſt accurate definiri, quæ potiſſimum pro procurrentibus, & abradendis partibus habendæ ſint, & uſque ad quem limitem abradendæ.

83 Ex hiſce omnibus facile patet, eas ideas craſſo, & vulgari modo conceptas, ut diſcrimina quædam, quæ ſub ſenſum non cadunt, habeantur pro nullis, claras admodum, & determinatas videri, ſed rem ad metaphyſicum rigorem traducenti, indeterminatas eſſe maxime, & confuſas.

84 Ex idea Maſſæ ac Molis idea Denſitatis exoritur referendo illam ad has, & eodem pacto, quo ſuperius celeritas erat ſpatium diviſum per tempus, eſt hic denſitas Maſſa diviſa per Molem, habita unitatum aſſumendarum ratione. Nimirum ſi maſſa, ſeu quantitas materiæ dicatur Q, moles M, denſitas D, eſt $D = \frac{Q}{M}$, unde oritur $Q = DM$, $M = \frac{Q}{D}$, quæ tres formulæ tria theoremata continent, ut ibidem, ex quibus ſingulis, poſito altero e binis terminis comparationis conſtanti, eruuntur aliæ binæ, cum binis theorematis, ut omnes ſimul ſint novem.

85 Denſitati contrariam concipimus raritatem, quæ tantum decreſcat quantum creſcit denſitas in ejus ratione inverſa. Hinc ſi raritas dicatur R, eſt $R = \frac{1}{D}$, & $D = \frac{1}{R}$, ac pro D poſito valore ſuo, eſt $R = \frac{M}{Q}$, unde iterum 9 formulæ, & totidem theoremata derivantur.

86 Ex idea Denſitatis & Maſſæ oriuntur aliæ formulæ, & alia multo plura theoremata, quæ pertinent ad quantitatem motus in ſequenti nota definitam. Nam ſi quantitas motus dicatur R, quantitas materiæ Q, denſitas D, moles M, velocitas C, tempus, quo motus durat, T, ſpatium quod ſingula puncta conficiunt S; erit per num. 75, $S = CT$, & per num. 84 $Q = MD$. Erit autem ex idea quantitatis motus $R = QS$. Quare pro Q, vel S, vel pro utroque poſito ſuo valore, erit $R = MDS$, vel $R = QCT$, vel $R = MDQC$, ex quibus formulis, quam multa theoremata profluant ob tantam combinationum multitudinem, nemo non videt.

87 Quod autem ad denſitatem, & raritatem pertinet, illud in communi theoria diſcriminis habetur a mea, quod in ea raritas augeri, denſitas minui poteſt in infinitum, aucto nimirum ſemper meatuum internorum numero, ſeu particu-

 lis

lis a ſe invicem recedentibus in quacumque ratione, quæ quidem unica eſt ratio augendæ raritatis, excluſa jam ſupra virtuali illa extenſione materiæ, vi cujus eadem particula poſſit extenſionem augere ſuam, ſpatio majore penitus occupato. At denſitas augeri, raritas imminui non poteſt, niſi uſque ad certum limitem. Si nimirum ita ad ſe invicem apprimantur partes, ita etiam primigeniæ particulæ, ſi opus eſt, figuram immutent, ut totum ſpatium oppleatur materia, illud eſt minimum ſpatium, quod illa materia occupare poſſit, ille finitus limes, ad quem poſſit denſitas devenire, quæ ibi neceſſario ſiſtit, licet non in infinitum excreverit, ſed ad finitam magnitudinem devenerit. Contra vero in mea ſententia denſitas, ut imminui poteſt in infinitum, recedentibus a ſe invicem punctis in ratione quacumque ultra quoſcumque limites, poteſt etiam ultra quoſcumque limites augeri, imminutis itidem diſtantiis ultra limites quoſcumque, in ratione quacumque, nec ullus eſt alius denſitatis auctæ terminus, niſi compenetratio, ut adeo poſſit univerſus hic Mundus ad ſpatium redigi, quod nunc acus acies occupat, manente diſtantiarum omnium proportione eadem, & ordine, ut ſupra etiam innuimus. Quod ſi ita fieret, ut ſimul in eadem ratione virium ſcala contraheret axem datis quibuſque viribus reſpondentem, nihil tota cauſarum, & effectuum ſeries perturbaretur, nihil ſe noſtris ſenſibus mutationis offerret.

88 Huc pertinet ea etiam ſententia, quam nuper protulit, vel fortaſſe inſtauravit porius Eulerus de binis materiæ generibus, quarum altera & gravis ſit, & denſior, ac magis reſiſtens, altera natura ſua multo rarior, & minus reſiſtens, quæ ipſius gravitatis ſit cauſa. Mitto illud, quod in omnibus materiam hujuſmodi ſubtilem adſtruentibus reſiſtentia omni, vel fere omni carentem, & tamen cohæſionis tenaciſſimæ, graviſſimi ponderis, vividiſſimæ elaſticitatis effectricem, miratus ſum, quod nimirum ſolam ejus preſſionem tanta vi pollentem cenſeant, cum ejus incurſum in corpora, æquivalentem incurſui corporum in ipſam omni, vel fere omni vi ſimul privent, licet multo validior incurſus eſſe debeat, quam preſſio, & quæ tenuitas incurſum effugit, preſſionem etiam debeat eodem prorſus pacto, & potiore jure elidere; nam id huc non pertinet. At ſi illa bina materiæ genera ſunt naturæ prorſus diverſæ, & utraque ſpatium penitus implet, nulla ſane erit inter eas relatio denſitatis, quia nulla erit maſſarum relatio. Neque enim alterius generis maſſa ulla alterius generis maſſæ verè æqualis eſſe poterit, ſed æqualitas aſſumetur arbitraria, ut in etherogeneis materiis, in quibus ſingulis unitas arbitraria eſt aſſumenda, ut communibus numeris exprimi poſſint, & inter eas induci æqualitas. Qui prima materiæ elementa ipſa itidem etherogenea cenſent, ii pro partibus materiæ æqualibus, licet diſſimilibus, aſſumunt eas, quæ æquale ſpatium implent, quod ad extenſionem, & magnitudinem pertinet, niſi particulas illas virtualiter extenſas admittant, & ab ipſarum æquali numero æqualitatem repetant. At Eulerus, qui ejuſmodi virtualem extenſionem, & finitum proinde indiviſibilium particularum numerum non admittit, ſi a ſpatio occupato quantitatem materiæ metiatur, jam utrumque materiæ genus, quod totum æquè occupat ſpatium, eandem in eodem ſpatio quantitatem habebit, adeoque denſitatem eandem, quod ſi denſitate differre dicat, adeoque in æquali ſpatio inæqualem materiæ quantitatem conſtituat; unde ipſam quantitatem materiæ æſtimabit ad denſitatis æſtimationem perneceſſariam? Niſi forte a vi reſiſtendi repetat, quæ ad eam,

quam

quam dicimus qualitatem potius, quam ad quantitatem pertinere videretur, cum ſi binis maſſis æquale ſpatium occupantibus altera majore, altera minore vi reſiſtendi ſit prædita, diſſimiles potius dicendæ videri debeant, quam inæquales.

§. XI. Ad notam in verſ. 1140.

DE PRINCIPIO INDUCTIONIS.

89 Huic fere uni principio omnis proprietatum corporearum determinatio innititur, & eo Noſter in primis utitur, ut fuſius aliquanto expoſui in ipſis notis. Sed quædam in eo adhibendo cavenda eſſe, ut uſum habere poſſit, ibidem innui fuſius expoſita in Diſſertatione de Lege Continuitatis. Ea hic perſtringam.

90 Duplex eſt inductionis genus, ut in ipſa innui nota, alterum perfectæ, *cum a proprietate in ſingularibus omnibus demonſtrata, eandem generaliter omnibus collectionem illorum conſtituentibus tribuimus*, alterum imperfectæ, *cum, quæ deprehendimus in plurimis ſimilibus inter ſe, nulli ſimilium contrario invento, extendimus ad reliqua ejuſdem generis, in quibus nondum obſervare rem licuit*. Hoc ſecundum inductionis genus non eſt demonſtrativum, & infallibile, ſed quoddam prudens admodum, licet erroris capax, inveſtigationis principium continet.

91 Porro requiritur in primis, ut proprietas pro generali habenda, non in exiguo ſingularium ejuſdem generis, ſed in ingenti numero inventa ſit: tum ut in nullo ex iis inventum ſit aliquid manifeſto contrarium, quod non excludit apparentem aliquam oppoſitionem, dummodo ea, quæ opponi videntur, aliqua non inepta methodo conciliari poſſint. Sic quia plurimis hominibus diſſectis, bini pulmones inveniuntur, nullum habemus dubium de eo, quod in reliquis etiam non diſſectis inveniri debeant pulmones. Nec obeſt, quod aliquando inventus ſit pulmonum alter, vel uterque fere penitus abſumptus. Tribuitur is defectus vi morbi, qui eos ita conſumpſerit, ut vitam etiam ademerit, corruptis etiam iis ipſis deinde magis poſt mortem.

92 Præterea diſtinguenda ſunt plura proprietatum genera. Quædam ita relativæ ſunt, ut a noſtrorum ſenſuum conſtitutione non tantum ipſarum idea pendeat, ſed pendeant etiam ipſæ, quas hic dicam relativas, ut eſt hoc ipſum eſſe ſenſibile. Si enim noſtri ſenſus acutiores eſſent, ſenſibilia evaderent ea, quæ nunc ob exiguam ſuam molem a nobis ſentiri non poſſunt. Quædam aliæ nullam determinatam vim exigunt in noſtris ſenſibus, licet earum ideam acquiramus per ipſos ſenſus, quæ idea ab ipſarum natura plurimam etiam fortaſſe differat, ut eſt impenetrabilitas, quas idcirco ſuperius ipſas etiam relativas dixi, hic autem, cum etiam ſublatis noſtris ſenſibus maneant, nec ab ipſorum majore, vel minore vi pendeant, idcirco dicam abſolutas. Præterea quædam pendent ab ipſa natura totius, vel aggregati, ut diſtinguitur a natura partis, ut eſt eſſe multiplex, eſſe compoſitum. Poteſt enim ex genere ſuo pars eſſe ſimplex, ſed totum, vel aggregatum non poteſt, quod nimirum ex ipſa natura ſua eſt multiplex.

93 Jam vero abſolutæ illæ proprietates, & quæ cum ipſa natura aggregati non neceſſario conjunguntur, debent tradući ab iis, quæ obſervantur, ad omnia etiam, quæ obſervari non poſſunt, ac a totis ſub ſenſum cadentibus etiam ad partes, quæ ſub ſenſum non cadunt. Cum enim illæ, non pendeant a noſtro-

rum

rum ſenſuum vi, ſi generales non eſſent, atque alicubi deficerent, æquè is defectus haberi poſſet tam in quovis ex iis, quæ ſub ſenſum cadunt, quam in quovis ex iis, quæ ſub ſenſum non cadunt. Quare tanto probabilius eſſet, eum defectum reperiri debere inter ea, quæ cadunt ſub ſenſus, quam inter ea, quæ ſub ſenſus non cadunt, quanto plura ſunt priora hæc, quam illa poſteriora. Multo autem plures ſunt magnitudines, quæ cadunt ſub ſenſum, quam eæ, quas ſenſibus ipſa ſua parvitas illa ſubducit. Igitur multo probabilius eſſet aliquem ejuſmodi defectum inveniri inter ea, quæ ſub ſenſum cadunt, quam inter ea, quæ non cadunt, adeoque multo probabilius eſt generalem eſſe proprietatem ipſam, quam alicubi deficere. Quod ſi etiam pauciora ſint, quæ ſub ſenſum cadant, quam quæ non cadant, cum probabile ſit, ſi ea proprietas alicubi deficiat, non ſemel defectum haberi, ſed in pluribus ſimilibus; admodum improbabile eſt, in aliquo ex iis, quæ ſub ſenſum cadunt, & quæ ſupponuntur eſſe plurima, ipſum defectum non incidere. Quare ex eo, quod in omnibus obſervatis inventa ſit, jure ad reliqua etiam, quæ non modo obſervata non ſunt, ſed obſervari non poſſunt, traducuntur.

94 At hujus conditionis non ſunt relativæ illæ proprietates. Nam quod illarum defectus nullus inventus ſit in iis, quæ ſunt obſervata, id caſu non accidit; cum in iis non inveniri non poſſit, licet alicubi deſit; adeoque caſui improbabili tribuendum non ſit hoc, quod eſt, nullum defectum inter obſervata incidiſſe, cum nimirum ipſe ejus proprietatis defectus jam neceſſario ſecum id trahat, ut obſervari non poſſit. Idem autem eſt etiam de iis, quæ pertinent ad rationem aggregati. Quoniam ſentiri a nobis non poſſunt, niſi grandiores maſſæ, quæ ex partibus conſtant; nulla proprietas, quæ rationi aggregati propria non ſit, ſentiri poteſt; cum eo ipſo, quod deſit, ſenſus effugiat. Quare in prioribus, in quibus defectus æquè indifferenter cadere poſſet in ea, quæ ſentiuntur, ac in ea, quæ ſentiri non poſſunt; ex eo, quod nuſpiam reperiatur in iis, quæ ſenſu percepta ſunt, jure infertur nuſquam haberi; in his contra, in quibus fieri non poteſt, ut cadat ſub ſenſus; ex eo quod ſub ſenſus nunquam cadat, infertur jure, non haberi ne in iis quidem, quæ non cadunt ſub ſenſus.

95 Hinc hujuſmodi inductionis methodo rite probantur pro materia omni,& quibuſvis ejus partibus impenetrabilitas, mobilitas, inertia, ac alia ejuſmodi, quæ ſi deeſſent, æquè deeſſe poſſent in iis, quæ ſub ſenſus cadunt, ac in iis, quæ infra noſtrorum ſenſuum limites delitescunt. At non ejuſmodi eſt compoſitio e partibus, ſive diviſibilitas, nec extenſio, nec figurabilitas, quæ ſunt de ratione aggregati, & quæ deeſſe non poſſunt in iis, quæ infra ſenſus jacent. Quod ea ſemper viderimus in omni materia, id non evincit, in quibuſvis materiæ partibus idem haberi debere. Idcirco enim id ubique invenimus, quia ſi ea deſint, jam infra ſenſus eſſe debet id, quod eo careat. Quare præjudicium eſt quoddam ea difficultas, quam habent, qui puncta materiæ ſimplicia, indiviſibilia, inextenſa, carentia omni figura ſe non poſſe concipere profitentur. Ejuſmodi punctorum exempla per ſenſus habere non potuerunt, nec eorum ideas per ſenſus haurire. Reflexione ſibi eas comparare debent, ſi ratio quæpiam ea in Natura exiſtere indicarit.

§. XI.

§. XII. In notam ad verſ. 1370
DE DIVISIBILITATE IN INFINITUM.

96 Extenſionem continuam in infinitum diviſibilem eſſe, ſupra etiam ex natura punctorum demonſtravimus num. 47, quæ demonſtratio vim habet ſuam etiam in ſententia communi continuæ corporum extenſionis. Nam in ea etiam ſententia debet haberi corporis præditi dimenſione triplici aliquis realis terminus, qui binas tantummodo dimenſiones habeat in longum, & latum. Utcumque enim exigua profunditas aſſumatur, ejus pars interior ad terminum, ſeu limitem non pertinebit. Is terminus latitudine ſola, & longitudine præditus, dicitur ſuperficies. Superficies quævis finita ſuum terminum, ſeu finem habere itidem debet, qui ſimili argumento latitudine careat, & is dicitur linea, ac eodem pacto lineæ terminus erit punctum nulla extenſione præditum. Superficies, linea, punctum non erunt materia, ſeu corpus, ſed erunt eorum affectiones, quæ ſine ipſis per ſeſe ſubſiſtere non poſſunt, nimirum termini materiæ, ſeu corporis, reales quidem; neque enim a noſtra imaginandi vi pendet, quod limites aliqui ſint, ſeu termini, & quod ad limitem, ſeu terminum pertinere non poſſit id, quod interius ultra ipſum jacet, & ad id pertinet, cujus is eſt terminus, aut limes. Nec erit ſuperficies pars corporis, nec linea pars ſuperficiei, nec punctum pars lineæ, ſed realis terminus, nec proinde corpus repetitione, & juxtapoſitione ſuperficiei, nec ſuperficies repetitione lineæ, nec linea repetitione puncti, ſed ductu quodam continuo generabitur, unde ſponte conſequitur, binas quaſque ſuperficies vel coaleſcere in unicam, & congruere, vel inter ſe corpus aliquod intercipere triplici dimenſione præditum, binas lineas intercipere ſuperficiem, bina puncta intercipere lineam, nec ullam proinde ſuperficiem ſuperficiei, lineam lineæ, punctum puncto, ita proximum eſſe, ut nihil medii intervalli interſit. Sic ſi corpus aliquod, quod continuum concipiatur, & ſolidum, ſecetur ſectione plana quadam, evidens eſt alteram ſectionem priori ita proximam fieri non poſſe, ut nihil corporis intra ipſas ſit; ſed nova ſectio, vel aliquid intercipiet, vel cum priore penitus congruet. Intervalli autem illius medium aliquod erit, quod nimirum cum neutro extremo congruere poteſt, ne ipſa itidem extrema congruant, medio omni ſublato, unde eadem methodo, quam num. 47, adhibuimus, habebitur neceſſario diviſibilitas in infinitum.

97 Eandem ſpatii continui diviſibilitatem in infinitum evincunt innumera ſane geometrica argumenta petita ex natura tam circulorum, qui eandem rectam & ſe invicem contingant in unico puncto, licet infiniti numero duci poſſint alii aliis majores, adeoque finitum intervallum, quod inter tangentem, & minimum intimum circulum interjacet, dividere poſſint in infinitum, quàm parallelogrammorum, qui alii aliis inter eaſdem parallelas longiores duci poſſunt dato cuivis, utcumque exiguo parallelogrammo æquales; quàm parallelarum linearum, quæ poſſunt agi ex longiſſimæ cujuſvis lineæ rectæ diviſionibus quotcumque ita, ut extremæ tranſeant per extrema puncta rectæ cujuſvis utcumque exiguæ, quam omnes ſecabunt in totidem æquales partes, quot partes illa longiſſima habebat, quàm curvarum, quæ aſymptotos habent, rectas nimirum, ad quas ſemper acce-

dant

dant ultra quoſcumque limites in infinitum, quin unquam exhauriant illud exiguum intervallum, quod ſemper ſupereſt, & congruant; atque alia ejuſmodi ſexcenta adhiberi ſolent, quæ cum, in ea ſententia continuæ extenſionis materiæ, ſuperficies, linea, punctum non ſint noſtræ mentis figmenta, ſed realis continuæ extenſionis reales termini, vim habent omnia ſummam, & veram demonſtrationem pro ſpatii diviſibilitate efformant.

98 Nihil tamen ex Geometria petitum evidentius demonſtrat diviſibilitatem ipſam ſpatii continui in infinitum, quam illud, quod datis binis rectis poſſit ſemper inveniri tertia continue proportionalis poſt ipſas. Si enim aſſumatur recta quævis utcumque parva, tum alia utcumque magna, quæ illam contineat vicibus quotcumque, ſemper invenietur tertia poſt hanc, & illam, quam hæc totidem vicibus contineat, adeoque continebit hæc tot partes, quot libuerit, &, ut nullus erit limes, ultra quem augeri non poſſit hæc magna linea, ita nullus itidem erit, ultra quem illa tertia imminui non poſſit.

99 Atque hoc quidem non geometricum tantummodo, ſed & metaphyſicum argumentum eſt. Magnum, & parvum non abſoluta ſunt, ſed relativa. Idem quod reſpectu quorundam eſt magnum, reſpectu aliorum eſt parvum. Unum e maximis infantiæ præjudiciis eſt illud, quod quæ infra noſtros ſenſus ſunt, adeoque nihil ſunt ad ſenſum, habeamus pro abſolutè nullis. Illa, quæ ad res nobis ſenſibiles nimis exiguam rationem habent, partibus carere putamus idcirco tantum, quod ea ratio inter ea, quæ ſenſu percepimus, nuſquam habetur. Quæcumque autem ſunt, certos quoſdam limites magnitudinis ſuæ habere cenſemus ita, ut ſi eorum numerus augeatur in infinitum, augeri in infinitum arbitremur ipſorum ſummam, nec concipimus, qui fieri poſſit, ut numero in infinitum aucto, magnitudo in eadem ratione minuatur, & ſumma ſemper eadem perſeveret.

100 Ut hujuſmodi præjudicia deponamus, ſatis eſt concipere magnitudinem illam, quam nos minimam eſſe, & partibus carentem cenſeremus. Poſſet exiſtere homo tantæ magnitudinis, ut noſtram magnitudinem toties contineret, quoties illam exiguam continet hæc ipſa noſtra. Illi æque difficile eſſet in nobis partes concipere, ac nobis in exigua magnitudine illa, & nos reſpectu ipſius idem eſſemus prorſus, quod illa exigua reſpectu noſtri.

101 Cæterum hanc ipſam ſpatii continui diviſibilitatem in infinitum alio etiam argumento evidentiſſimo ſane in communi ſententia extenſionis corporum continuæ, & in quo nihil e Geometria deſumi debeat, manifeſtiſſimam, ni fallor, reddidi in diſſertatione eadem de Lege Continuitatis a num. 22. quod argumentum deſumpſi a binis regulis rectis ſolidis, quæ ita collocentur, ut in imo fundo ſe contingant, in ſummo vertice ſingulis diebus ſequentibus tantum diſtent, quantum præcedentibus diſtabant in medio. Ibi enim demonſtravi, quotidie de ſummo illo primæ diei intervallo detrahi aliquid, & progreſſionis nullum prorſus haberi finem poſſe. Sed ipſum hic innuiſſe ſit ſatis; continui enim ſpatii diviſibilitas ita manifeſta eſt, ut de ea dubitare poſſint ii tantummodo, qui parum admodum in recta quantitatis conſideratione ſeſe exercuerint.

102 Cum ſpatium diviſibile ſit in infinitum, ſi materia continuam extenſionem habet, nec admittantur illa puncta virtualiter, ut ajunt, extenſa, de quibus jam toties dixi, quæ licet ſimplicia, & omni partium genere deſtituta, ſpatium tamen occupent extenſum, & diviſibile, omnino neceſſarium eſt, ut ipſa materia in infinitum diviſibilis ſit. Partibus enim ſingulis ſpatii, ſingulæ materiæ

teriæ partes reſpondebunt, quæ ſeparabiles etiam erunt, & augeri poterit earum numerus, ac imminui magnitudo in infinitum, ut id ipſum in ſpatii partibus accidit, quibus materiæ continuæ partes reſpondent. At ſi admittantur illa puncta virtuali extenſione prædita, vel mea puncta inextenſa, & a ſe invicem vacuo intervallo diſtantia, omnia illa geometrica argumenta materiæ diviſibilitatem in infinitum nequaquam evincunt. Nam in priore illa ſententia ſupra unicum indiviſibile punctum circuli innumeri concipi poſſunt, ac deſcribi; diviſiones conci pi infinitæ, quæ tamen ex utraque ſui parte eandem ſubſtantiam relinquent, non diverſas. In mea autem, ubi per diviſionem maſſæ deventum fuerit ad tot partes, quot puncta ſunt, poſteriores diviſiones omnes ſpatium a maſſa occupatum divident in ſpatiola vacua, non novas materiæ partes avellent. Sit linea punctorum 9 a ſe invicem æque diſtantium; Si dividatur in partes duas, diviſio tranſibit per medii puncti locum, & relinquet hinc, & inde quaterna intervalla vacua, binis realibus materiæ punctis terminata ſingula, primo nimirum, & quinto, quinto, & nono, ternis interjectis inter ipſa. Si ſingulæ partes dividantur bifariam, ſectiones tranſibunt per bina alia puncta materiæ tertium, ac ſeptimum, & quatuor habebuntur partes binorum intervallorum vacuorum ſingulæ, quæ partes binis ſingulæ punctis materiæ terminabuntur, ſingula autem intercipient. Nova biſſectione fient 8 partes continentes ſingula intervalla ſingulæ terminata ſingulis materiæ punctis ſine ullo intermedio. Ulterioribus diviſionibus vacua illa intervalla dividentur, nec particulæ ex illa maſſa a ſe invicem avelli poterunt aliquid materiæ continentes plures, quam 9, nimirum plures, quam ſint puncta in illo vacuo innatantia, nec plures deſignari partes punctis realibus terminatæ, quam 16, nimirum circa media quævis puncta binæ, prope extrema ſingulæ.

103 Licet autem in hac mea theoria non habeatur diviſibilitas materiæ actu exiſtentis in infinitum, habetur tamen quædam, quæ dici poteſt componibilitas materiæ in infinitum, quæ quidem eſt quædam diviſibilitas in infinitum materiæ poſſibilis, & in ordine ad omnes effectus phyſicos æquivalens ipſi actuali materiæ actu exiſtentis diviſibilitati in infinitum. Nimirum in quovis ſpatiolo utcumque parvo collocari poteſt numerus punctorum utcumque magnus. Qui numerus collocatur, ſemper finitus eſt; ſed nullus eſt finitus numerus, quo major haberi non poſſit. Quare aſſignato quovis partium numero utcumque magno, potuit Deus in ſpatio utcumque parvo collocare tantum materiæ, ut deinde in illum partium numerum ſecari poſſit, adeoque nullus eſt determinatus partium materiæ numerus, qui ad Naturæ phœnomena neceſſarius ſit, qui in quovis utcumque exiguo ſpatio haberi non poſſit.

104 In ſententia illa communi diviſibilitatis actualis materiæ in infinitum ſolvi ſemper poteſt hujuſmodi problema: *Data utcumque exigua materiæ particula, eam per ſpatium utcumque magnum ita diſtribuere ut nuſquam habeatur ſpatiolum vacuum majus data menſura utcumque exigua.* Nam illud ingens ſpatium exigua illa ſpatiola continebit quodam numero vicium in ſe determinato. Poterit illa particula materiæ dividi in tot minores particulas, quot exprimit is numerus, & ſingulæ particulæ hujuſmodi poterunt in ſingulis illis ſpatiolis collocari. Quavis ex iis particulis bifariam ſecta, habebitur ſuperficies quædam, quam ſuperficies illius ſpatioli aliquo numero vicium continebit in ſe determinato. Poterunt igitur fieri tot ſectiones ejus particulæ ſpatiolo con-

Digitized by Google

tentæ, quot is numerus exprimit, & tota ipſius ſpatioli ſuperficies poterit ijs foliolis conveſtiri. Quare totum illud ſpatium ingens implebitur particulis materia circumquaque conveſtitis, nec uſpiam erit ſpatiolum vacuum illo majus.

105 In mea ſententia fieri poterit, ut in quocumque exiguo ſpatio tantum materiæ contineatur, quantum requiritur, ut ea per ſpatium utcumque magnum dividatur, nec circa ullum ſpatij punctum habeatur ſphærula data magnitudine utcumque exigua major penitus vacua omni materia. Nam ad id requiritur in eo ſpatiolo numerus punctorum finitus, qui, utcumque ſit magnus, poteſt in utcumque exiguo ſpatiolo contineri.

106 Plerique autem ex ijs etiam, qui materiæ diviſibilitatem in infinitum admittunt, putant diviſionem actualem Naturæ viribus fieri non poſſe in infinitum, ſed, ut in ſequenti nota diximus, & Noſter ex Newtono pariter affirmavit, primigenias materiæ particulas eſſe duriores, & ſolidiores, quam ut ulla Naturæ vi atteri poſſint, aut dividi. Verum licet & in eorum, & in mea ſententia finitus ſit in materia partium numerus ſeparabilium a ſe invicem Naturæ vi, adhuc tamen ingentem ſane ipſum eſſe, conſtat experimentis, & obſervationibus quampluribus, quarum præcipuas & Noſter innuit, & ego in ipſa illa nota expoſui. Infinitum eſſet ſingula calculo ſubijcere. Unius, aut alterius calculi ſubducti fructum indicabo.

107 Uncia argenti inaurata auro continente partem ſexageſimam ponderis ſui protenditur in filum pedum 14000. Quare auri uncia protenditur per ſuperficiem fili 840000 pedibus longi. Graveſandius calculo inde ſubducto oſtendit, unum digitum ſphæricum auri continere tot ſaltem particulas a ſe invicem ſeparabiles, quot exprimit unitas cum cyphris 18, nimirum millies mille milliones millionum ut vocant, qui quidem calculus rite procedit, ſi ſuperficies fili tota auro obtegitur. Quod ſi interrumpitur ſuperficies, & nobis diſtantiam non percipientibus, continua apparet; adhuc tamen immanem ſane particularum ſub ſenſum cadentium multitudinem contineri patet in ſuperficie fili fere pedibus millies mille longi, quæ tamen omnes auri particulam aliquam continent, cum nulla ejus ſuperficiei pars auro deſtituta appareat. At mihi in illa diſſertatione de luminis tenuitate, quam in notis innui, tanta ipſius luminis obvenit tenuitas, ut ſit rarius lumen ipſum, quam hæc noſtra ſunt terreſtria corpora, plus, quam exprimat unitas cum cyphris 73, qui numerus tam immanis eſt, ut licet ſingulis ſemiquadrantibus horæ Sol impleat nova luce ſpatium omne ab ipſo ad diſtantiam noſtræ æqualem circumquaque, ſive majus, quam ſit tota Tellus circiter partibus decies millies, millies, millies, mille; adhuc tamen in noſtræ terreſtris materiæ digito plus materiæ contineatur, quam ſit quidquid luminis is emittere poſſit pluribus ſæculis, quam ſint minutiſſimæ arenulæ, quæ totam Telluris ſuperficiem poſſint obtegere. In qua quidem materiæ diffuſione, quantus eſſe debeat particularum numerus, quam exigua magnitudo, vix noſtra mens percipit. At ego multo adhuc plures, & ſupra omnem captum noſtrum materiæ particularum, naturæ etiam vi ſeparabilium, multitudinem, & tenuitatem eſſe arbitror.

§. XIII.

Digitized by Google

§. XIII. Ad in not. verſ. 1453.

De vi Inertiæ.

108 Vim inertiæ eſſe determinationem, quam habeat materiæ punctum perſeverandi in eodem ſtatu quietis, vel motus uniformis in directum, in quo ſemel eſt poſita, vidimus in nota praecedenti, & eam alios demonſtrare *a Priori*, alios per experimenta, ſive per inductionem, ut Noſter, me autem cenſere nullam ejus demonſtrationem haberi poſſe in hac nota affirmavi. Hic id ipſum oſtendam, ubi illud monendum cenſeo, ætatem quamlibet ſua quædam habere præiudicia in philoſophicis etiam, quibus ex pura quadam conſuetudine aſſenſus præberi ſoleat, ſine ulla ratione ſatis valida, quæ id ipſum evincat, ſed ſola quadam rationis ſpecie, & cæterorum in philoſophia tum temporis excellentium auctoritate. Ejuſmodi ſane fuit ille *vacui horror*, qui tamdiu in ſcholis viguit, ejuſmodi ille circularis, & æquabilis omnium cæleſtium corporum motus, quos vel in aliis lineis, vel inæquali velocitate peragi, qui affirmaret, is immane quoddam perpetraſſe crimen videretur, ejuſmodi alia ſexcenta, quæ quidem omnia, ut & ſuperiora duo, a cauſis quibuſdam finalibus repetebantur, cum vitium quoddam ipſius Naturæ cenſeretur, ſi vacuum quidpiam relinqueret, ſi Cælo figuram aliam, & motum ab iis, quæ perfectiſſima cenſebantur, tribuiſſet. Cavendum ſane, ne nobis ipſis quidpiam ejuſmodi accidat, quo noſtram poſteri credulitatem incuſent.

109 Ac in primis, quod ad rationes pertinet a priori, Eulerus, ſummus quidem noſtri ævi Geometra, & Analyſta, cujus ego in mathematicis diſciplinis ingenium nec laudare, nec admirari ſatis unquam poteto, licet in pluribus, quæ vel ad Metaphyſicam, vel ad Phyſicam pertinent, ab ipſo diſſideam, hoc pacto Mechanicæ ſuæ initio ratiocinatur. Corpus unicum in immenſo vacuo conſtitutum, ſi quieſcit, debet perſeverare in quiete, quia nulla eſt ratio, cur potius in unam, quam in aliam plagam, & cum una, quam cum alia velocitate moveri incipiat, ſi autem movetur, debet moveri in directum, & cum conſtanti velocitate, quia nulla eſt ratio, cur potius in unam, quam in aliam plagam curſum deflectat, cur potius motum accelerct, quam retardet. Perſeverabit igitur in immenſo vacuo in eodem ſtatu quietis, vel motus uniformis in directum, in quo ſemel eſt poſitum. Idem autem & in Mundo plurimis corporibus referto præſtabit, niſi aliqua externa cauſa ſtatum mutare cogat. Nam, quod in vacuo id præſtet, non aliunde provenire poteſt, quam ab ipſa corporis illius natura, quæ poſcat vel quietem, vel motum rectilineum, & æquabilem, cum ex una parte poſitivæ hujus proprietatis principium non poſſit eſſe negativum illud, nimirum rationis ſufficientis defectus, quod negativum poſſit quidem nobis argumento eſſe, rem ita ſe habere, ſed non poſſit poſitivam proprietatem inducere; ex altera vero parte nihil aliud poſitivum in eo caſu habeatur præter naturam illius corporis, quod unicum in immenſo vacuo concipitur. Natura autem corporis, quæ erat in vacuo perſtat eadem & in Mundo. Quare etiam in Mundo requiret vel quietem, vel rectilineum, & æquabilem motum.

110 Hæc quidem eſt, vel huc reducitur tota Euleriani argumenti vis, in qua primum, quod pertinet ad ſtatum in immenſo illo vacuo, ex eo, quod nulla nobis appareat ratio, cur debeat potius in unam moveri plagam, quam in

 aliam,

Digitized by Google

aliam, cum una velocitate, quam cum alia, in unam potius, quam in aliam plagam declinare, velocitatem potius minuere, quam augere, inferre non poſſumus nullam eſſe ejuſmodi rationem; fieri enim poteſt, ut certum motum certam directionem, ſive certam cum certo ſpatio certi temporis conjunctionem, ipſa ejus natura expoſcat; nam debet ibi Eulerus & tempus, & ſpatium abſolutum admittere, quibus ſublatis, nullus eſſe poteſt motus corporis unici in immenſo vacuo ſiti. Fieri poteſt, ut ipſum per ſe æque ad quietem, ac ad motum cum directione quacumque, cum quacumque velocitate, cum quacumque velocitatum, ac directionum perpetuo mutatarum ſerie prorſus indifferens ſit, & debeat ab arbitrio Auctoris ſui ad unum potius, quam ad alium ſtatum determinari.

111 Atque hic quidem illud probe notandum, quietem, & quemvis motum in quavis recta linea cum quavis determinata conſtanti velocitate eſſe unum ex infinities infinitis ſtatibus, ut eſt quivis in quavis linea curva, cum quavis continua velocitatum mutatione motus. Ex illa negatione rationis ſufficientis nihilo magis erui poteſt determinatio habendi unum e prioribus illis ſtatibus, quam unum ex hiſce poſterioribus. Concipiatur punctum ſpatii quodcumque. Æque quiſpiam dicere poterit, nulla eſt ratio, cur potius accedat ad id punctum, quam ab eo recedat. Igitur nec accedet ad ipſum nec recedet, ſed feretur in circulo ipſum habente pro centro. Concipiatur parabola, vel quævis curva per centrum corporis ducta: æque quiſpiam dicere poterit, nulla eſt ratio, cur potius ab ea introrſum recedat, quam extrorſum.

112 Nec vero a continuatione in eodem ſtatu ullum argumentum deſumi poterit. Nam in primis ſupponendum erit, nullum peculiarem ſtatum requiri a natura ipſa corporis illius, vel a Conditoris arbitrio ita, ut ad ipſum debeat, vel ſubito, vel paulatim a quovis alio migrare ſtatu, ad quem externa aliqua vi coactum fuerit. Sic cum inertiæ vis cenſeatur rectilineum, & æquabilem motum exigere, ſi corpus vi quadam curvilineum acquiſiverit, cenſetur, ceſſante ipſa vi, ſponte ſua debere ad rectilineum, & æquabilem redire. Deinde videndum illud, quem ſtatum ante habuerit. Æque ſtatum mutat, ſi e data quavis accelerationis, vel retardationis lege ad quietem, vel æquabilem motum tranſeat, ac ſi a quiete, vel ab æquabili motu ad quamvis ex iis; æque mutat, ſi poſteaquam rectam aliquandiu deſcripſerit, ad curvam quamvis determinatam tranſeat, ac ſi a curva quavis determinata tranſeat ad rectam. Quodnam eſt æquabilitatis, & rectæ lineæ privilegium hoc, ut ipſas relinquere, mutare ſit, alios ſtatus deſerere, non ſit mutare?

113 Nam qui putant curvas lineas e rectis lineolis conſtare, falluntur ſane, & ab intima Geometriæ cognitione plurimum diſtant. Eſt curvis omnibus natura ſua, quam in arcubus utcumque exiguis ita ſervant, ut nullus utcumque exiguus cujuſvis curvæ continuæ, & determinatæ arcus cum chorda ſua confundi poſſit, imo nec cum quovis arcu cujuſvis alterius continuæ curvæ, & determinatæ. Poſſunt ſe in aliquot ſecare punctis, quæ puncta in algebraicis curvis numero ſemper finita ſunt, congruere omnino non poſſunt. Sumuntur ſane arcus curvarum infiniteſimi pro rectis, & viceverſa, idque tuto in iis problematis, in quibus infiniteſimæ quantitates ſecundi ordinis contemni poſſunt; at ſi id generaliter fiat, in plurimos incidetur errores, ut in ſequentis libri ſupplemento videbimus, ubi de deſcenſu gravium per arcus minimos dicendum erit. Quare, qui ex conſervatione ſtatus cenſet deduci tranſitum a circulari motu ad rectilineum.

lineum, per rectam, quæ ſit circuli continuatio, errat profecto æque, ac erraret, qui tranſitum a recta, ad quemvis circulum, vel ad aliam curvam quamvis inde deduceret.

114 Erroris fons eſt quædam, quæ nobis videtur rectæ lineæ major ſimplicitas, de qua agemus initio ſupplementi libri tertii, quam ipſam noſtræ humanæ mentis præjudicium quoddam eſſe arbitror, vi cujus vocabula inſtituimus, quæ ad rectam pertinent, non quæ ad aliam curvam quamvis, ut directionem, flexum, ac alia ejuſmodi, nec habetur vox *parabolatio*, *hyperbolatio*, vel alia ejuſdem generis, ut ficut diclmus directionem mutare, deflectere, ita exprimamus diſceſſum a determinata parabola, vel a determinata hyperbola. Atque hic vocabulorum defectus, mirum quantum nobis illudit, cum quibuſdam ſtatibus, quæ infinities infinitos contra ſe habeant, vocabulum ſuum attributum habeamus, nemini horum ſuo peculiari vocabulo attributo. Sic quietem dicimus continuationem in eodem puncto ſpatii, infinities infinita motuum genera, unico generali motus nomine appellamus, quo pacto, quietem, & motum pro duobus accipimus, ad quorum utrumvis corpus æque indifferens ſit. Inter motus autem rectilineum præferimus aliis, ob ipſum rectæ lineæ, & directionis vocabulum, quæ ubi relinquitur, tum vero mutationem haberi concipimus.

115 Conſiderandum igitur erit, in quo ſtatu primo conditum fuit corpus, ut ille ſtatus conſervetur. Debuit ipſe Divinus Opifex ipſum corpus per aliquod tempuſculum deducere, vel determinare ipſum ad ſtatum quendam, quem deinde ſervaret, ſi perſeverantia in eodem ſtatu debeat eſſe regula quædam, quam in Naturæ inveſtigatione ſequamur. Atque id ipſum probe notandum eſt, ne quis objiciat illud, me in ſuperioribus arbitrio Conditoris uſum, quod ſane Leibnitiani rejicient. Neque enim ex Leibnitianorum principiis hic Eulerus ratiocinatur, licet rationis ſufficientis principium adhibeat. Nam præter quam quod, ut ſupra innui, ſublatis reliquis omnibus, nullum eſt in eorum ſententia ſpatium, aut tempus, quæ omnia ſolo plurium ordine conſtant; niſi arbitrium Conditoris Eulerus admittat, corpus illud in vacuo nec quieſcet, nec ullo determinato, ne rectilineo quidem, motu movebitur. Dicemus enim, nullam eſſe rationem, cur Divinus ipſe Conditor ipſi potius quietem primo tribuat, quam motum, cur motum potius in unam plagam, quam in aliam, cum una velocitate, quam cum alia. Quamobrem quo ipſe argumento, ſemel acceptam vel quietem, vel directionem, & velocitatem conſervandam eſſe, conatur evincere, eodem alius, & quietem, & quamvis directionem excludet.

116 Quamobrem patet, ſi de illo agatur caſu unici corporis in infinito ſpatio vacuo conſtituti, nihil eſſe, quod nos ad quietem, & rectilineum, ac æquabilem motum deducat potius, quam ad alium quemcumque ſtatum curvaturæ cujuſvis, & velocitatis quavis determinata lege variatæ. Quin imo potius cum hi ſtatus infinities ſint plures, quam illi, ad aliquem ex his indefinite potius, quam ad aliquem ex iis delabi deberemus, ſi ad rem a priori tantummodo, & ex ignotis rerum naturis, ex ignoto Conditoris arbitrio definiendam cogeremur.

117 Ubi autem a ſpatio vacuo, ad Mundum plurimis corporibus confertum ſit tranſitus, ibi vero fallaciam quandam committi, mihi quidem eſt admodum manifeſtum. Aliud eſt, quod natura corporis in vacuo conſtituti exigat quietem, vel rectilineum, ac æquabilem motum habendum in vacuo, aliud, quod exigat

exigat ea ipſa habenda in aliis circumſtantiis quibuſcumque. Poteſt eadem natura poſcere illud primum habendum in vacuo, quidpiam aliud habendum in Mundo ita, ut utrumque dis junctive, ut ajunt, & cum in vacuo fuerit, & cum in Mundo, expoſcat, ſed habendum conditionatè alterum, ubi fuerit in vacuo, alterum, ubi fuerit in Mundo. Nimirum cum in vacuo erit, poteſt requirere id, ut in Mundo habeatur motus quiſpiam, ut curvilineus, & difformis, æquè ac, cum in Mundo eſt, requirere, ut in vacuo habeatur quies, vel motus rectilineus, & uniformis.

118 Si partes materiæ ex ipſa natura ſua habeant determinationem tendendi ad ſe invicem, & ponatur in vacuo immenſo una particula quieſcens, nec ulla alia ſit ratio, quæ ad motum determinet, perget quieſcere. Si vero alia particula in vacuo illo collocetur, jam illa prior nulla externa cauſa in ipſam agente, ſed ipſa ſua natura illam determinante, ad illam accedet, & ex occaſione hujus alterius novæ ad hanc novam accedere incipiet, & moveri, nimirum *purificata*, ut ajunt, conditione illa, ſub qua motum exigebat Natura. Res eſt multo magis manifeſta, quam ut in ea uberius exponenda ſit immorandum.

119 Alii plerumque determinationem in corpore volunt ad quietem, vel motum rectilineum, & uniformem, ob ſimplicitatem rectæ lineæ, vel ob maximam ipſius brevitatem. Simplicitatem nimirum, & brevitatem debere ſibi Naturam proponere, quod quidem argumentum a cauſis finalibus petitur, fonte mihi ſemper ſuſpecto.

120 At quod ad ſimplicitatem pertinet, videbimus in ſupplemento libri 3, ut innui, cur recta linea noſtræ humanæ menti videatur ſimplex, quæ nihilo revera in ſe ipſa ſimplicior ſit, quam alia quævis curva, imo etiam potius multo complicatior, utpote quæ infiniti notionem, in quod utrinque natura ſua excurrit, involvat. Quod autem pertinet ad brevitatem; unde nobis conſtat maximæ brevitatis compendium ſibi in hiſce primis motuum elementis propoſuiſſe Naturam, cum ipſa vel aliud quodpiam e tot aliis compendiis ſibi poſſit proponere, vel etiam fortaſſe nullum? Quin imo cum in tota rerum congerie, ex qua Mundum compoſuit, nec ſimplicitatem, nec brevitatem maximam omnino quæſierit, videmus enim adeo multiplices tot animantium, vegetabilium, mineralium formas, tot implexas ubique curvarum ſpecies ex tanta tot virium tam varia conjunctione ortas, quæ vires, ut ego ſane cenſeo, omnem prorſus in Mundo ipſo rectilineum motum omnino excludunt; unde nobis conſtabit, præclarum eſſe aliquid in ipſa ſimplicitate, ac brevitate, quod Natura in ſingulis corporibus, vel in ſingulis viribus ſectari omnino debuerit? Quibus omnibus & illud addam. Cum, ubi de rationis ſufficientis principio ſupra egimus §. 1v. viderimus Naturæ Auctorem nequaquam determinari ad optimum; unde nobis conſtabit id, quod etiam præclarum eſſe concedatur, ab ipſo revera ſelectum eſſe, & conditum? Naturam ego quidem in primis rerum elementis ſimplicitatem ſectari arbitror, multiplices, ac varias formas a combinatione diverſa repetere. At id non a priori, non a neceſſitate quapiam deduci arbitror, ſed potius indicari tantummodo ab obſervatione diligenti eorum, quæ perficit, ut in decimi libri ſupplemento uberius exponam.

121 Excluſa hac vis inertiæ demonſtratione a priori, facile eſt aliam, quæ ab obſervatione deſumitur, & quam Noſter attigit, ac ego in hac nota expoſui, pariter excludere. Nunquam enim obſervare licet quietem, vel motus vere re-

re rectilineos, & uniformes, qui, ut monui, nuſpiam ſunt in Natura, admiſſa etiam ipſa inertiæ vi. Nunquam enim motum habemus corporis ſolam inertiæ vim ſentientis, cum tam multæ aliæ vires perpetuo agant in omnia materiæ puncta. Et quidem eum Terram ipſam motu perpetuo curvilineo tranſlatam ponant, imo etiam perpetuo æquilibrii cauſa trepidantem, qui generaliter admittunt inertiæ vim; quæcunque experimenta hic in Tellure inſtituimus, motum exhibent reſpectivum tantummodo reſpectu Telluris, qui reſpectivus motus, ſi accurate rectilineus eſſet, & uniformis, jam ille abſolutus ejuſdem corporis obſervati deberet eſſe, & curvilineus, & inæqualis, ob curvilineum, & inæqualem Telluris motum, cum eo ipſius reſpectivo motu componendum.

122 Accedit, quod, cum quies abſoluta, & motus abſolutus, ut ſupra docuimus, ſub ſenſum nec cadant, nec cadere omnino poſſint, evidens eſt, nullo nos experimento, nulla obſervatione deprehendere unquam poſſe motum ullum, quem conſtet rectilineum, & uniformem eſſe abſolutè.

123 Accedit, quod noſtra experimenta, & obſervationes ad tractum ſe extendunt per quam exiguum, in quo ingentis curvæ arcus poſſet a recta linea nihil ad ſenſum diſcedere. Si quis aquæ in puteo ſtagnantis ſuperficiem exploret, rectilineam inveniet, & planam. Quid, ſi inde deduceret univerſam marium ſuperficiem planam eſſe? In quem is errorem incideret?

124 Ac multo quidem plura ejuſdem generis argumenta proferri poſſent, quæ omnia evidentiſſimè demonſtrent, vim inertiæ aſſumptam pro determinatione, quam habeat corpus perſeverandi in eodem ſtatu quietis, vel motus uniformis abſoluti in directum, niſi externa vis quæpiam in ipſum agat, nec a priori, ſive a rerum natura, nec a poſteriori, ſive ab obſervationibus ullo pacto demonſtrari poſſe, nec utcumque probari. Atque huc etiam pertinet illud, quod in notis ſatis expreſſi, in prima autem parte Diſſertationis de lumine uberius expoſui, non poſſe directam in Naturæ inveſtigatione teneri viam, ut ex principiis quibuſdam, vel obſervationibus directa, & legitima illatione generales Naturæ leges deducantur, ſed, ut in epiſtolæ ſecretis notis conſcriptæ enucleatione fit, indirecta methodo, & per attentationem debere nos progredi.

125 Porro illud in primis mihi perſuadeo, eſſe in Natura legem, qua omnia materiæ puncta in ſe invicem tendant viribus quibuſdam, quæ a diſtantiis pendeant, ſive hæc determinatio ſita ſit in ipſa punctorum natura, ſive potius a libero Divini Conditoris arbitrio unice pendeat, materiâ ipſâ ad legem quamcumque ab ipſo libere ſanciendam paratiſſima. Præſcindendo ab hac determinatione, habere determinationem quieſcendi, vel abeundi per lineam rectam motu uniformi rectitudine, & uniformitate reſpectiva reſpectu ſpatii cujuſdam, quod concipiamus circa nos, in quo omnia corpora, quæ ſub noſtros ſenſus cadere poſſunt, continentur. Habere autem determinationem conjungendi motum per illas vires productum, cum motu præcedenti per hanc determinationem conſervato, juxta leges compoſitionis motuum, de qua paulo inferius.

126 Huc nos ducunt per attentationem obſervationes cum novis phœnomenis collatæ. Nam primo quidem motus corporum in ſuperficie Telluris obſervati, ubi nec detorqueantur, nec ſiſtantur, niſi cauſa adſit, ut incurſus in alia corpora, gravitas, motus aeris, vel aliud quidpiam ejuſmodi, ingerunt nobis ſpeciem determinationis abeundi per rectam lineam uniformiter, niſi quatenus vires quæpiam cogant mutare ſtatum. Eam legem ex iis obſervationibus utcumque eru-

erutam attentando, traducimus ad ſpatia longiora, & Mechanicam inde ordinamus cum ſucceſſu. Egredimur e Tellure, & eandem legem ad majora ſpatia traducimus extra ipſam Tellurem ſita, ac rectilineo lucis progreſſu aſſumpto Aſtronomica phœnomena ſibi conformia invenimus, aſſumpta determinatione ad rectilineum, & uniformem motum cæleſtium corporum, niſi quatenus ipſa detorqueri cogat, & viam deflectere gravitas, ac totam Planetarum, Cometarumque theoriam ordinamus phœnomenis itidem admodum conformem. Hinc nimirum ſtatuimus, ut generalem Naturæ legem pro corporibus omnibus, determinationem perſeverandi in eodem ſtatu quietis, vel motus uniformis in directum, niſi quatenus ea aliæ vires ad mutationem determinent, ſive hæ aliæ vires ipſis corporibus intrinſecæ ſint, & in eorum natura inditæ, ſive ſint extrinſecæ, & adventitiæ.

127 At ea omnia æque prorſus procedent, ſi hujuſmodi determinatio non ſpatium abſolutum reſpiciat, ſed ſpatium quoddam, quod nos concipiamus ut mobile, quo omnia corpora, quæ ſub noſtros ſenſus cadunt, continentur. Si nimirum nos concipiamus primo orbem aliquem ſphæricum, quo nos, & Planetæ omnes, ac aſtra contineantur ſimul, & corpora habeant vim inertiæ reſpectivam reſpectu ejus orbis, determinentur nimirum ad quietem, vel motum reſpectivum reſpectu ejus veluti corticis; tum ille cortex, ſive orbis motibus quibuſcumque moveatur, corpora omnia intra ipſum concluſa motus reſpectivos reſpectu ſui ipſorum, & ipſius corticis haberent prorſus eoſdem, licet abſolutus motus in vacuo ſpatio immobili componeretur ex ipſorum reſpectivo motu, & illo motu communi. Nemo autem eodem cortice incluſus ullo poſſet experimento deprehendere, an ille cortex motum haberet ullum, & ſi haberet, quem haberet potiſſimum; omnia enim phœnomena eodem ſe haberent modo. Sic fere navi tranſlata, qui intra conclave ſtat, ipſius motum comitatus non ſentit: fere, inquam, cum enim is vim inertiæ non habeat reſpectivam reſpectu navis, ſi navis ipſa repente conſiſtat in ſcopulum incurrens, motu prius concepto protruditur, & cadit, quod quidem nequaquam accideret, nec ullum prorſus indicium de navis motu habere poſſet, ſi vim inertiæ reſpectivam haberet, reſpectu navis ipſius, cujus omnes motus neceſſario cumitaretur. Quod ſi ſublato etiam cortice illo, vel ipſa corporum natura, vel extrinſeca Conditoris lex requirat in corporibus omnibus motum quendam communem, quem nimirum haberet totum ſpatium reſpectivum cortice incluſum, & cum ipſo cortice tranſlatum, habebimus ſpatii mobilis mente ſola concepti motum quendam, & corporum incluſorum vim inertiæ reſpectivam reſpectu ejus ipſius ſpatii mobilis, nec quiſquam illo ſpatio contentus deprehendere unquam poterit, an ejuſmodi habeatur motus, & ſi habeatur, qui ſit.

128 Quoniam evidens eſt nunquam per experimenta, & obſervationes deprehendi poſſe, an vis inertiæ ſit hoc modo reſpectiva reſpectu ſpatii cujuſpiam, quod ita mobile concipiatur, an abſoluta, & nihil hac de re a priori judicare poſſumus, uti abunde demonſtravimus; ſpectatis tantum naturalibus principiis incertum omnino erit, utrum accidat, nec ulla prorſus habebitur ratio pro altero potius, quam pro altero, ſi rem altius conſideremus, & præjudicia ſeponamus.

129 Hæc ipſa jam olim exhibui in diſſertatione de Maris æſtu, ubi etiam de rectæ lineæ minori ſimplicitate, quam curvarum omnium redeuntium in orbem plura

plura protuli, & oſtendi, hac via conciliari poſſe omnia præclariſſima Recentiorum comperta cum vera etiam, & abſoluta quiete Telluris. Sit vis inertiæ non abſoluta, ſed reſpectiva reſpectu ſpatii cujuſdam, quo Tellus, & aſtra omnia includuntur, ac maneant cætera omnia, quæ a quibuſvis Recentioribus philoſophis, ut Newtonianis, requiruntur, & id ſpatium aliquandiu quieſcat: habebitur abſolutus Telluris motus, quem ipſi Newtoniani requirunt. Incipiat jam illud ſpatium moveri motibus omnibus contrariis, & æqualibus iis, quibus movebatur Tellus. Tellus ipſa reſpectu ejus ſpatii perget moveri eodem modo, ac prius, ſed is non erit motus abſolutus. Omnino abſolute quieſcet ab ipſo ſpatio mobili retracta tantum, quantum intra ipſum ſpatium per reliquas vires progreditur, quæ abſolutum ejus motum non gignent, ſed ejus tranſlationem impedient.

130 Illud ex iis, quæ hic exhibui, evidentiſſimum eſt, nos, nec per obſervationes, nec ex rerum natura poſſe cognoſcere, an eo modo ſe res habeat, an ſecus; an vis inertiæ ſit abſoluta, an reſpectiva reſpectu ſpatii cujuſpiam, quod mobile concipiatur, & motum certum habeat, quem habere poteſt contrarium Telluris motui reſpectivo reſpectu ejus ſpatii, vel motui reſpectivo Jovis, vel Saturni, vel corporis celeſtis cujuſvis, vel cujuſvis materiæ puncti in eodem ſpatio conſtituti, vel alium quemvis nihil ab iis pendentem, ſtante per abſolutam quietem vel Tellure, vel Jove, vel Saturno, vel illo quovis materiæ puncto, vel nullo. Id ab arbitrio Conditoris pendebit, qui cujuſcumque naturæ corpora, ſi ab eorum natura id pendet, condere potuit, vel ſua pro quovis corporum genere, ſi ad ea omnia æque indifferentia ſunt, libertate uti, & arbitrariam, quam vellet, ſancire legem, ac, quem liberet, motum illi concepto ſpatio tribuere; nec omnino demonſtrari poterit, alterum potius præſtitiſſe, quam alterum.

131 Hoc igitur pacto, quæcumque de motu Terræ dicturus eſt Noſter, quæcumque dicam ego, cum ipſa etiam abſoluta Telluris quiete optime cohærebunt, ſi nimirum intelligatur motus reſpectivus reſpectu ejus ſpatii, quod concipiatur mobile, & tranſlatum motu contrario, & æquali motui terræ reſpectivo intra ipſum, reſpectu cujus ſpatii concepti, ut mobilis, reſpectiva ſit vis inertiæ; ac remanebit Telluris partibus ſola trepidatio exigua, quam æquilibrium requirit a motibus in ſuperficie factis perpetuo perturbatum. Illud unum addiciam. Quoniam id ſpatium continet omnia corpora, quæ a nobis ſentiri poſſunt, quæ eſt quædam rerum ad nos pertinentium veluti abſoluta univerſitas, ut motus reſpectivi reſpectu ipſius diſtinguantur ab iis, qui multo magis reſpectivi ſunt, nimirum reſpectu ſolius planetarii ſyſtematis, vel reſpectu ſolius Terræ, vel reſpectu minorum etiam partium, ut navis; poterit illud ipſum ſpatium hic appellari impoſterum ſpatium abſolutum, & motus in eo factus motus abſolutus. Quod ſi fiat, ubicumque in poſterum dixerimus abſolute motum, vel etiam motum abſolutum, intelligendum erit de motu reſpectivo reſpectu illius ipſius ſpatii continentis omnia corpora, quæ a nobis ſentiri poſſunt, ſive ipſum ſtare dicatur, Terra mota, ſive moveri motu quovis, ſive moveri motu contrario motui Terræ, quieſcente ipſa Terra, ut ſic omnes loquendi formulæ, quas adhibebimus ſemper impoſterum, communes ſint cuicumque ſententiæ, & quæ demonſtrabimus, æquè omnibus aptari poſſint.

132 Cæterum, ut innui in ſuperioris notæ fine, ut vocabulis communiter

admiſſis ipſe etiam uti poſſim, vim inertiæ appellabo determinationem, quam habet corpus quieſcendi, vel movendi ſe uniformiter in directum reſpective reſpectu ejus ſpatii, niſi alia aliqua vis cogat mutare ejuſmodi ſtatum, ſive ejuſmodi determinatio ſit inſita ipſi naturæ corporis, vel potius extrinſeca, & ab arbitrio Conditoris pendens, & ſive illæ aliæ vires, de quibus agemus in paragrapho ſequenti, pendeant a libera Conditoris lege, ſive ab ipſa corporis natura, ſive ab aliorum corporum actionibus, ſive ab alia cauſa quavis; quo quidem pacto evidens omnino eſt, vi inertiæ prædita eſſe corpora; ſed ejus idea præciſiva erit, & uſum habebit tantummodo ad facilius determinandos motus, qui in Natura habentur, incipiendo a ſimplicioribus, qui per ipſam ſolam haberentur.

§. XIV. In notam ad verſ. 1485

DE VARIIS VIRIUM ACTIVARUM GENERIBUS, ET EARUM EFFECTU.

133 Expoſita inertiæ vi, quæ in corporibus admitti debet, exponenda ſupereſt natura virium activarum, quæ corporis ſtatum ab ipſa inertia requiſitum perturbant. Cauſas, quæ motum gignunt, accelerant, retardant, detorquent, ego quidem potentias appello, earum actiones dico vires, licet ipſæ etiam cauſæ virium nomine appellari ſoleant, & viceverſa, potiſſimum ubi agitur de effectu producto, ut & ipſæ cauſæ quandoque per tranſlationem quandam pro effectibus in communi etiam ſermone accipi ſolent.

134 Hujuſmodi cauſæ ſunt Impenetrabilitas in aliorum corporum impulſu, Gravitas, Magnetiſmus, Elaſticitas, Electricitas, Cohæſio partium, Fermentatio, atque aliæ ejuſmodi. Hæ quidem vel in ipſa corporum natura ſunt imbibitæ, vel ipſis ſuperadditæ, & ſeparabiles ab iis, vel a libera Conditoris lege pendent, corpore quovis ad illas omnes æque indifferenti per ſeſe. Quid eorum habeatur, id vero e phœnomenis omnino nunquam definiri poterit, cum ipſa phœnomena eodem pacto in omnibus ejuſmodi caſibus debeant ſuccedere; nec vero per ipſam rerum naturam innoteſcet, ad quam nobis nullum patere aditum, vidimus jam pluribus in locis.

135 Mihi tamen omnes ejuſmodi cauſæ in unica ſimpliciſſima, & omnibus materiæ punctis communi virium lege conſiſtunt, quam ſimpliciſſima in ſe ipſa, & unica exponit curva linea, ut innui ſupra num. 9, & libro 10 fuſius, ac admodum clare oſtendam, eas omnes potentias a ſola diverſa punctorum combinatione derivari, quæ & generales, & præcipuas quaſque e particularibus corporum proprietatibus exhibeat, per ſolam compoſitionem virium ejuſdem generis, quas diverſus in diverſis maſſis punctorum numerus, diverſa diſtantiarum, & poſitionum combinatio reddat admodum diverſas.

136 Hinc autem conſequitur illud vim inertiæ, & potentiarum naturam omnium nihil eſſe aliud, niſi ipſam punctorum naturam, vel ipſis ſuperadditam virtutem, vel liberam Conditoris legem, quæ velit quietem, vel æquabilem, & rectilineum motum ſemel conceptum pro caſu, quo unicum materiæ punctum ſit in immenſo vacuo, pro caſu autem, quo plura ſint puncta materiæ, velit motum juxta leges explicandas paulo inferius compoſitum ex pluribus motibus, quorum unus ſit is, qui habebatur, vel qui haberetur ab illo puncto,

de quo

de quo agitur, ſublatis repente reliquis omnibus, reliqui vero motus ſine acceſſus determinati ad ſingula alia puncta, vel receſſus ab iis diverſi pro diverſa diſtantia ab iiſdem.

137 In hac ſententia nullum materiæ punctum exercet in aliud punctum ullam actionem phyſicam, qua ejus ſtatum perturbet, ſed occaſionem mutandi præbet, determinando conditionatam exigentiam ipſius eſſentiæ, vel virtutis ipſi additæ, vel liberam illam Conditoris conditionatam legem; qua quidem in re ſane non video, cur ii in primis, qui, ut Carteſiani potiſſimum, occaſionales cauſas in natura ita admittunt, ut a Deo cenſeant motus fieri omnes ex occaſione præſentiæ corporum impellentium, impulſum ipſum tantopere velint, & mutuam gravitatem abſurdam cenſeant, quaſi difficilius ſit, occaſionem determinati motus producendi aſſumere a quavis determinata diſtantia, quam a diſtantia omnino nulla. Ad mutuas ſive accedendi, ſive recedendi vires, quæ attractivæ dicantur, vel repulſivæ, nulla eſt neceſſitas actionis phyſicæ in diſtans. Satis eſt illud, ut punctum materiæ ab altero diſtans materiæ puncto conditionem impleat, ſub qua ab ipſo illo altero puncto in ſeſe, vel in illo a virtute ipſi ſuperaddita, vel a ſupremo ipſo Conditore motus quidam determinatus producatur, ſive, quod idem eſt, puncta realia loci mutentur certo nexu inter locum, & tempus.

138 Hinc nimirum nullam ego admitto phyſicam actionem, quæ in ipſo puncto gignat aliquid, quod ſit velocitas illa, quam in notis appellavi in actu primo, ſive potentialem. Eam puto, nihil aliud eſſe, quam vim inertiæ ipſam a præcedentibus omnibus puncti ſtatibus determinatam. Vis inertiæ eſt generaliter determinatio perſeverandi in eodem ſtatu quieſcendi, vel movendi uniformiter in directum, quicumque is ſtatus ſit. Velocitas potentialis eſt determinatio habendi quendam determinatum motum, quovis ſequenti dato tempore, quem determinet ſtatus primus corporis, & ſumma omnium determinationum, quæ deinde advenerunt, uſque ad id tempus, orta ex omnibus diſtantiis, quas habuit corpus ab omnibus punctis materiæ, & tempore, quo ſingulæ perdurarunt.

139 Idcirco autem ad habendam a priori menſuram velocitatis hujuſce potentialis, oporteret noſſe primum illum ſtatum, quem corpus a Conditore ſupremo habuit in Mundi exortu, tum reliquas omnes circumſtantias illas, quæ indeterminatam ejus naturam determinarunt ſubinde, & invenire ſtatum a tot tam diverſis circumſtantiis determinatum, per quæ omnia illa determinatio conſtituitur. Cum id implexum admodum ſit, & nobis impervium, concipimus determinationem hanc ipſam jam definitam, non vagam, tanquam aliquid ab illis omnibus circumſtantiis inductum in ipſum corpus, eamque metimur potius illo actuali motu relato ad tempus, ad quem motum eſt determinatio, ſive illa actuali velocitate, quam per ſe ſola, & niſi aliud quid occurrat, expoſcit. Eam autem ut aliquid perpetuo mutabile concipimus huic actuali velocitati proportionale, & ut ejus mutationis cauſas itidem concipimus potentias illas, quas diximus mutare ſtatum. Quoniam vero eas concipimus, ut cauſas; concipimus itidem earum actiones, quibus hic effectus producatur. Hæ actiones phyſicæ actiones non ſunt, ſed a nobis conceptæ, adeoque nullam naturam in ſe ipſa determinatam habent, quæ certam menſuram exigat, ſed a nobis conceptæ, a nobis menſuram poſſunt aſſumere, quas, ut vulgari utamur modo

æſtimandi virium omnium energiam ab effectu, quem producunt, & tempore, quo illum producunt, a quantitate novæ velocitatis in ſingulis materiæ punctis genitæ, & a tempore, quo generatur, metiri poſſumus.

140 Quod omnia virium genera eo pacto metiamur, ſatis patet. Qui ipſas foſſorum vires inter ſe confert, illas æſtimat a magnitudine operis perfecti, & temporis, quo perficitur brevitate. Nam duplas habere vires dicimus eos, qui duplum opus eodem tempore, vel qui idem opus duplo breviore tempore perficiant; nec dubitamus, eandem vim æqualibus temporibus eundem præſtare effectum. Idcirco autem, ſi etiam de phyſica aliqua actione, quam potentiæ exercerent, ageretur, nullo pacto in animum inducere poſſem, ut illi aſſentirer, qui eandem potentiam ad ſingula ſpatiola æqualia ſingulas æquales actiones exercere cenſeat, non ad ſingula æqualia tempuſcula. Nemo enim Sutorem plus operis perfecturum eodem tempore arbitrabitur, ſi in navi celerrimo provecta curſu artem exerceat ſuam, quam ſi in quieſcente.

141 Ejuſmodi agendi modum in potentiis omnibus agnoſcit P. Vincentius Riccatus, ſummus e Societate noſtra Geometra, & Analyſta, in elegantiſſimis Dialogis ſuis de Viribus vivis. Agnoſcit ipſe cum Leibnitianis in corpore in motu poſito quaſdam, quas vires vivas idcirco appellant, quod cum ipſo motu conjunctæ ſint. Eas Riccatus a potentiis gigni, & pro potentiarum effectu habendas eſſe, contendit, quas ipſæ potentiæ producant per actiones proportionales ſibi, & non tempori, quo agunt, ſed ſpatio, per quod agunt. At ego, ut in ſequentis libri ſupplemento videbimus, ipſas vires vivas nullas eſſe cenſeo in Natura, & ut inutiles prorſus rejicio; ac pro effectu potentiarum conſidero non vires ejuſmodi vivas, ſed velocitatem ductam in maſſam, quam ille ex virium vivarum generatione reſultare tantummodo affirmat, non pro effectu haberi poſſe, quod ipſum meo quidem judicio facile in litem quandam recidet de puro nomine. Mihi pene cum omnibus fere Mechanicis, cum ipſo virium vivarum parente Leibnitio licebit ipſam ejuſmodi velocitatem habere pro effectu, quæ quidem a potentiis illis manifeſto conſequitur, & ut ab illis effecta concipitur.

142 Quare cum in re noſtrâ actio ipſa non phyſica ſit, ſed a nobis concepta, cum ejus menſuram non aliunde habeamus, quam ab illo effectu, quem concipimus, effectus autem, quem concipimus, ſit ipſa velocitas omnium materiæ punctorum, quam vocabulo carere ſuo, in notis diximus, & ejus loco idcirco quantitatem motus ſubſtitui, ſive velocitatem ductam in maſſam, qua nobis quantitas quædam velocitatis per omnes diſperſæ particulas exhibetur, ab hac velocitatis, ſeu motus quantitate eam metiri jure poterimus, dicendo duplam illam, quæ eodem tempore duplam generet velocitatis, vel motus quantitatem, vel eandem dimidio tempore. Et quidem in iis viribus, quæ nobis maxime compertæ ſunt, ut eſt gravitas, quam quotidie experimur, videmus ſane, ubi nulla eſt mutationis ſuſpicio in earum magnitudine, ac robore, duplum velocitatis ab iis ortæ incrementum haberi duplo tempore, triplum triplo, quæcumque fuerit velocitas, cum qua interea id corpus progreditur, quod maxime in gravibus libere cadentibus obſervamus; ac ſi binos niſus, ſive preſſiones, quæ ante motum habentur, inter ſe conferamus primum, tum motus eodem tempore genitos, hi illis ſemper proportionales inveniuntur, quodcumque ſpatium interea utcumque inæquale ob præcedentes velocitates inæquales deſcribatur.

Nec

143 Nec illud reponi poteſt, quo potiſſimum argumento utitur Riccatus Ipſe, velocitatem non poſſe conſiderari, ut effectum actione potentiæ genitum, quia ſic non ſervatur æqualitas cauſæ cum effectu, qui effectus in compoſitione motuum, de qua paulo infra, eſſet minor, quam cauſa ſua, in reſolutione major: haberi autem ejuſmodi æqualitatem inter effectum, & cauſam, ſi concipiatur aliquid, quod potentiæ producant per actiones ſingulis ſpatiolis, non ſingulis tempuſculis exercitas, quod ipſum dicatur vis viva, quæ ſit verus potentiarum effectus, ex quo velocitas reſultet quodammodo, non autem ipſarum effectus ſit. Nam in primis non ipſi cauſæ, ſed actioni æqualis eſſe debet effectus, vel potius proportionalis. Cauſa enim eadem diverſas in diverſis circumſtantiis vires exercere poteſt, ſive diverſas actiones exercere, ut eadem ejuſdem corporis gravitas, quæ nimirum in mea, & plerorumque Newtonianorum ſententia eadem eſt potentia, in quacumque diſtantia ſitum ſit grave, minorem effectum edit in majore diſtantia, & idem pondus in communi ſententia in longiore vecte majorem exercet niſum. Quamobrem facile quiſpiam omnem argumenti vim eludere poſſet dicendo, potentias, ubi coniunguntur, diverſo agere modo, ac ubi ſeorſum agunt, & eandem potentiam in iis circumſtantiis, in quibus habetur compoſitio, exercere minorem vim, in iis, in quibus habetur reſolutio, majorem, quam ubi ſola ſeorſum libere agat, quo pacto admodum facile declinaret difficultatem, & quantitatem velocitatis haberet pro effectu actionum in quovis caſu, ipſis actionibus ſemper proportionali, quamvis aliquando minorem, aliquando vero majorem, ob ipſas actiones minores aliquando, aliquando vero majores.

144 At licet eandem ſemper eædem potentiæ in iiſdem diſtantiis exercere vim concipiantur, nihil adhuc ex compoſitione, & reſolutione virium abſurdi conſequeretur. Nam in compoſitione ſola actionum oppoſitio effectum minueret; reſolutio autem vera in Natura per me habetur nunquam, quorum utrumque paulo infra videbimus.

145 Ex iis omnibus ſatis patet, poſſe nos potentias illas concipere, ut cauſas quaſdam, quæ per actiones ſingulis tempuſculis exercitas, non phyſicas illas quidem, ſed a nobis conceptas tantummodo, producant in ſingulis materiæ punctis ſuas velocitates, quarum velocitatum ſumma in omnibus punctis productarum, quæ habetur, illâ, quam communiter dicimus velocitatem, ductâ in maſſam, ſit proportionalis ipſi vi agenti, ac tempori, quo agit. Nec me illius, quam petitionem principii appellant, redarguendum cenſebit, qui hac vis inertiæ, velocitatis, potentiæ, vis activæ, notione præmiſſa, quod ſatis luculenter præſtiti in mea diſſertatione de Viribus Vivis, affirmantem videbit, vires æquales ſingulis tempuſculis æqualibus æqualiter agere, & æqualem gignere quantitatem velocitatis in maſſam ductæ; quam quidem ita advenire, ut eadem agente vi, temporibus æqualibus æqualia fiant ejus incrementa, quæcumque fuerit jam acquiſita velocitas, adeoque advenire proportionalem vi, & tempori, non ſpatio interea percurſo, nec ipſe Riccatus negat, & omnes norunt Mechanici.

146 Patet etiam ex iis omnibus, quæ huc uſque de mea virium theoria pluribus in locis expoſui, me nullam agnoſcere vim, quæ momento temporis motum producat, de quo virium genere in ipſa nota brevi egregi, nullum nimirum immediatum impulſum, ſed ſolas vires perpetuo agentes pro ratione ſui

ſui ipſarum, & temporis, quo agunt, quæ menſurandæ ſint a celeritate in maſſam ducta, ſive a quantitate motus directè, & reciprocè a tempore conjunctim.

147 Facile autem ex iis, quæ diximus, eruuntur communes formulæ pro generatione velocitatis, vel motus facta per vires activas potentiarum. Si vis motrix dicatur V, tempus quo illa agit T, celeritas C, maſſa, ſeu quantitas materiæ Q, aſſumptis rite unitatibus in quovis harum quantitatum genere, erit $VT = QC$, unde, ſubſtitutionibus, & permutationibus rite factis, plurimæ aliæ formulæ, plurima theoremata deducuntur. Quod ſi vis acceleratrix, quam in nota rite expoſui, & quæ a maſſa præſcindit prorſus, ac ſolum puncti cujuſcumque velocitatem genitam reſpicit, W dicatur, erit $WT = C$, quæ formula uſum ſemper habet, ubicumque de eâdem agitur maſſa, nimirum de eodem corpore, & ubi de gravibus libere in eadem ſuperficiei terreſtris parte cadentibus eſt ſermo, in quibus omnibus, ut in ipſa nota innui, & infra fuſe docebimus, vis motrix eſt proportionalis maſſæ, & vis acceleratrix eadem prorſus. Quoniam autem erit e formula poſteriore $W = \frac{C}{T}$ & e priore $\frac{V}{Q} = \frac{C}{T}$ patet fore $W = \frac{V}{Q}$, ſive vim acceleratricem directe, ut vim motricem, & reciproce, ut maſſam, quod theorema expoſui in ipſa nota, ut itidem ex hiſce poſterioribus formulis plurima alia theoremata deduci poſſunt.

148 Ante quam, quæ ad hanc pertinent notam, deſeramus, diligenter cavendum illud, quod ibidem ſatis expoſui, ut diſtinguantur a ſe invicem binæ rationes accipiendi tempus in motuum generatione, ne in æquivocationes pleraſque incidatur.

§. XV. Ad not. in verſ. 1514.

DE COMPOSITIONE MOTUUM, AC VIRIUM AGENTIUM SECUNDUM EANDEM RECTAM.

149 Quid ſit hæc motuum, ac virium compoſitio, & quomodo inde oriatur quies in æquilibrio, ac motus acceleratus, & retardatus, ſatis expoſui in hac nota. Exponendum eſt hic, qua lege fiat acceleratio, ac retardatio, pro diverſa virium lege, ſive quo pacto inter ſe connexa ſint iſta quatuor, vis activa acceleratrix, tempus, quo illa agit, celeritas, quam ea gignit, ſpatium quod interea percurritur. Id autem fit per quaſdam, quæ dicuntur virium, ac celeritatum ſcalæ, quæ tam per algebraicas formulas differentiales exhibentur, quam per Geometriam.

150 Quod ad formulas algebraicas pertinet, dicatur vis acceleratrix u, celeritas c, tempus quo agit t, ſpatium, quod percurritur s; & erit ds ſpatiolum deſcriptum tempuſculo dt, celeritas acquiſita illo tempuſculo dc. Hine per n. 75. habebitur primo $ds = cdt$, ſecundo per num. 145. $dc = udt$, & quoniam ex prima, eſt tertiò $dt = \frac{ds}{c}$, ex ſecunda quartò $dt = \frac{dc}{u}$, erit $\frac{ds}{c} = \frac{dc}{u}$, adeoque quintò $uds = cdc$. Plures aliæ formulæ facile inde derivantur, ſed per haſce ſolas, data lege virium per ſpatia, vel tempora, admodum facile ope calculi integralis definiuntur omnia, quæ huc pertinent. Verum, ipſo integrali calculo omiſſo, exibe-

exhibebo hic admodum expeditas geometricas conſtructiones, quæ rem perficiunt, & vulgo notiores ſunt.

151 Referant primo loco in fig. 2. partes *AH* rectæ *AC* tempus ab initio motus, recta *HI* parallela cuidam *CE* referat vim acceleratricem debitam cuivis momento *H*, area *DAHI* clauſa ordinatis *AD*, *HI*, abſciſſa *AH* exprimente tempus, & linea *DI*, quam generat vertex *I* ordinatæ motu continuo, dum momentum expreſſum ab *H* duratione continua generat tempus expreſſum ab *AH*, exprimet velocitatem genitam ejuſmodi vi toto tempore *AH*. F.2.

152 Patet ex eo, quod velocitas eodem pacto generetur a vi in tempus ducta, quo area *DAHI* a recta *HI* ducta in rectam *AH*. Et quidem cum velocitas conſtanti vi genita ſit, ut vis, & tempus (num. 146), patet, velocitates omnes diverſis viribus conſtanter agentibus genitas fore, ut parallelogramma in dato angulo conſtituta, quorum latus alterum exprimat tempus, alterum vim, quæ nimirum ſunt, ut illa latera ſimul. Hinc ſi vis *HI* tempuſculo *Hh* infiniteſimo habeatur pro conſtanti, areola *IHhi*, quæ habebitur pro parallelogrammo, exprimet velocitatem infiniteſimam eo tempuſculo genitam, & proinde tota area *DAhi*, ex hujuſmodi areolis compoſita, totam exprimet velocitatem genitam toto tempore *Ah*.

153 Quare velocitates genitæ temporibus *AH*, *AC*, *HC* erunt, ut areæ *AHID*, *ACED*, *IHCE*.

154 Quod ſi ordinatæ *HM* ad lineam *AMB* exprimant velocitates ipſas initio motus facto in *A*; eodem modo (n. 75) areola *MHhm* exprimet ſpatiolum percurſum tempuſculo *Hh*, area *AHM* ſpatium percurſum toto tempore *AH*.

155 Erunt igitur ſpatia percurſa temporibus *AH*, *AC*, *HC*, ut areæ *AHM*, *ACB*, *MHCB*.

156 In his habetur nexus inter tempora, vires, velocitates, ſpatia, exprimente axe curvæ tempora, ordinatis autem vires, ac velocitates. Jam exhibebimus nexum inter eadem, exprimente axe ſpatia percurſa, ordinatis autem exprimentibus vires, ac tempora.

157 Si abſciſſæ *AH* exprimant ſpatia percurſa viribus *HI*, areæ *DAHI* exprimentent differentiam quadrati velocitatis habitæ in *H* a quadrato velocitatis habitæ in *A*.

158 Ad hujus theorematis demonſtrationem requiritur theorema generale pertinens ad geometriam infiniteſimalem, quod nimirum, ubi creſcit quævis quantitas per incrementum infiniteſimum, quadratum ipſius creſcit per ipſam ductam in duplum ſuum ipſius incrementum.

159 Patet; ſi enim in fig. 3 *AHIB* ſit quadratum rectæ *AH* exprimentis quamvis quantitatem, & creſcat latus *AH* in *Ah*, creſcet quadratum *AHI* in *Ahi* ita, ut vertex *i* ſit in eadem recta *AI* ſecante bifariam angulum *HAB*, & ſpatiola *IHhi*, *IBbi* erunt æqualia inter ſe, quorum ſingula gignentur ductu ipſius lateris creſcentis *HI*, ſive *AH* in incrementum *Hh*. F.3.

160 Jam vero incrementum velocitatis genitæ in ſpatiolo *Hh* figuræ 2. æquatur tempuſculo ducto in vim (num. 146). Tempuſculum æquatur ſpatiolo *Hh* per ipſam velocitatem diviſo (num. 75). Quare incrementum velocitatis æquabitur vi *HI* ductæ in ſpatiolum *Hh*, & diviſæ per ipſam velocitatem. Adeoque incrementum velocitatis ductum in ipſam velocitatem, quod ex numero ſuperiore eſt dimidium incrementum quadrati velocitatis, F.2.

æqua-

æquatur vi *HI* ductæ in ſpatiolum *Hh*, ſive areolæ *IHhi*. Quare incrementum ipſum quadrati velocitatis erit proportionale areolæ *IHhi*, a qua exprimi poterit, adeoque tota area *DAHI* exprimet differentiam quadratorum velocitatis in *H*, & *A*.

161 Hine ſi motus incipiat in *A*, erunt areæ *DAHI*, *DACE*, *IHCE*, ut quadratum velocitatis in *H*, quadratum velocitatis in *C*, differentia quadratâ velocitatis in *C*, & *H*.

162 Quod ſi exprimente iisdem *AH* ſpatia, ordinatæ *HM* exprimant velocitates, & ſit alia quædam linea *OLK* ea lege deſcripta, ut ejus ordinatæ *HL* ad rectam quandam *AR* datam ſint, ut eſt hæc ad ordinatas *HM*, ejus area *FAHLO* exprimet tempora in ſpatio *AH* percurrendo inſumpta.

163 Erit enim tempuſculum impenſum in *Hh*, ut ipſum ſpatiolum *Hh* directè, & celeritas *HM* reciproce, ſive & ordinata *HL* directè. Cum enim ſit rectangulum ex *HM*, & *HL* æquale eidem conſtanti quadrato *AR*, erit *HL* reciprocè, ut *HM*. Igitur erit illud tempuſculum, ut areola *LHhl*, quæ proinde ipſum exprimet, & idcirco tota area *TAHLO* exprimet totum tempus, quæ quidem area erit aſymptotica, ſi velocitas *HM* initio nulla fuerit in *A* cum evaneſcente ipſa *HM*, debeat *HL* augeri in infinitum.

164 Quare areæ *FAHLO*, *FACKO*, *HCKL* erunt, ut tempora inſumpta in percurrendis ſpatiis *AH*, *AC*, *HC*.

165 Patet autem ex hiſce conſtructionibus pendere omnia, quæ pertinent ad motus utcumque acceleratos, vel retardatos, ſi vires perpetuo agant vel ſecundum directionem motus, vel contra ipſam, ſive ipſæ vires dentur per tempora, ſive per ſpatia. Invenientur nimirum relationes velocitatum, ſpatiorum, temporum inter ſe, data virium lege, ſive ea a temporibus pendeat, ſive a ſpatiis. Præcipua proferam, quæ nobis uſui erunt inferius ad ea etiam, quæ Noſter verſibus expreſſit, demonſtranda.

166 In primis ex conſtructione prioris hypotheſis numeri 151. & 154. eruitur ſequens theorema. *In motibus uniformiter acceleratis per vim acceleratricem eandem erunt velocitates, ut tempora ab initio motus computata, ſpatia verò, ut quadrata temporum, viribus autem utcumque diverſis, ſed quæ per ſingulos quoſque motus conſtanter perſeverent, erunt velocitates directè ut tempora ab initio motus computata, & vires conjunctim, ſpatia autem ut vires, & velocitates acquiſitæ per ipſa, vel ut vires, & quadrata temporum conjunctim.*

167 Nam in eo caſu *HI* ſemper æquatur ipſi *AD*, & proinde evadit *DIE* recta parallela *AC*, & tota area *DAHI* parallelogrammum, quod manente vi *AD*, erit ut tempus *AH*, mutata ipſa vi *AD* erit, ut ipſum tempus *AH*, & vis *AD* conjunctim. Quoniam autem velocitas *HM* data vi erit, ut tempus *AH*, erit *AMB* recta linea, & triangulum *AHM*, ut baſis *HM*, & altitudo *AH* conjunctim, ſive, ut tempus, & velocitas. Si vis acceleratrix ſit eadem, etiam velocitas acquiſita eſt, ut tempus, ſi vires diverſæ ſunt, eſt ut vis, & tempus. Quare in primo caſu erunt ſpatia, ut quadrata temporum, in ſecundo, ut quadrata temporum, & vires conjunctim.

168 Hinc facile deducitur illud. *Si vires diverſæ fuerint, & tempus idem, velocitates fore, ut vires, & ſpatia itidem, ut vires.* Quamobrem tam velocitates acquiſitæ, quam ſpatia percurſa eodem tempore poſſunt eſſe menſura virium.

virium. Sic etiam alia plurima erui poterunt e formulis, quæ derivantur ex demonſtrato theoremate. Dicatur vis V, velocitas, ſeu celeritas C, tempus ab initio motus computatum T, ſpatium S. Erit $C = VT$, $S = CT$, ſive $S = VTT$, unde aliæ formulæ derivantur, juxta num. 76 & alia theoremata.

169 Facile etiam ex eadem theoria deducitur hoc theorema pertinens ad comparationem motus uniformiter accelerati cum æquabili. *Punctum quoddam, quod motu uniformiter accelerato percurrit quoddam ſpatium a quiete, percurriſſet ejus duplum, ſi cum finali velocitate per idem tempus æquabiliter moveretur, & impendit duplum ejus temporis, quod impenderet, ſi idem ſpatium cum velocitate finali illa uniformiter deſcriberet.*

170 Nam ſi in fig. 4 HN ſemper æqualis velocitati finali CB exprimat velocitatem pro quovis momento H, exprimet parallelogrammum $ADBC$ ſpatium motu æquabili percurſum, dum triangulum ABC ejus dimidium exprimit ſpatium percurſum motu uniformiter accelerato eodem tempore AC. Unde conſtat primum. Secundum autem ſponte ex primo fluit, quia dimidium tempus requiritur a dimidio ſpatio, ubi velocitas eadem eſt, adeoque ſi eidem tempori reſpondet duplum ſpatium, id ſpatium ſimplex requirit tempus dimidium. F. 4.

171 Ex ſecundæ hypotheſis conſtructione exhibita num. 157 & 162 multa itidem theoremata conſequuntur, quorum ſummus erit uſus inpoſterum.

172 In primis generaliter: *Si bina puncta in dato intervallo ſollicitentur viribus agentibus ſecundum directionem motus, quæ in diverſis ejus punctis ſint utcumque diverſæ, in iiſdem autem ſint in quavis conſtanti ratione inter ſe, quadrata velocitatum, quas in eo intervallo acquirent, erunt, ut ipſæ illæ vires, quadrata vero temporum in ratione virium inverſa.*

173 Si enim motus incipiat in fig. 2. in A, quadratum velocitatis acquiſitæ in C exprimetur per aream $DACE$. Si autem ſint ſemper omnes HI in aliqua data ratione manentibus Hh, erunt in eadem omnes areolæ $IHhi$, adeoque & totæ areæ $DACE$. Inde autem fiet, ut velocitates HM ſint in ea ratione ſubduplicata, adeoque & HL, & areolæ $LHhl$, & totæ $FACKO$ exprimentes tempora erunt in eadem ſubduplicata reciproca, & proinde quadrata temporum in eadem ratione virium ſimplici reciproca. F. 2.

174 Deinde habebitur hoc etiam theorema. *Si punctum quoddam in dato intervallo ſollicitetur viribus agentibus ſecundum directionem motus, quæ ſint in diverſis intervallis utcumque diverſæ, in iiſdem autem eædem, quæcunque fuerit velocitas, cum qua ad id intervallum devenerit, differentia quadrati velocitatis initialis a quadrato velocitatis finalis erit ſemper eadem, nimirum æqualis quadrato velocitatis, quam in eo intervallo acquiſiviſſet, ſi nullam in initio habuiſſet, & quadratum velocitatis finalis æquale erit binis quadratis binarum velocitatum ejus, quam habuit in ingreſſu, & ejus, quam per id intervallum acquiſiviſset, ſi nullam in initio velocitatem habuiſset.*

175 Primum patet ex num. 157; area enim $DACE$ exprimit differentiam quadrati velocitatis in C, a quadrato velocitatis in A, quæcumque fuerit velocitas in A, & ea area, manentibus ordinantis HI, manet ſemper eadem; quæ ipſa area exprimit ideireo quadratum totius velocitatis acquiſitæ per AC, ubi in A velocitas fuerit nulla. Secundum ſponte fuit ex hoc primo. Cum enim quadratum velocitatis, quæ acquireretur per AC pro caſu, quo velocitas in A eſſet

Digitized by Google

nulla, ſit differentia quadrati velocitatis in C, a quadrato in A, illud primum additum huic poſtremo æquabitur illi medio.

176 Hæc quidem pertinent generaliter ad quamvis virium legem: exponenda ſuperſunt, quæ pertinent ad binas virium leges, quæ in Natura obtinent, & quarum uſus occurret infra ingens, ubi vires ſunt in ratione ſimplici diſtantiarum a centro, & in ratione reciproca duplicata earundem. Illa quidem ſublimiorem Geometriam non requirit, hæc requirit altiorum hyperbolarum naturam, quam ſupponemus cognitam ex Geometria.

F.5. 177 Si vires HI fuerint in fig. 5, ut diſtantiæ CH a centro C; erit punctum I ad rectam DC, in quam migrabit linea DIE figuræ 2. Quare areæ DHC, IHC erunt, ut quadrata AC, HC. Hinc *quadratum velocitatis in hac virium lege ab initio motus acquiſita per datum ſpatium eſt, ut differentia quadratorum binarum diſtantiarum a centro initialis, & finalis.*

178 Si HMB ſit circuli quadrans, erit quadratum HM differentia quadratorum CM, CH, ſive CA, CH. Igitur ipſum exponet velocitatum quadrata, & velocitates erunt, ut ordinatæ HM ad circulum radio CA deſcriptum.

179 Si ducatur MN perpendicularis ad hm, habito arcu infiniteſimo Mm pro recta linea, erit triangulum MNm ſimile triangulo CHM. Nam ablato angulo CMN ab angulis HMN, CMm rectis, relinquuntur anguli HMC, NMm æquales, præter angulos ad H, & N rectos. Erit igitur MN, ſive Hh ad MH, ut Mm ad MC, adeoque $\frac{Hh}{HM} = \frac{Mm}{MC}$. Cum igitur ſpatiolum diviſum per velocitatem ſive $\frac{Hh}{HM}$ exprimat tempuſculum, exprimet ipſum tempuſculum $\frac{Mm}{MC}$, adeoque totum tempus impenſum per Hh exprimet $\frac{AM}{CM} = \frac{AM}{AC}$, ſive arcus diviſus per radium AC, nimirum angulus ACM, qui itidem eſt, ut is arcus diviſus per radium: nam arcus pari radio eſt, ut angulus, pari angulo, ut arcus adeoque eſt generaliter, ut angulus, & radius ſimul, & proinde angulus ſimul, ut arcus directè, & radius reciprocè.

180 Quare dum ex data altitudine corpus cadit in centrum cum hac virium lege, exprimentur tempora per angulum ACM, vel etiam per arcum circuli AM. Quod ſi mutetur utcumque altitudo CA, exprimet totam velocitatem acquiſitam uſque ad centrum C recta CB æqualis altitudini CA, tempus vero impenſum exprimet arcus AMB quadrantis diviſus per radium, ſeu angulus ACB rectus, quorum utrumque remanet conſtanter idem, utcumque mutata altitudine illa.

181 Hinc habetur hoc theorema. *Si vires ſint, ut diſtantiæ a centro, & punctum quoddam e diverſis altitudinibus cadat, velocitates acquiſitæ in centro erunt, ut vires, tempus autem erit ſemper idem.*

182 Si id punctum in ſingulis punctis H haberet velocitatem finalem CB, tempuſculum impenſum in Hh exprimeret $\frac{Hh}{CB} = \frac{Hh}{AC}$, & totum tempus impenſum in AC exprimeret $\frac{AC}{AC}$. Sed in motu illo accelerato tempus impenſum in AC exprimit (num. 179) $\frac{AMB}{AC}$. Quare erit alterum tempus ad alterum, ut $\frac{AC}{AC}$ ad $\frac{AMC}{AC}$, ſive ut radius AC ad quadrantem AMC.

183 Igi-

183 Igitur habetur hoc theorema. *Tempus, quod impenditur cadendo in centrum ex quavis data altitudine vi proportionali diſtantiæ a centro, ad tempus, quod impenditur motu uniformi cum velocitate finali, eſt, ut quadrans circumferentiæ ad radium, ſive ut dimidia circumferentia ad diametrum.*

184 Si in A haberetur vis AD' dimidia AD, quæ tamen perſeveraret uniformis uſque ad C, quadratum velocitatis acquiſitæ in C exprimeretur per parallelogrammum $D'ACE$ æquale utique triangulo DAC ob baſim dimidiam, & eandem altitudinem. Quare velocitates in C æquales habentur in utraque hypotheſi. Tempus autem, quod impenderetur in hoc motu uniformiter accelerato eſſet (per num. 169.) duplum ejus temporis, quod impenditur in eodem ſpatio percurrendo cum velocitate finali motu æquabili, quod eum (num. 182) ad tempus in hypotheſi vis mutatæ, ut mutantur diſtantiæ, ſit, ut eſt radius ad quadrantem peripheriæ; ubi bini illi motus accelerati comparantur, habetur ratio temporum eadem, ac diametri ad quadrantem.

185 Quare habetur hoc theorema. *Si bina puncta ex eadem a centro diſtantia cadant alterum motu uniformiter accelerato, alterum viribus mutatis in ratione directa diſtantiarum a centro, vis autem initio motus ſit in hoc duplo major, quam in illo; velocitatem in ipſo centro habebunt æqualem. Tempus autem prioris, ad tempus poſterioris erit, ut diameter ad quadrantem peripheriæ.*

186 Quod ſi vires HI in fig. 6 fuerint in ratione reciproca duplicata diſtantiarum CH a centro C, erit punctum I ad Hyperbolam $eIDT$ gradus tertii, cujus ordinatæ HI ſint in ratione reciproca duplicata abſciſſarum CH. Porro ea curva habet haſce proprietates: 1. habet bina crura aſymptotica Ie, IT altera aſymptoto exiſtente ipſa linea abſciſſarum CHS, altera CE parallela ordinatis: 2. Ejus area $eIHCE$ in infinitum producta ab ordinata quavis HI ex parte centri C eſt infinita, area autem $TIHS$ ſi concipiatur producta in infinitum ex parte oppoſita, eſt finita, & æqualis parallelogrammo $CHIP$, quod determinat abſciſſa, & ordinata. 3. Bina ejuſmodi parallelogramma $CHIP$, $CADE$ a binis ordinatis definita, ſunt reciproce, ut abſciſſæ CH, CA. F. 6.

187 Hinc ſi punctum quodpiam cadat ex A per AH cum hac virium lege, erit quadratum velocitatis, ut differentia arearum $IHCP$, $DACQ$, cui æqualis eſt area $DAHI$ differentia arearum $TIHS$, $TDAS$ illis parallelogrammis æqualium. Quare erit, ut $\frac{1}{CH} - \frac{1}{CA}$, nimirum ut $\frac{CA-CH}{CA\times CH}$, ſive ut $\frac{HA}{CA\times CH}$.

188 Habebitur igitur hujuſmodi theorema. *Si punctum quodpiam cadat in centrum viribus decreſcentibus in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, erit quadratum velocitatis directe, ut ſpatium confectum, & reciproce, ut diſtantia initialis, ac finalis conjunctim.*

189 Quamobrem *ſi ex data quapiam diſtantia, deſcendat ad aliam quamvis, manente diſtantia initiali, erit quadratum velocitatis directe, ut ſpatium confectum, reciproce, ut reſiduum conjunctim, quo evaneſcente in ipſo centro, ibi debebit eſſe infinita velocitas, ſi eo cum ejuſmodi lege deveniri poſſit.* Natura enim in minimis diſtantiis ab ea lege plurimum recedit.

190 *Si autem ad datam aliquam diſtantiam deveniat ex alia quavis majore, manente diſtantia finali, quadratum velocitatis erit directe,*

ut ſpatium confectum, & reciproce, ut diſtantia initialis conjunctim.

191 Quod ſi concipiamus ipſum ex infinita diſtantia *S* delatum ea lege ad locum quemvis *H*, quadratum velocitatis exprimeretur per aream *SHIΓ* in infinitum protenſam æqualem areæ *CHIP* exprimenti quadratum ejus velocitatis, quæ per ſpatium *HC* acquireretur motu uniformiter accelerato per vim *HI* conſtantem, & eſt reciproce, ut *HC*.

192 Habetur inde hoc theorema. *Punctum quod ex infinita diſtantia concipiatur devenire cum eadem illa virium lege uſque ad datam quamvis diſtantiam a centro, habebit velocitatem æqualem illi, quam acquireret in centro, ſi inde caderet motu uniformiter accelerato per vim, quam habet ibidem, uſque ad centrum, cujus ipſius velocitatis quadratum pro diverſis diſtantiis a centro eſt in ratione reciproca diſtantiæ a centro ipſo.*

193 Poſſent etiam ex iiſdem principiis ea, quæ ad temporis comparationem pertinent, definiri methodo paulo complicatiore. Sed hæc ad ea, quæ nobis occurrent, abunde ſunt. Hic illud tantummodo addendum eſt, quod pertinet ad omnes virium hypotheſes: quidquid de motu accelerato eſt dictum, habere locum in motu retardato, dummodo velocitati & tempori computatis ab initio motus, ſubſtituantur reſidua uſque ad finem, & iia, quæ acquiruntur, ea quæ amittuntur, ut facile patet. Eædem enim areæ in altero caſu exprimunt ea, quæ adduntur, in altero ea, quæ adimuntur.

194 At ex hoc poſtremo theoremate, quod per ſe nulli eſſe uſui poteſt, cum non poſſit punctum ex infinita diſtantia advenire, facile deducitur ſequens theorema, quo Noſter multo inferius utitur, quod expreſſit a verſu 1984 ad 2005, & cujus mentio habetur in nota ad verſum 1932. *Si ex quavis a centro diſtantia punctum tendens in ipſum centrum in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ab ipſo centro proiiciatur ad partes ipſi centro oppoſitas cum velocitate minore, quam ſit ea, quam in centro acquireret, ſi in ipſum inde, unde proiicitur, caderet motu uniformiter accelerato per vim, quam ibi habet, conſtanter manentem; aliquando totam velocitatem amittet, & curſum retro reflectet: ſi proiiciatur cum velocitate æquali illi, abibit in infinitum velocitate ipſa in infinitum imminuta: ſi proiiciatur cum majore velocitate; abibit itidem in infinitum, & velocitatem ſemper finitam aliquam retinebit, nec unquam ejus velocitas infra certum limitem minuetur.*

195 Patet ex eo, quod area *IHAD* manente *H*, & aſcendente *A*, debeat aliquando devenire ad quamvis magnitudinem minorem *IPCH*, abeunte *H* in infinitum, ad eam in infinitum accedat, ſed finita ſemper quantitate differat a quavis majori.

§. XVI. Ad notam in verſ. 1542.

DE OBLIQUA MOTUUM, ET VIRIUM COMPOSITIONE, AC RESOLUTIONE.

196 In hac, & in ſequentibus binis notis agitur de obliqua compoſitione, & reſolutione motuum, ac virium. Plura theoremata hic Noſter propoſuit, nonnulla ego præterea in notis innui, quæ omnia cum aliis quibuſdam eodem pertinentibus hic ordine ſuo demonſtrata proponam.

Pri-

197 Primo quidem, quod pertinet ad compoſitionem motuum, res eſt admodum expedita, & pendet ab hoc principio, quo ipſa motus compoſiti notio continetur. Punctum dicitur moveri motu compoſito ex pluribus, cum in fine cujuſvis temporis eſt ibi, ubi eſſet, ſi ſingulos illos motus habuiſſet alios poſt alios in eadem directione omnes.

198 Si mobile quoddam moveatur in fig. 7. per regulam AB, quæ interea transferatur per AA' in $A'B'$, $A''B''$, feretur motu compoſito ab utroque ita, F. 7.
ut ſi in fine cujuſdam temporis debeat eſſe regula in $A'B'$ vel $A''B''$, & ipſum in regula percurriſſe $A'C$, vel $A''B''$, ſit in C, vel B''. Eodem pacto plures etiam motus componuntur e ſimplicibus quotcumque.

199 Major difficultas eſt, ubi non motus componuntur plures, ſed plures ſimul motuum cauſæ, ſive potentiæ agunt in aliis directionibus aliæ, & aliæ cum alio niſu, ac quæritur motus, qui ex viribus omnium conjunctis oritur, & vis unica, quæ omnibus illis æquivaleat eundem effectum præſtare potis, ſi ſola eadem, ac illæ, directione agat, vel omnium effectum impedire, ſi contraria ſit. Res tamen perficitur aſſumendo hoc principium, quod in notis expoſui, & videtur rationi conſentaneum, ac eſt omnibus experimentis conforme, a quorum conſenſu abunde comprobatur. Eſt autem hujuſmodi,

200 *Si punctum urgeatur ſimul a potentiis quotcumque, quæ ſingula ſeorſum data quavis directione, & vi agerent, punctum illud in fine cujuſvis temporis erit ibi, ubi eſſet, ſi ſingula ſeorſum integrum effectum eadem haberent directione, ac magnitudine alia poſt alias totidem temporibus, quot ipſa ſunt.* Sic enim tantummodo ſuum omnes ſimul effectum ſortiri poſſunt, ſi punctum eo deveniat, quo aliis poſt alias plenum habentibus effectum deveniret.

201 Sint in fig. 8. effectus ſingularum virium cuidam tempori debiti per F. 8.
rectas CA, CB, CD, CE, ex fine cujuſvis, ut CA, ducatur AF parallela & æqualis reliquarum cuivis, ut CB, tum FG parallela, & æqualis cuivis ut CE, donec ita omnes conjungantur. Si eo modo ſingulæ agerent aliæ poſt alias, abiret per CA, AF, FG, GH, & in fine eſſet in H. Erit in fine primi temporis in ipſo puncto H vi ex omnibus compoſita.

202 Solent communiter, binas vires, CA, CB componere ope parallelogrammi $ACBF$, cujus bina latera CA, CB exprimant effectum virium componentium, diameter CF effectum vis compoſitæ, tum hanc CF cum quapiam alia CD per aliud parallelogrammum $CFGD$, in quo CG ſit effectus vis compoſitæ, ac ipſam CG, cum CE per parallelogrammum $GCEH$, cujus diameter CH exprimat effectum omnium ſimul. Res eodem recidit. Patet enim AF evadere æqualem, & parallelam CB, tum FG æqualem, & parallelam CD, atque ita porro.

203 Illud unum, & in hac mea methodo, quam etiam Noſter expreſſit, & in communi illa neceſſario demonſtrandum eſt, quod a Mechanicis omitti ſolet, quovis ordine aſſumantur vires, ſemper ad idem demum deveniri punctum. Si nimirum ut in fig. 9 aſſumeretur CB pro prima vi, CA pro ſecunda, CE pro F. 9.
tertia, CD pro quarta, punctum H idem fore, quod prius, poſt ambitum $CBFGH$.

204 Id quidem hoc pacto demonſtrabitur. Si diverſa puncta exeant ſingula F. 8.
in fig. 8 ex C per rectas CA, CB, CD, CE, & unicum punctum ſimul per $CAFGH$; patet, ejus acceſſum ad quodvis planum poſitum ultra omnem figuram fore æqualem ſummæ acceſſuum omnium priorum punctorum, ſi omnia acce-

accedunt, vel ſummæ acceſſuum demptis receſſibus omnibus, ſi aliqua recedunt. Ipſum enim percurrit latera ſingulis illorum æqualia, in quorum ſingulis habet acceſſus, vel receſſus eoſdem alios poſt alios, quos illa ſimul. Id autem fit, quovis ordine accipiantur. Quare, quovis ordine compoſitio fiat, ſemper in puncto extremo *H* habebitur idem acceſſus ad planum quodvis, adeoque diſtantia eadem ab ipſo. Sed ſi bini diverſi ordines deferrent punctum mobile ad bina diverſa puncta *H*; iis conjunctis per rectam quampiam, plano perpendiculari huic rectæ propius erit eorum alterum, remotius alterum. Non igitur deveniri poteſt ad duo diverſa puncta *H*, ſed ad unicum. Et patet, utcumque compoſitio fiat per parallelogramma compoſitis prius binis, ternis, quotcumque, ſemper demonſtrationem eandem eſſe.

205 Si omnes illæ potentiæ unico impulſu agant, patet punctum a *C* ad *H* deferri debere per lineam rectam, motu æquabili ob vim inertiæ, cum nimirum poſt egreſſum e *C* ea ſola agat. Si autem ſint potentiæ continuo agentes, ſed directio omnium maneat, & vis, adhuc per rectam lineam abibit punctum per *CH*, ſed motu uniformiter accelerato. Facile enim demonſtratur manentibus directionibus laterum *CA*, *AF*, *FG*, *GH*, & auctis utcumque, vel imminutis ipſis lateribus, figuram fore ſemper ſibi ſimilem, adeoque *CH* æquè inclinatam ſemper ad *CA*, manentibus omnibus punctis *H* in eadem recta, & ipſi *CA* proportionalem accelerato motu per ipſam, ut per *CA*.

206 Hinc vis, quæ ſola poſſit punctum eodem tempore propellere directione *CH* ad *H*, dicitur vis ex omnibus compoſita, & iis omnibus æquipollens. Vis autem *Ch*, quæ contrariâ directione effectum *HC* præſtare poſſit, ipſis itidem æquipollens, & eos omnes elidens. Quod ſi punctum *H* recidat in ipſum *C*, tum vero omnes illæ potentiæ in æquilibrio erunt, & ſuos effectus mutuo deſtruent.

207 Quoniam autem vis compoſita eundem effectum præſtat, quem omnes componentes præſtarent ſimul conjunctæ, patet, dum effectus quæruntur, poſſe uni cuilibet vi ſubſtitui vires quotcumque, quæ compoſitæ illam efforment. Nam effectus idem habebitur. Ea autem dicitur reſolutio vis, cum nimirum nos unicam ſimplicem vim concipimus, ut compoſitam e pluribus, quibus conjunctis æquivalet, ut facilius problemata ſolvi poſſint, & effectus inveſtigari per partes.

208 Hinc facile infertur illud, In quovis poligono vim expreſſam ab uno latere, componi ex viribus omnibus expreſſis per reliqua omnia ordine contrario aſſumpta, & in eas reſolvi poſſe. Quare ſi habeatur quæcumque vis *CF*, ductis ad quodvis punctum *A* rectis *CA*, *AF*, tum *CB* æquali, & parallela *AF*, poterit illa reſolvi in duas *CA*, *AF*, ſive *CA*, *CB*.

209 Facile autem demonſtrantur plurima, quæ pertinent ad tres vires in æquilibrio poſitas. In primis, binæ quævis *erunt reciprocè proportionales ſinubus angulorum, quos cum tertia continent earum directiones*. Si enim tres vires *Cf*, *CA*, *CB* ſint in æquilibrio, ducta *AF* parallela, & æquali *CB*, debebit *FC* jacere in directum cum *Cf*, & eſſe ipſi æqualis. Erit igitur vis *CA* ad *CB* ſive *AF*, ut eſt ſinus anguli *CFA*, ſive alterni *FCB*, ad ſinum *FCA*, nimirum ſumptis complementis ad duos rectos, ut ſinus *fCB* ad ſinum *fCA*.

210 Deinde ſi ducantur tres rectæ perpendiculares ad tres directiones illarum virium, vel tres æque in eandem plagam ad earum ſingulas inclinatæ, quæ alicubi ſibi occurrentes triangulum efficiant; latera ejus trianguli erunt, ut

vires

Digitized by Google

vires ſibi reſpondentes. Nam in eo triangulo latera ipſius ad ſe invicem æque inclinabuntur, ac directiones virium ad ſe invicem, adeoque triangulum conſtituent ipſi *CAF* ſimile.

211 Eſt & alia proprietas elegantiſſima, ſed quæ pendet a natura centri gravitatis, quam Noſter tertio reſervavit libro, ubi de ipſo agimus in notis, & agemus in ſupplemento. Nimirum ſi vires quotcumque in æquilibrio poſitæ exprimantur per totidem rectas *CA*, *CB*, *CD*, *CE*, *Cb*, & in extremis earum punctis *A*, *B*, *D*, *E*, *b* collocentur maſſæ quævis æquales; erit *C* centrum commune gravitatis maſſarum omnium. Summa enim diſtantiarum omnium earum maſſarum a quovis plano ultra ipſas collocato, eſſet eadem, ac ſi omnes ejuſmodi maſſæ deferrentur ad *C*, aliis nimirum accedentibus tantum, quantum aliæ recederent, cum in motu per rectas *CA*, *AF*, *FG*, *GH*, *HC* ipſis parallelas, & æquales, acceſſus omnes a receſſibus compenſentur. Porro illa ipſa eſt præcipua centri gravitatis communis proprietas, quam Noſter expoſuit a verſu 1616. libri 3.

212 Inde autem admodum facile deducuntur hæc alia duo. Si in directionibus ſingulis *CA*, *CB*, *CD*, *CE*, *Cb* collocentur ad eandem diſtantiam a *C* maſſæ ſingulis viribus proportionales, adhuc centrum commune gravitatis omnium erit in *C*, & ſi tres vires tantummodo *CA*, *CB*, *Cf* ſint in æquilibrio, & concipiantur rectæ *fB*, *BA*, *Af*, erit *C* centrum gravitatis ipſius trianguli *CBf*. Sed hæc innuiſſe ſit ſatis.

213 Generaliter autem patet *vim compoſitam ſemper eſſe minorem componentibus ſimul ſumptis, qua idcirco in compoſitione decreſcit, in reſolutione creſcit*. Nam in quovis poligono unum latus eſt minus reliquis omnibus ſimul ſumptis. Sed, ut ſupra innui num.143, nihil in eo abſurdi eſt, tum quia vis compoſita eſt actio plurium potentiarum ſimul agentium, vires vero componentes ſunt actiones, quas ſingulæ ſeorſum exercerent; poteſt autem eadem cauſa in diverſis circumſtantiis agere diverſo modo; tum quia ſi concipiantur eodem agentes modo, cum ex parte contrariæ ſibi ſint invicem ob directionum obliquitatem, effectus idcirco minor conſequitur.

214 Et quidem ſi ex viribus *CA*, *CB* utcumque ad ſe invicem inclinatis, ut in fig.10, & 11, componatur vis *CF*. Ductis per *C*, *A*, *B* rectis *Dd*, *AE*, *BG* perpendicularibus ad *CF*, & *AD*, *Bd* parallelis, vis *CA* æquivalet viribus *CE*, *CD*, vis *CB* viribus *CG*, *Cd*. Facile autem demonſtratur æqualia eſſe triangula *CEA*, *BGF*, adeoque æquales *AE*, *BG*, & proinde *CD*, *Cd*, quæ æquales, & contrariæ cum ſint, ſe elidunt, ut itidem æquales eſſe *CE*, *GF*, quarum in fig.10. eandem habentium directionem ſumma, in fig. 11 oppoſitam differentia eſt ipſa vis *CF*. F.10 11

215 Quod autem pertinet ad reſolutionem, ſatis patet, nihil obeſſe, quod vis, quæ reſolvitur, ſit minor, quam eæ, in quas reſolvitur, ubi reſolutio tantummodo mente concipitur, ſubſtituendo mente binas vires, quæ eundem effectum præſtarent. Et quidem ego, ut monui ſuperius, cenſeo veram & phyſicam reſolutionem nullam eſſe in Natura. Id jam olim affirmaveram in diſſertatione de Viribus Vivis. P. Ricatus binos mihi objecit caſus, in quibus reſolutionem veram haberi cenſuit, ubi cauſa effectum gigneret ſe majorem. Quomodo in iis ipſis caſibus nunquam in mea theoria habeatur vera reſolutio, ſed ſola compoſitio, communicavi ſuperiore anno P. Carolo Benvenuto, qui meam

meam illam explicationem inſeruit ſuæ Synopſi Phyſicæ Generalis. Unam hic
F.12. proponam, quæ huc reducitur. Bina plana inclinata *ED*, *AB* in fig. 12. ſuſtineant globum *C*, cujus gravitatem exponat recta *CF*. Ductis *CM*, *CN* perpendicularibus in ipſa plana, quibus occurrant in *G*, & *H* rectæ parallelæ ipſis *CN*, *CM*, urgebuntur plana *AB*, *ED* viribus *CG*, *CH*, in quas reſolvitur gravitas *CF* minor ipſarum ſummâ. Eam Ricatus veram eſſe, & phyſicam reſolutionem arbitratur.

216 At in mea theoria globus plana immediate non contingit, nec ipſa plana urgentur viribus, in quas gravitas vere reſolvatur. Sed adeſt in *M*, & *N* exigua diſtantia, quæ mutuam inducit repulſivam vim. Urgentur plana viribus repulſivis *CG*, *CH*, & urgetur globus in partes oppoſitas viribus repulſivis *CL*, *CI*, quæ æquales ſunt ipſis *CG*, *CH*, & ſimul compoſitæ efficiunt vim *CK* ſe utique minorem, contrariam, & æqualem gravitati *CF*. Habetur igitur & ibi vera compoſitio, non reſolutio. Quin imo quoniam Ricatus ipſe veram reſolutionem admittit ſolum in iis caſibus, in quibus habentur per ipſum motus impediti, ſi impedimentum fiat a ſuperficie ſubjecta, habebuntur ſemper repulſiones, ſi a filo ſuſtinente, attractiones contrariæ, & æquales, quæ ſemper in mea theoria rem omnem ad compoſitionem reducent omni phyſica reſolutione ſublata, & ſi ipſi meæ compoſitioni ſubſtituatur communis illa reſolutio, ob actionum contrariarum æqualitatem, idem ſemper effectus habebitur, utrolibet modo res conſideretur.

217 Cæterum, qui meas repulſivas vires non admittat, adhuc facile reſpondebit, ut in vecte, & in omni machinarum genere potentia quæpiam effectum multo majorem præſtare poteſt, quam ſeorſum agens ſine ipſis; ſic & in iis motibus impeditis eandem potentiam exerere vim multiplicem, & majorem illa ſimplici, quam exerit, cum ſeorſum agit. Ea autem reſponſio multo etiam majus habebit pondus, ſi conſideretur illud, nullam ibi haberi actionem phyſicam, ſed ſolum a nobis conceptam.

§. XVII. Ad notam in verſ. 1625.

DE MOTIBUS CURVILINEIS ORTIS A VI INERTIÆ CONJUNCTA CUM VIRIBUS AGENTIBUS.

218 Exponam hic, quod requiritur ex Geometria ad hujuſmodi motus curvilineos, quos Noſter hic attigit, & complectar, quæ innui in hac, & in ſequentibus binis notis, cum aliis quibuſdam, quæ eodem pertinent, & ſcitu digna ſunt. Quæ autem dicemus generalia ſunt caſibus omnibus, in quibus quicumque virium activarum numerus habeatur cum directionibus quibuſcumque, in quibuſcumque planis eæ jaceant. Poteſt enim ſemper concipi vis ex iis omnibus compoſita, quæ punctum mobile a directione ſui motus deflectat ita, ut eæ ſimul conjunctæ deflectunt. Concipiemus autem vim ipſam activam primo quidem agere per intervalla initio ſingulorum tempuſculorum æqualium, quo initio producat ſimul totam eam velocitatem, quam actione continua per totum ipſum tempuſculum produceret, quo quidem caſu deſcribitur poligonum quoddam, ut deinde, imminutis intervallis in infinitum, donec penitus evaneſcat, evaneſcentibus ſimul lateribus poligoni, habeatur curvatura continua orta ex continuo activæ vis impulſu.

219. Proji-

219 Proiiciatur punctum quoddam directione, & velocitate, qua quodam tempore percurrere poſſit rectam *AB*, & initio ejuſdem temporis ſollicitetur unico impulſu, vi, qua poſſit percurrere eo tempore *AD*, abibit motu compoſito per diametrum *AE* parallelogrammi *ABED*. Sequenti tempore abiret vi inertiæ per *EG* in directum cum *AE*, ſed ſi in *E* vis nova unico impulſu agens directione quavis *EF* ipſum determinet ad motum per *EF*, percurret diametrum *EH* parallelogrammi *EGHF*, & ita porro pro continuatione motus per *HK*, *LN*, *OQ*, novo impulſu per *HI*, *LM*, *OP* deſcribentur novæ diametri *HL*, *LO*, *OR* novorum parallelogrammorum, in quibus latus alterum exprimet lineam percurrendam motu præcedenti, alterum vero ſpatium debitum vi detorquenti motum. Quare deſcribetur poligonum quoddam *AEHLOR*. Id Noſter exhibet a verſu 1628 ad 1636.

220 Concipiamus jam, ea tempora minui in infinitum, ut eorum numerus dato quovis tempore contentus augeatur in infinitum, vires vero tum magnitudine, tum directione, vel conſtantes manere, vel certa aliqua variari lege, quæ ad continuam variationis rationem aliquam accedat in infinitum. Creſcet in infinitum numerus laterum poligoni dato tempore deſcripti, anguli autem, quos continebit quodvis latus præcedens productum cum conſequenti, minuentur in infinitum. Quoniam enim *GH* eſt effectus vis, quæ concipitur unico impulſu initio tempuſculi producere totam velocitatem, quam, ſi perpetuo ageret, produceret per totum id tempuſculum, erit (num. 160.) ſpatiolum duplum ejus, quod vi perpetuo agente percurreretur, quod cum ſit, ut vis, & quadratum temporis (num. 166.), erit & *GM*, ut vis, & quadratum tempuſculi, adeoque ob vim finitam, & quadratum tempuſculi infiniteſimum ordinis ſecundi, erit & ipſa *GH* infiniteſima ordinis ſecundi. Quamobrem cum ſit *EG* infiniteſima ordinis primi, ut eſt tempuſculum, quo nimirum deſcriberetur velocitate finita, erit angulus *GEH* infiniteſimus, ac eodem argumento infiniteſimi erunt omnes reliqui anguli *BAE*, *KHL*, *NLO* &c. Hinc poligonum ſemper magis ad continuam curvaturam accedet, & ubi demum continua fiat actio vis activæ, & continuam aliquam legem directio ipſius, ac magnitudo ſervet, poligoni lateribus penitus evaneſcentibus, habebitur curva continua *ALR*, figuræ 14, cava in eam partem, in quam vires tendunt. In ea curva vis inertiæ ſemper tendit ad motum rectilineum, qui tamen nuſquam habetur, perpetuo impeditus a vi perpetuo detorquente. Initia enim laterum poligoni jam prorſus coteuntia cum finibus id efficiunt, ut rectilinea latera evaneſcant. Id Noſter exprimit a verſu 1637 ad 1646.

221 Jam vero producto utrinque in *S*, & *T* in fig. 13 latere quovis *HL* F. 13. poligoni, ſi, ubi ipſum poligonum deſcribebatur, nulla vis nova adveniſſet in *L*, punctum illud abiiſſet per rectam *LT*. Porro ubi poligono abeunte in curvam continuam figuræ 14 evaneſcit latus *HL*, quod eſt chorda curvæ cujuſvis poligono circumſcriptæ, coeuntibus punctis *HL*, recta *ST* evadit tangens curvæ in *L*, & eodem pacto ſi in fig. 13, producta *AB* in *V*, & *AE* in *u* coeunt puncta *E*, & *A*, evaneſcente latere *AE*, abit *Au* in directionem projectionis *AV*, & ſimul evadit tangens curvæ continuæ *ALR*.

222 Hinc autem duo deducuntur: primo quidem directionem projectionis *AV* eſſe tangentem curvæ *ALR* deſcriptæ viribus continuo detorquentibus motum; deinde vero punctum ubicunque in *L* relictum ſoli vi inertiæ debere abire per rectam *LT* tangentem curvæ ipſius, quæ nimirum ad curvam ita accedit, ut quæ-

ut quævis alia utcumque parum inclinata ad ipſam *LT*, velut *Lt*, per aliquem tractum *Lr* immergatur intra curvam, licet iterum ex ea emergat. Debet enim vi inertiæ abire per rectam, nimirum per illam, per quam ſi projiceretur, & illæ vires activæ, quas nunc ceſſare concipimus, advenirent, eam ipſam curvam deſcriberet, quam deſcribit, videlicet per ejus tangentem. Eſt autem proprietas tangentis, ut ſit recta omnium proxima arcui ita, ut inter eam, & arcum alia recta duci non poſſit, ſed aliqua ſaltem ſui parte immergatur intra curvam; unde etiam conſequitur unicam eſſe tangentem curvæ datæ in dato quovis puncto, cum nimirum unica tantummodo proxima eſſe poſſit.

223 Et hæc quidem Noſter expreſſit a verſu 1647 ad 1674. Deinde uſque ad verſum 1689 exhibet hujuſmodi theorema. *Si directio vis activa per aliquem arcum continuum efficiat ſemper angulum acutum cum directione tangentis continuata, velocitas creſcit; ſi efficiat obtuſum, decreſcit; ſi rectum, manet conſtans.* Id quidem theorema hoc pacto demoſtrari poteſt.

F.15. 224 Sit in fig. 15, 16, 17 *Et* recta, quam punctum deſcriberet præcedenti
16. velocitate per vim inertiæ, *EF* effectus vis unico impulſu agentis, ut in poligo-
17 no fig. 13, per tempuſculum infiniteſimum ordinis primi, & in fig. 15. ſit angulus *FEG* acutus, in fig. 16 obtuſus, in fig. 17 rectus. Ducta *HM* perpendiculari ad *EG*, cadet *M* in fig. 15 ultra *G* in fig. 16 citra, in fig. 17 in ipſum *G* ob angulum *EGH* complementum ad duos rectos anguli *FEG*, in prima obtuſum, in ſecunda rectum, in tertia acutum. Quare *GM* in fig. 17 erit nulla, in fig. 15, & 16 erit infiniteſima ejuſdem ordinis, ac *GH*, & *HM*, ad quas nimirum erit, ut coſinus anguli *HGM* ad radium, & ſinum, videlicet in ratione data, datis iis angulis utcumque parvis; adeoque cum *GH* ſit ordinis ſecundi, erit ordinis itidem ſecundi & *GM*, & *HM*. Quod ſi centro *E*, intervallo *EH*, concipiatur circulus, qui occurrat ipſi *EG* in *N*, & *n*, erit ubique ex natura circuli *NM* ad *MH*, ut *MH* ad *Mn*, adeoque *MN* infiniteſima ordinis tertii. Quare *GN* in fig. 15, & 16 remanet infiniteſima ordinis ſecundi, & in figura 17 ordinis tertii, & in illis *GM*, *GN* poſſunt aſſumi pro æqualibus.

225 Eſt *EG* ad *EH*, ut velocitas tempuſculi præcedentis ad velocitatem ſequentis, adeoque *EG* ad *GN*, ut illa ad ſui incrementum in fig. 15, & 17, decrementum in fig. 16. Quare cum præcedenti tempuſculo velocitas fuerit finita, fiet in fig. 15 incrementum, in fig. 16 decrementum velocitatis infiniteſimum primi ordinis, in fig. 17 incrementum ordinis ſecundi tempuſculo infiniteſimo ordinis primi. Quare ſi finito tempore angulus in poligono figuræ 13 fuerit ſemper acutus ut in figura 15, colligetur incrementum velocitatis finitum; ſi ſemper obtuſus, ut in fig. 16, decrementum finitum; ſi ſemper rectus, incrementum manebit ordinis quidem ſuperioris, ſed adhuc infiniteſimum. Ubi igitur poligonum fig. 13 in curvam continuam abibit figuræ 14, evaneſcentibus tempuſculorum intervallis, & poligoni lateribus, incrementum primi caſus, & decrementum ſecundi manebunt finita, incrementum vero illud infiniteſimum caſus tertii penitus evaneſcet, & conſtans manebit velocitas.

226 Hæc quidem expreſſit Noſter de iis, quæ pertinent ad hoſce curvilineos motus, viribus quibuſcumque utcumque etiam extra idem planum directis. Sunt & alia ſane multa, quæ ego alibi fortaſſe brevi exponam. Nonnulla hic arringam ſcitu digniora. Si dicatur $EG = s$, tempuſculum $= t$, celeritas $= C$, ejus

incre-

Digitized by Google

incrementum, vel decrementum $= c$, vis $= V$; erit (num. 75.) $t = \frac{S}{C}$. Eſt autem (num. 166) $GH = Vt^2$. Quare erit $GH = \frac{Vs^2}{C^2}$. Porro ſi coſinus anguli HGN, vel HGE in fig. 15 & 16 dicatur n ad radium $= 1$, erit $1.n :: GH = \frac{Vs^2}{C^2} . GM = \frac{nVs^2}{C^2}$. Jam vero ut $EG = s$ ad GN, vel $GM = \frac{nVs^2}{C^2}$ ita celeritas C ad ſuum incrementum $c = \frac{nVs}{C}$. Igitur poſito t pro $\frac{s}{C}$, fit $c = nVt$, & multiplicando utrinque per C, fit $Cc = nVs$.

227 Ex iis formulis habentur hæc duo theoremata: Primo quidem *Incrementum, vel decrementum celeritatis eſt directe, ut vis, ut coſinus anguli, quem tangens efficit cum directione vis, & ut tempuſculum*, deinde *incrementum, vel decrementum quadrati celeritatis* (quod nimitum per num. 158 eſt $2Cc$) *eſt, ut ille coſinus, vis, & ſpatiolum percurſum conjunctim*.

228 Si per tria puncta AEH fig. 18, quæ ſint eadem, ac in fig. 13, tranſcat circulus, cujus centrum alicubi in C, & cujus perimetro rectæ GH, EF occurrant in Q, P, ducaturque CR perpendicularis ad EP, quam ſecabit bifariam in R, erit AE æquipollenter perpendicularis rectæ AEG infinitè parum diſtanti a poſitione tangentis. Quare angulus ECR complementum anguli CER ſumi poterit pro æquali angulo AER, quem efficit directio vis cum tangente. Si ejus ſinus ad radium $= 1$ dicatur m, & $EC = R$, erit $1.m :: EC = R.ER = mR$. Quare EP, cui æquipollet GQ, erit $= 2mR$. Porro eſt $GH \times GQ = EG \times GA = EG \times 2EG$. Igitur, aſſumptis pro EG, GH valoribus n. 226, erit $\frac{Vs^2}{C^2} \times 2mR = s \times 2s$, ſive multiplicando utrinque per C^2, & dividendo per $2s^2$, erit $mRV = C^2$. Eſt autem V vis, m ſinus anguli, quem directio vis continet cum tangente, R radius circuli, qui, coeuntibus punctis AEH, nimirum tribus concurſibus cum curva, evadit oſculator, quo nomine appellatur circulus arcui curvæ omnium proximus, & eandem cum ipſa curvaturam habens, mR recta ER, ſive dimidium chordæ, quam circulus oſculator abſcindit e directione vis; C celeritas. F. 18

229 Quamobrem ex illa formula eruuntur hæc duo theoremata. 1. *Quadratum celeritatis eſt generaliter, ut vis, ut ſinus anguli, quo ejus directio inclinatur ad tangentem, & ut radius oſculi conjunctim*. 2. *Idem quadratum celeritatis, ut vis, & corda, quam circulus oſculator ex ejus directione abſcindit*. Ex eadem formula $mRV = C^2$ plures alias derivari poſſe, & plura ex iis theoremata methodo adhibita ſupra num. 75, ſatis conſtat.

230 Si vis non unico impulſu ageret, ſed motum uniformiter perpetuo accelleraret, tempuſculo, quo per velocitatem C percurrit ſpatium EG, deſcenderet per $\frac{1}{2} GH$. Sit EI ſpatium, per quod cadendo motu uniformiter accelerato illâ eadem vi acquireret velocitatem eandem C, & eo tempore cum eadem velocitate motu uniformi percurreretur (num. 169) ſpatium $2EI$. Quare erit (num. 75) quadratum EG ad quadratum $2EI = 4EI^2$, ut quadratum illius tempuſculi ad quadratum hujus temporis, ſive (num. 166) ut $\frac{1}{2} GH$ ad EI,

 adce-

adeoque $EG^2 \times EI = 2EI^2 \times GH$, ſive $\frac{EG^2}{HG} = 2EI$. Eſt autem $GH. GE :: GA = 2GE$. $GQ = EP = \frac{2GE^2}{GH}$. Igitur $EP = 4EI$.

231 Hinc eruitur hujuſmodi generaliſſimum, & utiliſſimum theorema. *Circulus oſculator abſcindit a directione vis motum detorquentis quadruplum ejus altitudinis, per quam ſi punctum caderet motu uniformiter accelerato eadem vi, acquireret velocitatem, quam ibidem habet punctum mobile.*

232 Mirum ſane, quanti uſus ſint theoremata hæc generalia, quæ ad caſus particulares applicata, plurima alia præbent & elegantiſſima, & utiliſſima. Sic, quoniam, ubi motus fit in circulo cum vi directa ad centrum, angulus vis cum tangente evadit rectus, & chorda, quam circulus oſculator abſcindit a directione vis, eſt ipſius circuli diameter; facile ex theorematis expoſitis derivantur ea omnia, quæ circa vires motuum circularium prodidit Hugenius, ut paulo infra videbimus. Interea aliud theorema elegans itidem, ſed longe minoris uſus, proponam ſine demonſtratione. Eſt autem hujuſmodi.

F.19 233 *Si viribus quibuſcumque deſcribatur curva ALR fig.19, & concipiatur alia curva BDF, quæ omnibus tangentibus LD prioris curvæ occurrat alicubi in punctis D ita, ut ibi tangentem EDe habeat parallelam directioni LG vis ipſius in L, occurrat autem tangenti AV in F; arcus BD, vel BDF æquabitur illi ſpatio rectilineo, quod eodem tempore, quo arcus LB, vel ALB deſcribitur, percurreret punctum quodpiam, quod iiſdem momentis urgeretur in eadem ſemper directione viribus æqualibus iis, quibus perpetuo directionem utcumque mutantibus urgetur perpetuo punctum deſcribens curvam ALB, & LD, vel AF ſpatio, quod eodem tempore deſcriberetur ſola vi inertiæ, quo arcus LB, vel AB deſcribitur.*

234 Ex hoc theoremate facile deducitur hoc aliud. *Si deſcribatur viribus quibuſdam arcus infiniteſimus LB curvæ continuæ LR, ducaturque ab altero ejus extremo B recta parallela tangenti ducta per alterum extremum L, donec occurrat in G directioni LG, vis, quæ habetur in L; exprimet LG effectum vis ipſius in L, debitum tempuſculo, quo deſcribitur arcus LB, & BG æquabitur ſegmento tangentis eodem tempore deſcribendo ſola vi inertiæ ob velocitatem, quæ habetur in L.* Nam effectus virium omnium agentium per totum arcum *LB* eſt arcus *BD*, qui erit infiniteſimus, & ſi directio vis finito angulo inclinetur ad arcum curvæ *LB* ubique, poterit aſſumi pro recta linea, habente directionem tangentis De, adeoque parallela rectæ *LG*. Quare haberi poterit *GLDB* pro parallelogrammo, & *GB* pro æquali *LD*, vires autem omnes agentes per *LB*, cum & magnitudine, & directione infinite parum differant a vi in *L*, poterunt aſſumi pro continuatione vis ejuſdem.

235 At ſine prioris illius generalis theorematis demonſtratione, hoc poſterius patet ex eo ipſo, quod per totum arcum *LB* directio, & magnitudo vis haberi poſſit pro eadem conſtanti. Quare ſi *LD* exponat motum uniformem debitum vi inertiæ, & *LG* motum uniformiter acceleratum debitum vi activæ in *L*, completo parallelogrammo *LGBD*, punctum mobile debet in fine ejus tempuſculi eſſe in *B* juxta leges motus compoſiti; ac proinde e fine arcus ducta *BG* parallela tangenti, & *BD* parallela *GL*, exprimit *LG* effectum vis activæ, *LD*, æqualis *GB*, effectum debitum ſoli vi inertiæ illo tempuſculo, quo percurritur arcus *LB*.

§. XVIII.

§. XVIII. Ad notam in verſ. 1690.

DE MOTIBUS CURVILINEIS ORTIS A VI INERTIÆ, ET VIRIBUS ACTIVIS TENDENTIBUS AD DATUM CENTRUM.

236 Quæ diximus huc uſque, pertinent generaliter ad omnia virium genera. Sunt alia elegantiſſima theoremata, & quæ multo majorem in mechanica potiſſimum Newtoniana cæleſti uſum habent, quæ pertinent ad vires ad datum centrum directas. Porro hic complectar ea omnia, quæ Noſter innuit a verſu 1690 ad 1827, quæ, quantum ſine Geometria licuit, in pluribus aliis poſt hanc notis illuſtravi.

237 Sit in fig. 20. illud idem poligonum, quod in fig. 13, ſed omnes vires *AD*, *EF*, *HI*, *LM* &c. dirigantur ad idem commune centrum *C*. Facile in primis demonſtratur, totum poligonum in eodem plano ſitum eſſe cum centro virium, & directione primæ projectionis. Nam totum parallelogrammum *BADE*, adeoque & recta *AE* jacet in eodem plano primæ projectionis *ABV*, & rectæ *AD* tendentis ad centrum *C*. In eodem igitur jacet recta *AEG*. In eodem autem jacet & *EF* tendens ad punctum *C* in eo ſitum. Igitur eodem argumento in eodem plano jacet & recta *EHK*, ac eodem prorſus pacto reliquæ omnes rectæ *HL*, *LO*, *OR* in eodem plano jacent. F. 20. 21.

238 Quamobrem etiam, ubi vis perpetuo agat, & poligonum abeat in curvam continuam *ALR* figuræ 21, tota curva jacet in eodem plano *CAV* projectionis nimirum, & centri virium, quod theorema Noſter indicavit a verſu 1690 ad 1696.

239 Porro eſt aliud theorema adhuc elegantius, & utilius. Nimirum ſi binis temporibus quibuſcumque deſcribantur arcus *AL*, *LR*, areæ *ACL*, *ICR*; quæ clauduntur arcubus *AL*, *LR*, & rectis *AC*, *LC*, *RC* ductis a centro virium ad arcus illos extremos, quas areas deſcribit, & quodammodo veluti verrit recta *CL* conjungens punctum mobile cum centro virium, erunt ipſis temporibus proportionales, æqualibus æquales, duplis duplæ, & ita porro. Hoc theorema eſt præcipuum fundamentum theoriæ Newtonianæ, & Noſter ipſum exprimit a verſu 1697 ad 1721.

240 Sic autem demonſtrantur. Sint in fig. 20, omnia tempuſcula æqualia, ducaturque præterea recta *GC*, & conſiderentur tria triangula *ACE*, *ECG*, *ECH*. Priora duo æquales areas habent, cum ſint ſuper baſes *AE*, *EG* æquales ob æqualitatem tempuſculorum, & in eadem altitudine *C*. Poſteriora duo æqualia ſunt, quia inſiſtunt eidem baſi *CE*, & ſunt inter eaſdem parallelas *EC*, *GH*, verticibus nimirum *G*, *H* æque diſtantibus a baſi communi *EC*. Igitur & primum *ACE* tertio *ECH* æquale erit. Eadem autem demonſtratione oſtenditur, triangula *ECH*, *HCL* æqualia eſſe eidem *HCK*, & proinde inter ſe, ac ſimiliter omnes areas ſequentium triangulorum *LCO*, *OCR* æquales eſſe inter ſe, & cum præcedentibus. Quare cum temporibus finitis quibuſcumque contineantur numeri æqualium tempuſculorum ipſis temporibus proportionales, areæ terminatæ perimetro poligoni, & rectis ad centrum virium pertinentibus, compoſitæ ſcilicet a tot areolis triangulorum æqualium, quot tempuſcula iis tem-

temporibus reſpondent, quibus eæ perimetri partes deſcribuntur, erunt ipſis temporibus proportionales. Cum igitur id locum habeat, utcumque augeatur numerus tempuſculorum magnitudine imminuta, ubi demum abit polygonum in curvam continuam, areæ terminatæ arcu curvilineo, & rectis ad centrum virium tendentibus erunt itidem proportionales temporibus.

241 Et hæc eſt illa demonſtratio Muſis, & verſibus pene inexplicabilis, quam tamen Noſter, ſatis pro rei difficultate feliciter, expreſſit a verſu 1722 ad 1768.

242 Proponit autem a verſu 1769 ad 1777 inverſum theorema, nimirum ſi curva in eodem plano jaceat, & areæ ſint temporibus proportionales, fore vires directas ad idem commune centrum, ad quod æquales illæ areæ terminantur. Ejus demonſtratio eſt prioris inverſa. Sint enim areæ ACE, ECH in fig. 20. æquales. Quoniam producta AE tantundem in G, erit & ECG æqualis ECA, conſequitur etiam fore ECG æqualem ECH. Quare cum ea duo triangula baſim habeant communem, erunt intra eaſdem parallelas, adeoque GH erit parallela EC. Ducta igitur HF parallela GE uſque ad EC motus per EH componetur e binis per EG, EF, quorum primus cum oriatur a vi inertiæ motum præcedentem per AE continuante in directum, poſterior oritur a vi activa, quæ idcirco dirigitur ad centrum C, & eadem eſt demonſtratio pro ſequentibus omnibus.

243 Huic alia duo theoremata Noſter adjungit alterum directum a verſu 1778, ad 1783, alterum inverſum a 1784 ad 1788. Primum hoc pacto enunciavimus in nota in hunc locum. *Si centrum virium moveatur motibus, vel urgeatur viribus quibuſcumque, corpus autem quodpiam præter vires in ipſum directas, habeat motus, vel urgeatur viribus eadem & magnitudine, & directione, deſcribet circa ipſum centrum curvam lineam mobilem cum ipſo centro, ita tamen, ut in ea areæ ad ipſum centrum ductæ ſint temporibus proportionales.* Secundum eſt inverſum hujus, *ſi nimirum punctum deſcribat circa centrum mobile arcus proportionales temporibus, debebit habere præter omnes motus, vel vires ipſi centro communes, vim aliam ad ipſum centrum directam.*

244 Primum ex hiſce binis theorematis facile percipitur ex eo, quod motus ille communis nihil turbet poſitionem reſpectivam, ut facile conſtat ex ipſa etiam motus reſpectivi notione expoſita num. 66. Hic tamen idem theorema ſic accuratiſſimè demonſtrabitur.

F. 22. 245 Habeat centrum in fig. 22 primo tempuſculo motum BD, & punctum, quod ad ipſum tendit, motum LM, ac prætcrea motum alium quemvis MP, ex quibus componatur LP. Secundo tempuſculo haberet centrum quidem motum DK, punctum vero motum PO, qui motus ipſis BD, LP æquales eſſent, & poſiti in directum cum ipſis. Detorqueatur autem centrum vi DI, ut abeat per DC diametrum parallelogrammi $DKCI$, & punctum habeat vim PQ æqualem, & parallelam vi DI, ac præterea vim PR, quæ ipſum urgeat in D, ubi tum eſt centrum, ut ductis OG, GH parallelis, & æqualibus ipſis PQ, PR, motu compoſito ex tribus PO, PQ, PR ſit per num. 200. in fine ſecundi tempuſculi in H, quo momento eodem centrum eſt in C. Ductis CA, CH parallelis, & æqualibus rectis BL, DP, quæ jungebant centri loca initio primi, & ſecundi tempuſculi cum loco puncti, via reſpectiva circa centrum mobile jam

exi-

exiſtens in *C*, erit *AEH*, & areæ, quæ æquales demonſtrari debent, erunt *ACE*, *ECH*.

246 Si ducantur *DM*, *KN*, eæ, ob *NM*, *KD* æquales, & parallelas, erunt æquales, & parallelæ inter ſe, ac ob *BD*, *LM* æquales itidem, & parallelas, erunt æquales, & parallelæ *BL*, quibus & æqualis, & parallela erit itidem *CA*, quæ per conſtructionem ipſi *BL* æqualis eſt, & parallela. Quare & *NA* claudens *NK*, *AC* parallelas, & æquales erit parallela, & æqualis *KC*, ſive per conſtructionem *DI*, vel *PQ*, nimirum *OG*, adeoque & *NO* æqualis, & parallela *AG*. Eſt autem, ob *DM*, *CA* parallelas, & æquales, *MA* parallela & æqualis *DC*, ac ob *DP*, *CE* parallelas, & æquales, *DC* parallela, & æqualis *PE*, adeoque & *AE* parallela, & æqualis *MP*. Porro eſt *MP* parallela, & dimidia *NO*, ob latera trianguli *NLO* ſecta biſariam in *M*, & *P*. Igitur & *AE* erit parallela & dimidia *NO*, cui *NO* cum æqualis, & parallela demonſtrata ſit *AG*, cadet *AE* ſupra ipſam *AG*, & erit ejus dimidia. Quoniam vero *EC* eſt parallela *PRD*, cui per conſtructionem eſt parallela *GH*, æqualis ipſi *IR*; erit *GH* parallela ipſi *EC*, adeoque ducta *EH*, triangulum *CHE* æquale triangulo *CGE*, & proinde etiam triangulo *CAE*, ut oportebat.

147 Inverſum theorema per ejuſdem demonſtrationis inverſionem æque facile demonſtratur, ac ſupra num.242, cum ex æqualitate arearum *CEH*, *CEA*, conſequatur æqualitas arearum *CEH*, *CEG*, & paralleliſmus *CH*, *EC*.

248 Hiſce abſolutis addit Noſter, eadem omnia conſequi, ſi punctum non urgeatur vi quadam attractiva in ipſum centrum, ſed removeatur ab ipſo vi repulſiva, quod a verſu 1789 ad 1798 perſequitur. Nimirum omnia, quæ pro fig. 20 diximus a num.237, huic caſui aptari poterunt in fig. 23, in qua vires F.23 *AD*, *EF*, *HI* &c. avertantur a centro. Hoc unicum diſcrimen habebitur, quod curva continua orta e poligono figuræ 20 obvertet cavitatem centro virium *C*, curva vero orta e poligono figuræ 23 obvertet ipſi convexitatem. Ibi enim perpetuo motus deflectitur a tangente verſus centrum, hic ad partes oppoſitas.

249 Exponit demum a verſu 1799 ad 1805 theorema pertinens ad velocitatem, quæ nimirum in figura 21, in quovis puncto *L* ejuſdem curvæ, eſt in F.21 ratione reciproca perpendiculi *CP* e centro virium ducti in tangentem *SLT* tranſeuntem per ipſum punctum *L*.

250 Id theorema ſic facile demonſtratur. Velocitas in quovis latere *HL* poligoni figuræ 20 eſt, ut ipſum latus ob tempuſcula æqualia; ipſum autem latus F.20 *HL* eſt reciprocè, ut perpendiculum, quod concipiatur ex *C* ductum in ipſum, cum id ſit altitudo trianguli *HCL*, aſſumpta *HL* pro baſi, & in triangulis æqualibus debeant baſes eſſe in ratione reciproca altitudinum, ut nimirum producta ex baſibus, & altitudinibus æquentur. Evaneſcente autem latere *HL*, & coeuntibus punctis *HL*, ejus directio abit in tangentem *SLT* figuræ 21, & eadem eſſet demonſtratio pro curva convexa figuræ 23.

251 Verum ubi etiam generaliter conferendus ſit motus in una curva cum motu in alia quavis, facile eſt generalem velocitatis expreſſionem invenire. Nam in fig. 20 latus *HL* æquabitur ſemper duplæ areolæ *HCL* diviſæ per illam altitudinem, adeoque erit, ut areola æqualibus tempuſculis deſcripta directè, & ut perpendiculum illud reciproce. Porro areolæ, quæ æqualibus tempuſculis deſcribuntur, ſunt, ut areæ quævis, quæ deſcribuntur quibuſvis æqualibus tempori-

poribus. Quare habebitur hoc theorema generale. *Celeritas in curvis quibuſcumque eſt, ut area dato quòvis tempore deſcripta directè, & ut perpendiculum e centro virium ductum in tangentem curvæ reciproce*, unde poſita area ejuſmodi $= A$, illo perpendiculo $= P$, habebitur hæc formula

$$C = \frac{A}{P}.$$

252 Quoniam autem (num. 228), eſt $C^2 = mRV$, erit $\frac{A^2}{P^2} = mRV$, ſive $A^2 = mRVP^2$, in qua formula V eſt vis, m ſinus inclinationis rectæ tendentis ad centrum virium cum tangente, R radius circuli oſculatoris, vel mR dimidia chorda, quam ex directione vis abſcindit circulus oſculator. Poſita autem di-
F.21 ſtantia CL in fig. 21 $= D$, cum ſit ut radius $= 1$ ad ſinum anguli $CLP = m$, ita $CL = D$ ad $CP = P$, erit $m = \frac{P}{D}$, quo valore ſubſtituto in formula $C^2 = mRV$ habetur $C^2 = \frac{PRV}{D}$, ſive $C^2 D = PRV$, in formula vero $A^2 = mRVP^2$ habetur $A^2 D = P^3 RV$.

253 Inde autem iterum patet, quam multæ ex iis formulis aliæ formulæ oriantur, & quam multa theoremata, relicto quovis e valoribus ex una parte, & habito pro conſtanti quovis e terminis, vel ſimul pluribus. Ex iis unam ſeligo formulam, nimirum $V = \frac{A^2 D}{P^3 R}$ profluentem ex hac poſtrema, ubi habetur ſequens theorema. *Vis ubicumque in curvis quibuſcumque eſt in ratione compoſita ex directa duplicata areæ dato quovis tempore deſcriptæ, ſimplici directa diſtantiæ a centro virium, reciproca triplicata perpendiculi demiſſi e centro in tangentem, reciproca ſimplici radii circuli oſculatoris*. Ejus uſus ſtatim patebit in ſequenti paragrapho.

§. XIX. Ad not. in verſ. 1806.

DE PROBLEMATE DIRECTO, ET INVERSO VIRIUM CENTRALIUM.

254 Quæ Noſter, ut verſibus impervia, prætermittenda ſibi eſſe hic affirmat, propoſui in hac nota, ubi quædam præcipua, quæ huc pertinent, in ſupplemento exhibiturum promiſi. Ea autem ſunt in primis, quæ pertinent ad problema directum, & inverſum virium centralium. Directum problema dicitur, cum data curva, quæ deſcribi debeat, quæruntur vires ad eam deſcribendam neceſſariæ, problema autem inverſum, cum data lege virium, quæritur curva, quam punctum mobile, e dato puncto loci, cum data velocitate, egrediens deſcribet.

255 Ubi vires agant unico impulſu per intervalla, deſcribi poligonum quoddam, quod in curvam abeat continuam, facta continua actione virium, expoſuimus n. 219, & 220. in fig. 13, & 14, ubi facile patet, ſi directiones virium non omnes in eodem jaceant plano, curvam non in eodem plano jacentem deſcribi, ſed in diverſis, cujuſmodi curvæ dicuntur duplicis curvaturæ. Id quidem generaliter pertinet ad problema inverſum, quo datis viribus activis, & projectione, quæritur via. Eodem pacto demonſtrari debet generaliter theorema perti-

nens

nens ad problema directum, quo data via quæruntur vires, nimirum, propoſita quavis curva, poſſe ipſam deſcribi viribus quibuſdam, & quadam adhibita projectione. Hoc theorema exprimit Noſter paulo inferius a verſu 2039. ad 2046; & inde ad 2050 ipſum directum problema ſolvi poſſe profitetur. Demonſtrabimus igitur hic ipſum hoc theorema, & conſectaria quædam utiliora deducemus, tum problematis directi ſolutionem exhibebimus, ac deinde generalem itidem inverſi ſolutionem problematis perſequemur.

256 Sit in fig. 24 curva quævis *AHO*, & concipiatur, quævis ejus chorda *AE*, quæ tantundem producatur in *EG*, tum e quovis curvæ puncto *H* jacente ultra *E* ducatur *HG*, eodemque pacto ducta *HL*, & producta tantundem in *N*, ducatur *LK*, tum producta *HL* tantundem in *N*, ducatur *ON*, & ita porro, ac compleantur parallelogramma *GEDH*, *KHIL*, *NLMO*. Patet, ſi punctum quoddam projiciatur per *AEV*, & in punctis *E*, *H*, *L*, *O* adveniant impulſus per *ED*, *HI*, *LM*, debere id punctum percurrere poligonum *AEHL* &c. illi curvæ inſcriptum. F.24.

257 Hinc patet, poſſe viribus quibuſdam, quæ agant per intervalla tempuſculorum, deſcribi quodvis poligonum inſcriptum ipſi curvæ, dummodo projectio fiat per aliquod e poligoni lateribus, & dato ipſo poligono, dantur directiones virium ad ejuſmodi deſcriptionem neceſſariarum, ac datur relatio inter ipſas, & earum nexus cum velocitate projectionis. Velocitas autem projectionis, velocitas in quovis latere poligoni, & magnitudo ipſarum virium mutari poterunt, ut libuerit, dummodo certum nexum ſervent inter ſe, pendentem a prima projectione. Quoniam enim omnia latera æqualibus temporibus percurrentur, velocitas in uno latere ad velocitatem in alio quovis erit, ut illud latus ad illud aliud, quæ ratio, prima velocitate mutata utcumque, erit conſtans, adeoque velocitas in quovis latere mutabitur in eadem ratione, in qua mutatur velocitas in latere primo. Vis autem in quovis puncto debebit eſſe reciprocè ut quadratum tempuſculi, cum enim quævis lineola *GH*, *KL*, *NO* &c. (num. 220) debeat eſſe, ut vis, & quadratum tempuſculi, cumque ipſa lineola maneat eadem, debebit vis eſſe in ratione reciproca quadrati tempuſculi ipſius, adeoque in ratione directa quadrati velocitatis. Quare habebitur hujuſmodi theorema *velocitas in quovis latere erit, ut velocitas prima projectionis, vis verò activa in puncto quovis, in ratione duplicata velocitatis ipſius*.

258 Quod ſi non puncta *H*, *L*, *O* &c. aſſumantur ad arbitrium, ſed directiones virium *ED*, *HI*, *LM* &c., determinato ad arbitrium primo latere *AE*, & ductis *GH*, *KL*, *NO* &c. parallelis *ED*, *HI*, *LM* &c., determinabuntur earundem virium magnitudines, & primum latuſculum poterit ſemper aſſumi ita parvum, ut quævis ex iis parallelis occurrat alicubi, curvæ ipſi, dummodo inclinationes ejuſmodi fiant in angulo finito ad chordas præcedentes productas, ultra quas curva ſemper arcu aliquo in ſe determinato, & proinde finito, procurret. Et quoniam variari poterunt directiones illæ arbitrariæ in infinitum, infinita numero poligona eidem curvæ inſcripta deſcribi poterunt, & pro quovis ex iis, mutata primi lateris celeritate, habebitur illud idem ſuperius theorema.

259 Si aſſumatur punctum *C* quodcumque ad arbitrium, poterunt illæ omnes vires *ED*, *HI*, *LM* &c. dirigi ad id punctum *C*, & vires erunt centrales, nimirum attractivæ, vel repulſivæ, prout punctum *C* jacuerit ex parte cava, vel

ex parte convexa, ac dato centro virium, & velocitate primæ projectionis per primum latus, dabuntur omnes vires; dato autem centro, & mutata celeritate prima, mutabuntur ipſæ vires, ut prius, in ratione duplicata velocitatis ipſius.

260 Si demum concipiatur, primum illud latus *AE* minui in infinitum, manente quavis velocitate, donec demum evaneſcat; minuentur in infinitum, & evaneſcent omnia tempuſcula, & omnia reliqua poligoni latera, ac poligonum abibit in illam ipſam curvam, directio projectionis *AEV* in tangentem *SET*, vis autem centralis continua fiet, & data velocitate primæ projectionis, quæ tamen fieri debebit per tangentem curvæ, ac dato quovis virium centro, quod tamen pro viribus attractivis jacere debebit ex parte cava, pro repulſivis ex parte convexa, erunt vires quædam determinatæ in ſingulis punctis ipſius curvæ, quibus ea curva deſcribi poſſit, eæ nimirum, in quas deſinunt vires, quæ requirebantur ad poligonum, & agebant per intervalla, ac hæ illam habebunt rationem ad ſe invicem in diverſis diverſarum curvarum punctis, ad quam illæ accesſerunt ultra quoſcumque limites, cum ad has in infinitum accederent, & mutata velocitate primæ projectionis, mutabuntur reliquæ velocitates omnes in eadem ratione ſimplici, vires autem in eadem ratione duplicata.

261 Hoc pacto generaliter demonſtratum eſt directum illud theorema, & conſtat, eandem curvam aſſumpto quovis centro virium, & facta projectione ubicumque, poſſe infinitis numero virium ſeriebus diverſis deſcribi, variata nimirum velocitate projectionis ipſius, qua data, adhuc illa curva deſcribi poteſt, quamquam non niſi per unicam virium ſeriem. Ad Geometriam autem pertinebit, data natura curvæ cujuslibet, hanc ſeriem virium invenire.

262 Porro in hoc motu habebuntur omnia illa theoremata, quæ generaliter de motu quocumque, & quæ pro viribus ad datum centrum tendentibus demonſtrata ſunt in ſuperioribus binis paragraphis. Bina autem ſeligo theoremata alterum generale pro quovis virium genere, quod num. 228 continetur hac formula $C^2 = 2mRV$, unde infertur $V = \frac{C^2}{2mR}$, ubi *V* eſt vis, *C* celeritas, *mR* chorda, quam radius oſculi abſcindit e directione virium, alterum peculiare pro viribus centralibus, quod num. 253 continetur hac formula $V = \frac{A^2 D}{2P^3 R}$, ubi *V* eſt itidem vis, *A* eſt area dato quovis tempore deſcripta, *D* diſtantia a centro virium, *P* perpendiculum e centro virium in tangentem, *R* radius circuli oſculatoris.

263 Ex prima formula eſt vis directè, ut quadratum celeritatis, & reciprocè, ut chorda, quam circulus oſculator abſcindit a directione vis ipſius. Quoniam, data curva, datur ope Geometriæ circulus, qui ipſam in quovis puncto oſculatur, &, dato centro virium, datur directio vis ad quodvis datum punctum pertinentis; datur chorda illa ipſo circulo oſculatore intercepta. Velocitas autem (num. 249) eſt reciprocè, ut perpendiculum ductum ex centro virium in tangentem, quod perpendiculum, data curva, datur ubique per Geometriam. Datur igitur & lex, ſecundum quam in diverſis curvæ punctis variatur vis centralis. Ipſa autem vis abſoluta datur itidem, data primæ projectionis velocitate. Nam ejus ope datur velocitas in quovis alio puncto ope perpendiculorum in tangentes. Porro vis ea eſt (num. 231), qua ejuſmodi velocitas

aequi-

acquiri poteſt motu uniformiter accelerato per quartam partem illi us chordæ. Hæc generalis ſolutio eſt, peculiares ſolutiones exhibentur a peculiaribus curvarum naturis, & res a Mechanica ad Geometriam delata eſt.

264 Exemplum a circulo deſumemus, in quo vis dirigatur ad ipſius centrum. Chorda illa erit ipſa circuli diameter, cum per ejus centrum tranſire debeat, & circulus quivis ſui ipſius ubique oſculator ſit. Quare vis in circulo erit, ut quadratum velocitatis directè, & diameter, ſeu radius reciprocè; motu autem uniformiter accelerato per quartam diametri partem ea vi, quæ habetur in motu circulari, acquireretur velocitas, cum qua motus in circulo fit. Atque hinc quidem facile deducuntur, quæcumque de viribus centralibus motuum circularium Hugenius protulit in Horologio oſcillatorio, & multo plura.

265 Dicatur enim vis V, celeritas C, radius R, tempus periodium, quo nimirum totus circulus percurritur, T: erit ex hoc theoremate $V = \frac{CC}{R}$. Eſt autem ex formulis motus æquabilis tempus periodium directè, ut peripheria, ſive, ut radius, & reciprocè ut celeritas, ſive $T = \frac{R}{C}$, & $C = \frac{R}{T}$. Quare erit $V = \frac{RR}{TTR} = \frac{R}{TT}$, *ſive vis directè, ut radius, & reciprocè, ut quadratum temporis periodici*. Inde autem bina theoremata deducuntur, quorum uſus erit infra ſummus.

266 Primo quidem ſi tempus periodicum fuerit conſtans, erit $V = R$, ſive *in circulis eodem tempore deſcriptis vires ſunt, ut radii*, quod uſui erit in determinanda ratione vis centrifugæ ortæ in diverſis Terræ locis ex motu circulari diurno.

267 Deinde *ſi fuerint quadrata temporum, ut cubi diſtantiarum, ſive ut cubi radiorum*, erit $TT = R^3$, adeoque $V = \frac{R}{R^3} = \frac{1}{R^2}$, nimirum *erunt vires in ratione reciproca duplicata diſtantiarum*. Porro quoniam & Planetæ Primarii circa Solem, & Secundarii circa Primarios deſcribunt orbitas plurimum accedentes ad circulos, & quadrata temporum periodicorum ſunt ex Kepleri inventis, ut cubi diſtantiarum; hinc primo Newtonus collegit, urgeri Primarios cum Secundariis in Solem, Secundarios in Primarios viribus decreſcentibus in ratione reciproca duplicata diſtantiarum.

268 Secunda illa formula $V = \frac{A^2 D}{P^3 R}$, omiſſo termino conſtanti 2, fœcundiſſima eſt itidem, & exempla liceret proferre quamplurima, niſi limitibus nimis arctis coercerer. Tendant vires ad centrum Ellipſeos, vel a centro Hyperbolæ. In meis Conicarum Sectionum Elementis demonſtravi num. 520, eſſe radium oſculi in ratione reciproca triplicata perpendiculi e centro in tangentem. Erit igitur $R = \frac{1}{P^3}$, adeoque $V = \frac{A^2 D P^3}{P^3} = A^2 D$. Cum igitur, ubi de eadem Ellipſi, vel Hyperbola eſt ſermo, ſit A conſtans, ſive eadem area; erit $V = D$, ſive *vis reſpiciens centrum Ellipſeos, vel Hyperbolæ directè, ut diſtantia a centro*.

269 Ex iis, quæ in iiſdem Elementis demonſtravi num. 194, facile deducitur, eſſe perpendiculum P e foco in tangentem in Ellipſi, & Hyperbola ad ſe-

miaxem tranſverſum, ut eſt diſtantia D puncti contactus a foco ad perpendiculum e centro in tangentem, quod idcirco ob ſemiaxem conſtantem, erit ut $\frac{D}{P}$. Quare radius circuli oſculatoris R erit, ut $\frac{P^3}{D^3}$, quæ ratio generalis eſſe debet etiam Parabolæ, in quam Ellipſis, & Hyperbola abeunt, ubi axis evadit infinitus, ut infra habetur in notis, & in ſupplemento lib. 2. Poſito eo valore pro R, habetur $V = \frac{A^2Dp^3}{P^3D^3} = \frac{A^2}{D^2}$, nimirum ob A conſtantem, *ſi deſcribatur quævis conica ſectio virium centro exiſtente in foco, vis erit in ratione reciproca duplicata diſtantiarum.*

270 Si autem is Ellipſeos focus, ad quem vires tendunt, abeat in infinitum, abit Ellipſis in Parabolam, virium directiones evadunt parallelæ, & diſtantiæ a ſe invicem acquirunt rationem æqualitatis. *Quare viribus directionem eandem, & magnitudinem conſtantem ſervantibus deſcribitur Parabola*, quod theorema Galileus invenit pro ea gravitatis hypotheſi, & Noſter exhibet lib. 2.

271 Quod ſi diverſæ Ellipſes inter ſe conferantur, & tempus periodicum dicatur T, erit id tempus eo majus, quo area totalis eſt major, quæ, ſi ſemiaxis tranſverſus dicatur B, conjugatus E, eſt, ut ſponte conſequitur ex mearum Sectionum Conicarum num. 385, ut BE, & quo minor area A dato quovis tempore deſcribitur. Quare erit, T ut $\frac{BE}{A}$, & A, ut $\frac{BE}{T}$. Eſt autem radius circuli oſculatoris in ſemiaxis conjugati vertice (earundem Sectionum num. 509) æqualis dimidio lateri recto ejus axis, quod (num. 251 earundem) eſt $\frac{B^2}{E}$, ac ibidem (num. 124 earundem) diſtantia æqualis ſemiaxi tranſverſo B, perpendiculum autem e foco in tangentem ibidem, patet, eſſe æquale ſemiaxi conjugato E; adeoque, ut $\frac{B^3}{E^3}$ ad $\frac{D^3}{P^3}$, ita $\frac{B^2}{E}$ radius ibidem, ad R radium ubicumque alibi, qui evadit $= \frac{D^3E^2}{P^3B}$. Quare ſubſtituto eo valore pro R, & $\frac{B^2E^2}{T^2}$ pro A^2, formula $\frac{A^2D}{P^3R}$ evadit $\frac{B^2E^2}{T^2P^3} \times D \times \frac{P^3B}{D^3E^2} = \frac{B^3}{T^2D^2}$. Hinc generaliter *In omnibus ellipſibus vires directæ ad focum ſunt in ratione compoſita ex directa triplicata ſemiaxium tranſverſorum, reciproca duplicata temporum periodicorum, & reciproca duplicata diſtantiarum.* Quare *ſi quadrata temporum periodicorum fuerint, ut cubi ſemiaxium tranſverſorum, ſive*, quod eodem recidit, *diſtantiarum mediarum, erunt vires ubicumque in ſola ratione reciproca duplicata diſtantiarum ab ipſo foco.*

272 Porro hiſce theorematis univerſa Newtoniana Theoria cæleſtis innititur. Cum enim Keplerus comperiſſet, Planetas moveri in ellipſibus, & habere centrum arearum æqualium in foco communi, quem obtineret Sol, ac quadrata temporum periodicorum eſſe, ut cubos diſtantiarum mediarum, deduxit Newtonus, Planetas omnes, ubicumque ſint, in quavis e ſuis orbitis urgeri in Solem vi decreſcente in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, quæ quidem, ut & alia plurima, quæ e fœcundiſſimis hiſce formulis ſponte fluunt, ſummum habebunt uſum in ſequenti tomo, quo ipſam Cæleſtem Newtoni Mechanicam Noſter complectitur.

273 Ut

273 Ut ſublimiorum curvarum unicum exemplum addam; eſt curva, quæ dicitur ſpiralis logarithmica, quæ infinitis ſpirls circa datum punctum, quod dicunt polum, convertitur ita, ut quævis recta e polo ad quodvis cujuſvis ſpiræ punctum ducta contineat cum ejus tangente angulos ſemper eoſdem. Facile demonſtratur ex hac ejus natura, & perpendiculum e centro in tangentem, & radium circuli oſculatoris in quovis ejus curvæ puncto eſſe, ut eſt diſtantia ab illo polo. Quare ſi in ipſo ſit centrum virium, & ipſa ejuſmodi ſpiralis deſcribatur, erit $P = D$, $R = D$, adeoque $V = \frac{A^2 D}{D^4} = \frac{A^2}{D^3}$, nimirum vis in hujuſmodi curva in ratione reciproca triplicata diſtantiarum a centro.

274 His abſolutis demonſtrabimus bina theoremata, quæ huc pertinent, & ad inverſi problematis ſolutionem viam ſternunt. Primum autem, cujus mentionem feci paulo infra in nota ad verſum 1857, eſt hujuſmodi. *Quotieſcumque directio vis in datum centrum tendentis cum tangente continet angulum acutum, habetur acceſſus ad centrum virium, quotieſcumque facit angulum obtuſum, habetur receſſus; ubi autem is angulus eſt rectus, habetur acceſſus, diſtantia manet eadem, vel habetur receſſus, prout velocitas fuerit minor, æqualis, vel major reſpectu ejus velocitatis, quæ per dimidium diſtantiæ a centro virium acquireretur vi, quæ ibi habetur in curva.*

275 Sit enim LP directio tangentis, quæ cum recta LC contineat angulum F. 25. in figura 25 acutum, in fig. 26 obtuſum, in fig. 27 rectum. Ea erit ubique 26. (num. 222) tangens curvæ deſcriptæ LBR, quæ, ubi vires fuerint attractivæ, 27. ut hic, jacebit verſus centrum C, nam ſi repulſivæ eſſent, jacerent ad partes oppoſitas, ipſi C obvertens (num. 248) cavitatem in primo caſu, convexitatem in ſecundo.

276 Aſſumpto arcu LB infiniteſimo, ducta recta CB, ac in fig. 25, & 26 LBp, infiniteſimus erit tam angulus LCB, quam PLp, cum abeunte B in L, uterque evaneſcat. Patet autem, angulum CLB in fig. 25 debere eſſe adhuc acutum multo magis, qui idcirco dato aliquo angulo a recto differet, adeoque acutus erit etiam externus CBp, qui ab eo differt per infiniteſimum LCB. Erit igitur CBL obtuſus, & proinde latus CB minus latere CL, diſtantiâ nimirum imminutâ, quod erat primum.

277 At in fig. 26 ducta LO perpendiculari ad CL, aliquis arcus LB neceſſario jacebit intra angulum PLO, adeoque puncto B accedente in infinitum ad L, erit angulus CLB adhuc obtuſus, & proinde CBL acutus, & latus CB majus, quam CL, diſtantiâ auctâ, quod erat ſecundum.

278 Demum in fig. 27 ducta BG parallela PL, ſi centro C, intervallo CL deſcribatur circulus, qui ipſi GB productæ, ſi opus ſit, occurrat in b, tum ducantur BD, bd parallelæ CL, is circulus deſcribi poterit (num. 260) viribus quibuſdam, & in eo velocitas erit (num. 264) ejuſmodi, quæ per dimidiam diſtantiam LC acquiri poſſit motu uniformiter accelerato vi, quæ habetur in L, ac ejus velocitatis effectus tempuſculo debitus, quo vi eâdem percurreretur LG, erit (num. 234) Ld, vel Gb. Si igitur velocitas fuerit minor, ejus effectus eodem tempuſculo erit LD, vel GB minor; ſi ea fuerit major, hic erit LD', vel GB' major, ac in primo caſu punctum B jacebit intra circulum, imminutâ diſtantiâ CB, in ſecundo extra ipſum, eadem auctâ, quod erat poſtremum.

Ubi

279 Vbi vires repulſivæ ſint, arcus LBR ultra tangentem LP cadit, & in prioribus binis caſibus adhuc idem theorema locum habet, in poſtremo anguli recti caſu diſtantia ſemper creſcit. Fieri autem poteſt in caſu anguli acuti, ut poſt exiguum acceſſum ſuccedat receſſus, vel in caſu anguli obtuſi poſt exiguum receſſum in viribus attractivis ſuccedat acceſſus, mutata nimirum interea directione & tangentis, & rectæ tendentis ad centrum, & angulo ex acuto migrante in obtuſum, vel viceverſa; ſed ex ſuperiore demonſtratione evidentiſſimum eſt, ſemper in caſu anguli acuti debere haberi aliquem acceſſum, in caſu anguli obtuſi aliquem receſſum, per aliquem, utut exiguum, arcum continuum.

280 Alterum theorema, quod pertinet ad velocitates, eſt hujuſmodi. *Si bina puncta moveantur in lineis quibuſcumque, viribus, quæ in æqualibus a centro diſtantiis ſint æquales, in diverſis mutentur utcumque, & ſemel in diſtantiis æqualibus habuerint velocitates æquales, in aliis quibuſcumque diſtantiis æqualibus æquales itidem velocitates habebunt.*

281 Concipiatur enim in fig. 25, & 26 centro C, intervallo CB arcus circuli BQ occurrens CL in Q. Aſſumpto angulo QLB pro QLP, cujus coſinum num. 226 diximus $= n$, & arcu BQ pro recta ipſi CL perpendiculari, a qua diſtat per quantitatem infiniteſimam reſpectu ipſius LQ prorſus, ut in fig. 15, & 16, arcus HN ab HM, erit, ut coſinus n ad radium $= 1$, ita LQ ad $LB = \frac{LQ}{n}$. Porro incrementum, vel decrementum velocitatis in arcu LB eſt (num. 226.), ut $n\,Vt$, ubi V exprimit vim, t tempuſculum, quo percurritur LB, & ſi in data quavis diſtantia CL, mutata utcumque directione arcus LB, velocitas fuerit eadem, erit tempuſculum ut LB, ſive ut $\frac{LQ}{n}$, adeoque nVt, ut $V \times LQ$. Quare ſi vis quoque V ſit eadem, erit incrementum, vel decrementum velocitatis in quibuſvis arcubus, ut LQ, ſive ut decrementum, vel incrementum diſtantiæ, & in paribus decrementis, vel incrementis diſtantiæ, pari quantitate creſcet, vel decreſcet ipſa velocitas. Quare *ſi velocitas ſemel in diſtantiis æqualibus æqualis fuerit, erit itidem in aliis quibuſcumque ſemper æqualis*, quod patet locum habere etiam ubi LB cum ipſa LQ congruat, & motus fiat centrum verſus, vel ad partes oppoſitas ipſi per rectam lineam.

F. 28. 282 Hiſce præmiſſis jam facile ſolvitur generaliter per curvarum quadraturas problema inverſum. Quæratur in fig. 28 linea ABR, quam deſcribere debeat punctum egreſſum ex dato puncto A cum data velocitate, & data directione AT, data vi pro quavis diſtantia a centro dato C. Sit ibidem DI ſcala virium pro ſpatio AC eadem, ac in fig. 25, ſed angulus CAD ſit rectus, & ad partes centro oppoſitas ſit AK altitudo illa, ex qua motu uniformiter accelerato per vim AD acquireretur velocitas illa data, ac compleatur rectangulum $DAKL$, ſumaturque AM æqualis lateri quadrato areæ ipſius rectanguli, ac concipiatur pro quavis diſtantia CH recta Am, cujus quadratum æquetur areæ utrique ſimul $LKAD$, & $DAHI$, ac patet (num. 161.), ſi punctum illa velocitate projiciatur ex A verſus centrum C per rectam AC, velocitates in A, & H fore, ut AM, Am, cum nimirum earum quadrata ſint, ut areæ $LKAD$, & $LKAD + DAHI$, ſive AM^2, & Am^2, adeoque, ſi centro C, intervallo CH deſcribatur arcus circuli occurrens curvæ AR in B, velocitates in ipſa curva in A, & B erunt itidem, ut AM, Am.

283 Concipiantur arcus infiniteſimi AG, Bb deſcripti æqualibus tempuſculis,

ſculis, & rectæ CG, CB, Cb occurrant in F, E, e circulo deſcripto radio CA, ac recta Cb arcui HB producto in Q, ducaturque CP perpendicularis ad AT; & quoniam angulus CAF eſt æquipollenter rectus, & FAG æquipollet ipſi FAP, erit FAG complementum CAP, adeoque æqualis ACP, & ob angulum quoque AFG æquipollentem recto P, erit $AG \,.\, AF :: AC \,.\, CP$, adeoque $\frac{AG}{AF} = \frac{AC}{CP}$.

284 Porro ob aream ACG, ſive ACF æqualem (n.239.) BCb, ſive BCQ, erit $CB = CH \,.\, CA :: AF \,.\, BQ$, & ob æqualia tempuſcula, quibus percurruntur AG, Bb cum velocitatibus AM, Am, erit (n.75.) AM, $Am :: AG \,.\, Bb$. Quare ſingulis binarum proportionum terminis diviſis per ſingulos ſibi reſpondentes, erit $\frac{AM}{CH} \cdot \frac{Am}{CA} :: \frac{AG}{AF} = \frac{AC}{CP} \cdot \frac{Bb}{BQ} = \frac{Am \times CH}{Am \times CP}$. Hinc $Bb^2 \,.\, BQ^2 :: Am^2 \times CH^2 \,.\, AM^2 \times CP^2$, & dividendo $Bb^2 - BQ^2 = bQ^2 = Hb^2 \,.\, BQ^2 :: Am^2 \times CH^2 - AM^2 \times CP^2 \,.\, AM^2 \times CP^2 :: \frac{Am^2 \times CH^2}{AM^2 \times CP^2} - 1 \,.\, 1$. Eſt autem $BQ^2 \,.\, Ee^2 :: CB^2 = CH^2 \,.\, CE^2 = CA^2$. Quare compoſitis rationibus, erit $Hb^2 \,.\, Ee^2 :: \frac{Am^2 \times CH^2}{AM^2 \times CP^2} - CH^2 \,.\, CA^2$.

284 Fiat, ut AM ad CH, ita Am ad quandam rectam, tum ut CP ad CH, ita ea recta ad aliam, quæ idcirco erit $= \frac{Am \times CH^2}{AM \times CP}$, ac centro C, intervallo hujus, inveniatur, niſi ea ſit minor, quam CH, in recta HI punctum N, eritque $HN^2 = \frac{Am^2 \times CH^4}{AM^2 \times CP^2} - CH^2$. Quare erit $Hb^2 \,.\, Ee^2 :: HN^2 \,.\, CA^2$, & proinde $Hb \,.\, Ee :: HN \,.\, CA$. Quare ſi in ipſa HI capiatur HO tertia poſt HN, & CA, erit $Hb : Ee :: CA \,.\, HO$, & $Ee \times CA = Hb \times HO$.

286 Si igitur pro quovis puncto H, vel h inveniatur eodem pacto ſua HO vel Ho, & per omnia puncta O tranſeat curva continua SO occurrens rectæ AD in S; ſinguli arcus Ee ducti in CA æquabuntur ſingulis areolis $OHho$, & proinde totus arcus AE ductus in AC toti areæ $SAHO$, quæ data quavis diſtantia AH, dabitur, & applicata ad rectam datam CA exhibebit arcum circuli AE, qui proinde datur, & datur poſitio radii CE, ac ob $CB = CH$, datur punctum B curvæ quæſitæ.

287 Ex hujuſmodi analyſi conſtructio eſt facilis ope duplicis quadraturæ curvarum DI, & SO, & rectificationis arcus circularis. Aſſumpta nimirum quavis diſtantia CH, inveniatur Am, cujus quadratum æquetur ſummæ binarum arearum $LKAD$, $DAHI$, & ejus ope inveniatur HO, ut num.284., deſcribaturque curva SO per omnia ejuſmodi puncta O. Itidem pro quavis diſtantia CH inveniatur recta, cujus quadratum æquetur areæ $SAHO$, tum tertia continue proportionalis poſt CA, & eam rectam, capiaturque arcus AE circuli deſcripti radio CA huic tertiæ æqualis, & ducto radio CE, capiatur CB æqualis CH, quæ erit ad curvam quæſitam. Eadem autem conſtructio habebit locum ſi angulus CAT ſit obtuſus, & H cadat ſupra A, dummodo Am aſſumatur ita, ut ejus quadratum æquetur differentiæ arearum $DAKL$, $DAHI$; ac ſi vires ſint repulſivæ, prior illa determinatio pro angulo obtuſo per ſummam earum arearum, hæc poſterior per differentiam æquè problema ſolvet. Altitudo autem AK invenie-

venietur, ſi ſemel conſtet, quæ velocitas ex data quapiam altitudine per datam aliquam vim, ut per gravitatem generetur. Sunt enim (num. 166.) ſpatia in motu uniformiter accelerato, ut vires, & celeritates genitæ conjunctim, adeoque datis binis viribus, binis velocitatibus, & ſpatio reſpondente alteri vi, & velocitati, datur & ſpatium alteri reſpondens.

288 Non vacat in hujus generalis ſolutionis conſideratione immorari diutius, ex qua ad particulares caſus multo operoſior deſcenſus eſt. Nobis uſui erit infra lib. a inverſum problema in caſu, in quo vires conſtantem habeant & directionem, & magnitudinem, pro quo caſu parabolam Galileanam continente peculiarem ſolutionem multo faciliorem exhibebimus. In 2. tomo occurret idem pro caſu, in quo vires decreſcant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, quo caſu habetur ſemper conica ſectio, & quidem, ut ego inveni, & jam olim exhibui in diſſertatione de motu corporis hac lege attracti in centrum immobile, Ellipſis, Parabola, vel Hyperbola, prout velocitas primæ projectionis fuerit minor, æqualis, vel major eâ, quæ acquireretur motu uniformiter accelerato per vim, quæ habetur in ipſo puncto projectionis, in deſcenſu rectilineo per altitudinem æqualem diſtantiæ a centro, Ellipſi abeunte in circulum, ſi directio projectionis ſit perpendicularis rectæ tendenti ad centrum virium, & altitudo velocitati eo modo debita æquetur dimidiæ diſtantiæ a centro. Sed ea omnia ibi ex ipſius directi ſolutione problematis multo facilius derivabuntur etiam pro inverſo.

§. XX. Ad not. in verſ. 1828

DE VI CENTRIFUGA.

289 Quæ ad veram ideam vis centrifugæ pertinent, ſatis luculenter expoſui in hac, & ſequentibus quatuor notis, ac errorem aperui ſatis communem illum quidem, & in hac rerum mechanicarum luce omnino turpem, quem hic Noſter etiam inſectatur, eorum, qui pugnam quandam conſtituunt inter vim centrifugam, & centripetam ita, ut ubi altera prævaleat, acceſſus ad centrum haberi debeat, vel receſſus a centro; ubi neutra, circulus deſcribatur; cum revera vis centrifuga non activa quædam ſit vis, ſed paſſiva, & æqualis ſemper vi centripetæ, ſive habeatur acceſſus, ſive receſſus. Addam hic ea tantummodo, quæ ad id ipſum oculis ſubjiciendum ex Geometria requiruntur.

F.25 290 In fig. 25 ex puncto extremo *B* arcus infiniteſimi *LB* concipiantur *BG*, *BD* parallelæ rectis *LD*, *LC*, & juxta n. 234, recta quidem *LD* exprimit æquipollenter motum, qui haberetur, ſi nulla adeſſet vis centripeta, recta vero *DB*, vel *LG*, effectum ſolius vis centripetæ, qui haberetur ſine ulla præcedenti velocitate.

391 Ea duo tantummodo hic habentur, quæ motum determinent. Primo quidem habetur determinatio illa abeundi per tangentem *LD* ob vim inertiæ, & velocitatem præcedentem, niſi aliqua vis activa ad mutationem ſtatus determinet. Ea dicitur vis tangentialis, nec quidquam differt ejus idea ab idea velocitatis illius potentialis, ſive vis inertiæ determinatæ a præcedentibus ſtatibus, de qua egimus ſupra, niſi tantummodo, quod adeſt curva quædam, quæ illa vi activa accedente deſcribitur, & cujus tangens eſt illa velocitatis directio, quæ nomen *tangentialis* tribuit determinationi illi ipſi, ſive velocitati. Secundo vis illa activa, quæ ſi ſola eſſet, & perpetuo ageret in eadem directione *LC*,

motum

Digitized by Google

motum generacet per *LG*, ex quibus ſimul compoſitis exſurgit motus curvilineus, quæ poſterior, cum ad certum punctum *C* dirigatur, appellatur centripeta. Demptis hiſce duobus, nihil aliud præterea ab his diſtinctum habetur in ipſa re, nec hæ duæ vires opponùntur, eum prima ſit mere paſſiva, orta ex vi inertiæ, quæ requirit motum *ED* pro caſu, quo ſola ſie, ſed ſimul requirit, ut, ſi altera vis adſit per *EG*, effectum ſuum ſecum conjungat, & utriuſque officio fiat motus ille ipſe, qui fit.

292 Ex illa cnmbinatione binarum ejuſmodi virium fit illud, ut punctum mobile deferatur potius ad *B*, quam ad *D*, quo defe: retur, ſi vis activa non adeſſet, adeoque aecedat ad centrum virium per intervallum *DB* intereeptum intoe punctum tangentis, ad quod deveniret ſine vi activa, & punctum eurvæ, ad quod devenit revera ex ejus actione; nam ob angulum *ECB* infiniteſimum, & *BD* parallelam *CE* poteſt *CBD* haberi pro uniea recta, & aeceſſus totus ex vi activa ortus æſtimari ab ipſa *DB*. Hæc conſideratio determinationis ad acquirendam majorem diſtantiam, quæ reſultat ex determinatione abeundi ad *D*, ſi nulla vis activa agat, appellatur vis centrifuga, quæ eſt quædam conſideratio effectus vis inertiæ, non totalis abeundi per *ED*, nam is dicitur vis tangentialis, ſed eujuſdam veluti partialis, qui oritue ex illa combinatione curvæ adjunctæ, ad quam vi activa punctum dedueitur, quo nimirum in ipſo itu ad *D* acquireretur receſſus *BD*.

293 Hine illa eadem eecta *DB*, vel *EG*, quæ vim activam exprimit, aſſumpta eum directione oppoſita *BD* exprimit vim centrifugam, quæ quidem & ipſa eſt quædam paſſiva vis, non activa. Non pugnat cum vi centripeta; eequirit enim, ut habeatur receſſus a curva per *BD* ſolum pro caſu, quo vis activa centripeta non adſit, & pro caſu, quo ea adſit, ultro permittit acceſſum per *BD*.

294 Patet igitur, vim eentrifugam in motibus liberis ſemper æqualem eſſe vi centripetæ, ſed nullum eum ea eertamen habere, & illam paſſivam eſſe hane activam, & patet, illam admodum diverſam eſſe a vi tangentiali, a cujus idea ortum dueit, cum habeat menſucam, & directionem admodum diverſam, illa ſcilieet *BD*, hæc *ED* finito angulo ipſi inelinatam, & infinities majorem. Illud tantummodo rite notandum, quod Noſter expreſſit a verſu 2050 ad 2068: ſi vires eepulſivæ ſint, quo caſu eurva convexitatem centro obvertit, arcu *EB* jacente ultra tangentem *ED*; tum vero vis activa eſt centrifuga, & vis reſultans ex inertia determinante motum per tangentem eſt contra centripeta, & paſſiva; tum enim punctum *B*, ad quod per vim activam cogitur mobile abire a tangente *ED*, diſtatet a centro *C* pluſquam *D*, lineola *DB* jacente ultra ipſam tangentem.

295 Jam veio bini eommitti ſolent errores eirea vim centrifugam. Alii ipſam eonfundunt cum vi tangentiali, cujus menſura debet eſſe infinities major, ut vidimus, quam menſura vis centrifugæ. Alii putant ab illius magnitudine reſpectu vis centripetæ pendere, ut monuimus, aeceſſum curvæ ad centrum, vel eeceſſum a centro, qui itidem plurimum hallucinantur, ut vidimus. Nam acceſſus non pendet ab hujuſmodi viribus, ſed potiſſimum juxta num. 274. ab angulo, quem tangens continet eum eecta tendente ad eentrum virium, qui angulus ſi fuerie acutus, habebitur aceeſſus; ſi obtuſus, receſſus; ſi autem is angulus fuerit rectus, in viribus repulſivis habetue ſemper receſſus, in attractivis

Digitized by Google

vero id pendet a ſola relatione vis tangentialis, ſeu velocitatis, & vis centripetæ. Si nimirum velocitas fuerit minor, quam, quæ motu uniformiter accelerato vi illa centripeta acquireretur per dimidiam diſtantiam, habetur acceſſus; ſi æqualis, diſtantia manet; ſi major, habetur receſſus.

296 Et quidem vi inertiæ in eo tantummodo ſenſu acceptæ, quem hic expoſui; convenit theorema, quod jam olim Hugenius invenit pro circulo, & hic ego ad curvas quaſvis generaliter extendi n. 229, & 231, quod nimirum vis centrifuga in circulo ſit, ut quadratum velocitatis directè, & circuli diameter reciprocè, & in curva quavis directè ut quadratum velocitatis, & reciprocè ut chorda, quam circulus oſculator e directione vis ipſius abſcindit, ſit vero æqualis illi vi, qua motu uniformiter accelerato per quartam partem ejus chordæ acquireretur velocitas, quæ habetur in curva.

297 Illud unum ſupereſt, ut oſtendam, quo pacto ſe res habeat in caſibus quibuſdam, in quibus vis centrifuga videtur eſſe activa quædam vis, quæ partem aliquam vis verè activæ elidat, cum Noſter affirmarit, nullam eſſe pugnam inter ipſam vim centrifugam, & vires activas. Vis centrifuga ex motu diurno Terræ communiter dicitur detrahere aliquid de gravitate, ut infra videbimus lib. 3, & quidem plus ſub Aequatore, quam verſus polos, unde etiam repetitur ex æquilibrio ſublato figura Terræ compreſſa ad polos ipſos; & ubi agitur de gravitatis menſura, menſuræ per obſervationes inventæ additur menſura vis centrifugæ, quæ cenſetur elidere partem ipſius gravitatis, vis utique activæ.

F. 29 298 Sit in fig. 29 *B* Obſervator in ſuperficie Terræ conſtitutus, qui in *B* demittat grave, quod ſibi relictum quodam tempuſculo deveniat ad punctum *E* rectæ *BA* interea motu diurno translatæ in *bea*. Videbitur ipſi perfeciſſe cadendo ſpatium *BE*, & tamen id revera percurrit ſpatium tanto majus, quantum requirit menſura vis centrifugæ. Nam rectâ *BEA* motu diurno translatâ in *bea* per arcum *Bb*, is a tangente *BD* diſtat per ſpatiolum *bD* menſuram vis centrifugæ. Vi inertiæ abiiſſet grave illud per *BD* in *D*. Effectus integer gravitatis eſt *Dbe*, pro quo Obſervator ſolum *be* deprehendit æqualem *BE*. Vis centrifuga igitur nihil detrahit de gravitatis effectu in gravium deſcenſu; nam habetur integer ille effectus *Dbe*; nec proinde cum gravitate pugnat, & ipſam verè elidit, ſed noſtræ obſervationi ſubducitur pars effectus habens menſuram æqualem menſuræ vis centrifugæ. Effectus reſpectivus reſpectu noſtri eſt minor effectu abſoluto; illum autem metimur, non hunc. Hic non minuitur ab oppoſitione vis centrifugæ, ſed oculis noſtris a noſtro motu ex parte ſubducitur, quantum minueretur, ſi vis centrifuga vis activa eſſet, & nobis immotis tantummodo de pleno gravitatis effectu ſubduceret.

299 Eodem pacto ſi grave non delabatur per *BE*, ſed in *B* ſuſtentetur, minus premit, & ipſo, & fulcro deſcendente vi gravitatum ſuarum per *DE*, quam ſi maneret immotum utrumque. Si utrumque liberè caderet, nullam preſſionem ſentiret fulcrum ſe perpetuo ſubducens, utriuſque gravitate plenum effectum ſortita. Nunc cum partem ſortiantur effectus, concipi poteſt gravitas reſoluta in duas partes, quarum altera deſcenſum generat per *D* plenum effectum nacta, altera penitus impedita preſſionem exercet.

300 Atque hoc pacto in hoc caſu, & in alio quovis nihil de vis activæ effectu demit vis centrifuga, licet ſemper dematur tantum, quantum exprimit ipſa vis centrifugæ menſura. Hinc poteſt concipi vis ipſa in motibus potiſſimum impeditis,

ditis, ut quædam activa vis, detrahens aliquid de aliis activis viribus, vel addens, dummodo ratum maneat, id figmentum eſſe noſtrum, non rem. Atque id ipſum expreſſit Noſter a verſu 1886, ad 1931. Sed de his jam ſatis.

§. XXI. Ad notam in verſ. 1931

CUR VIRIBUS CENTRIPETIS PERPETUO AGENTIBUS, PRIMA PROJECTIONIS VELOCITAS DEMUM NON EXTINGUATUR NEC DEVENIATUR AD CENTRUM.

301 Plura in hac & ſequentibus tribus notis innui ad illuſtranda, quæ Noſter profert, pertinentia ad eam difficultatem, quæ quotidie contra Newtonianam theoriam ad nauſeamuſque oggeritur ab iis, qui Mechanicæ ſublimioris principia ignorant, nimirum, vi centripeta perpetuo agente, debere demum omnem velocitatem in prima projectione acceptam extingui. Ipſi affine eſt illud, quod addunt non poſſe percipi, qui fiat, ut dum vis centripeta perpetuo nititur admovere centro punctum mobile, & diſtantiam minuere, diſtantia demum ipſa non tota demum evaneſcat, & punctum ipſum non decidat in centrum virium. Hanc Noſter difficultatem attingit in iis, quæ expoſui in ſecunda e ſequentibus tribus notis, in qua nullam ego ipſius expreſſam mentionem feci. Multa ex iis, quæ propoſui ad priorem ſolvendam, & quæ ad utramque pertinent, hic uberius exponenda, oculis ſubiicienda ipſis ac demonſtranda Geometricarum figurarum, & theorematum, quæ præmiſimus, luce indigent. Curabo, ut, quantum fieri poterit, dilucide, & evidentiſſime ſoluta remaneat utraque, ac ab iis etiam, qui Geometriam, & Mechanicam primis tantummodo labris delibarunt, vis ſolutionis intelligatur.

302 In priore e ſequentibus binis notis duo proponuntur, quæ illuſtratione hic indigent, primo quidem ſummam progreſſionum Geometricarum decreſcentium, terminis in infinitum continuatis, finitam ſemper eſſe. Id quidem ex ipſis elementis proportionum paſſim demonſtrari ſolet. Primo tomo meorum Elementorum Matheſeos, Arithmeticæ cap. 3, num. 9 habetur hujuſmodi theorema, *In progreſſione Geometrica eſt differentia primi termini a ſecundo ad differentiam primi ab ultimo, ut primus ad totam ſeriem dempto ultimo*, quod quidem ibi accurate demonſtratur, tum num. 10 inde deducitur hoc aliud huc pertinens. *Si progreſſio decreſcit in infinitum, ultimo contempto termino, qui pariter in infinitum decreſcens prorſus evaneſcit, habebitur tota ſeries, ſi fiat, ut differentia primi a ſecundo ad primum, ita primus ad totam ſeriem.* Deinde illius ipſius talenti ſoluti per infinitas ſolutiones dimidiatas, quo Noſter utitur, exemplum adhibetur, cum ſeriei $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ &c. continuatæ in infinitum ſumma inveniatur $= 1$, factis $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} . \frac{1}{2} :: \frac{1}{2} . 1$.

303 Proponitur ſecundo loco theorema illud, quo definitur, quanta ſit velocitas, cum qua ſi corpus tendens in datum centrum viribus perpetuo decreſcentibus in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ita proiiciatur ad partes directe

 oppo-

oppoſitas ipſi centro, ut vis illa centripeta perpetuo aliquid a velocitate illa prima abradat, adhuc tamen nunquam retro curſum reflecteret, ſed velocitatis receptæ partem retineret, vel in infinitum decreſcentem, vel etiam finita quadam ſemper majorem. Theorema ipſum, & ejuſmodi velocitatis determinationem ſatis luculenter expoſui in ipſa nota, ejus autem demonſtrationem exhibui ſupra num. 194

304 In ſecunda ex memoratis tribus notis oſtenditur, vim illam centripetam non poſſe efficere, ut punctum mobile e curva illa egrediatur unquam, a cujus natura definitur; cum nimirum tanta admittatur tantummodo, quanta neceſſaria eſt ad præſtandum id unice, ut ubique id punctum deſcendat a tangente ad arcum, &, ut Noſter ibidem expreſſit, flexum tantummodo continuum induat ejuſmodi, qualem continua ipſa curvæ illius curvatura requirit. Id quidem ad ſecundæ difficultatis ſolutionem pertinet magis directe, cum oſtendat, diſtantiam a centro ſemper fore tantam, quanta requiritur ab ipſa curvæ perimetri poſitione, & natura. Pertinet tamen etiam ad ſolutionem prioris, cum motus in illa curva ſine aliqua velocitate conſervari non poſſit, quanquam illo continuo flexu prima projectionis velocitas perpetuo directionem mutabit.

F. 24 305 Hujus ſolutionis vis manifeſta apparebit ſolo figuræ 24 intuitu, & perquam exigua reflexione. Poſita ejus conſtructione, quam num. 256 expoſui, & quæ ſe ſponte prodit ipſum ſchema intuenti, quod ovalem exhibet lineam, cujuſmodi ea eſt, quam Planetæ circa Solem deſcribunt in Newtoniana gravitatis theoria, cum parallelogrammis ab ejus perimetro definitis ſi punctum projectum per *AE* habeat in punctis *E*, *H*, *L*, &c. *e*, *b*, &c. impulſus per *ED*. *bI*, *LM* &c. *ed*, *bi* &c., evidens eſt ipſum debere devenire ad puncta curvæ *H*, *L*, *O* &c., *b*, *l* &c.; & ſi nullas alias habeat vires, niſi eas, quæ ita determinantur ab ipſa curva, nunquam deferetur ad alia puncta, quam ad ea, quæ ipſius curvæ perimeter determinat. Si curva ipſa ad centrum virium prius accedit, ut ovalis propoſita per *ELe*, tum recedit per *elE*, ipſum punctum mobile viribus illis ſemper delatum ad illa ipſa puncta curvæ, prius accedet, tum recedet, ac interea ob areas omnium triangulorum *ECH*, *HCL*, *LCO* &c. *eCb*, *bCl* &c. æquales inter ſe, anguli ad *C* augebuntur imminuta diſtantia, minuentur aucta, velocitate obſequente chordis *EH*, *HL*, *LO* &c. *eb*, *bl* &c. definitis per illas ipſas areas æquales ita, ut ubi ad eadem loca deventum fuerit, eædem priores velocitates, & motus directiones redeant, ac iidem impulſus.

306 Res ita eſt manifeſta, ut, qui difficultates omnes, quæ objici ſolent, cum hoc ſchemate contulerit, ſtatim videre debeat per ſeſe, meras eſſe cavillationes omni prorſus vi deſtitutas. Eædem enim motui per illud ſchema continuato cādem illa lege poterunt applicari, in quo ſchemate evidentiſſimum eſt, motus omnes coerceri ipſa illius curvæ ovalis perimetro, alternatis incrementis, ac decrementis diſtantiarum, & velocitatum, ac mutata in gyrum directione motus, & mutatis inclinationibus directionum velocitatis præcedentis, & novi impulſus ita, ut ſerventur omnes illæ relationes, quas formulæ ſuperius erutæ expoſcunt, & quæ, datis peculiarium curvarum naturis, determinantur.

307 Nimirum incrementa, & decrementa velocitatum, ac diſtantiarum definientur per theoremata expoſita numeris 223, 274. Quotieſcumque directio tangentis producta ad eas partes, in quas tenditur, fecerit alicubi cum directione vis angulum acutum, augebitur velocitas, & minuetur diſtantia; quorſeſcumque

cumque fecerit angulum obtuſum, velocitas minuetur, & diſtantia augebitur. Quod ſi angulus fuerit rectus, & perpetuo rectus per arcum aliquem continuum, tum vero & velocitas, & diſtantia manebit eadem. Si vero in unico puncto habeatur ejuſmodi angulus rectus, tum id, quod ad diſtantiam pertinet, determinabitur a tribus elementis, nimirum a velocitate tangentiali, a vi centripeta, & a diſtantia a centro. Si enim velocitas, & vis fuerit ejuſmodi, ut per eam vim ea velocitas motu uniformiter accelerato acquiri poſſit per dimidiam diſtantiam, diſtantia manebit eadem; ſi velocitas fuerit major, diſtantia augebitur; ſi minor, minuetur. Velocitas itidem poterit nonnihil augeri, vel manere, vel minui; prout perpendiculum e centro virium ductum in tangentem per extremum alterum arcus illius infiniteſimi fuerit minus, vel æquale, vel majus reſpectu prioris perpendiculi, ac per Geometriam infiniteſimalem, & generales curvarum proprietates demonſtrari poteſt, ſemper, ubi habetur acceſſus, augeri velocitatem; ubi eadem diſtantia manet, manere & ipſam; ubi diſtantia minuitur, ipſam contra augeri. Sed hic illud ad rem noſtram facit potiſſimum, quod ad diſtantias pertinet, & quod in iis, quæ præmiſimus, eſt accuratiſſime demonſtratum.

308 Hinc autem patet ſolutio ejus difficultatis, quam alii, ut prorſus inſolubilem hoc pacto proponunt. Sit ovalis illa ellipſis, cujuſmodi figuram planetæ circa Solem deſcribunt; ſit autem *ECe* axis major, *C* focus, & *CE* dupla *Ce*. Quoniam vis centripeta erit (num. 269) in ea curva in ratione reciproca duplicata diſtantiarum a foco, erit ea vis in *e* quadruplo major, quam in *E*, motus autem directio erit utrobique perpendicularis ad directionem vis centripetæ tendentis ad *C*, & curva in arcu *EHL* accedit, in arcu *hle* recedit a foco. Tum ſic interrogant: Si vis illa quadruplo minor in *E* ita deprimit planetam a tangente illa perpendiculari, ut cogat accedere ad focum *C*, cur vis in *e* quadruplo major non ita deflectit a tangente, ut multo magis cogat accedere?

309 Solet reſpondere, velocitatem tangentialem in *e*, eſſe majorem, quam in *E*, cum ea ſit in ratione reciproca perpendiculorum in tangentes, adeoque, ut *CE* ad *Ce*. At urgent. Velocitas eſt duplo major tantummodo, in ſimplici nimirum reciproca diſtantiarum ratione, vis autem eſt quadruplo major. Si igitur vis illa in *E* velocitatem ibidem ita ſuperavit, ut punctum foco adduxerit, cur vis quadruplo major velocitatem, duplo majorem tantummodo non ſuperat; ſed illâ acceſſum determinante, hæc receſſum permittit? Hæc eſt tota difficultatis, quantum fieri poteſt, æquivocationibus omiſſis, promotæ, vis apparens, ac robur.

310 At ſtatim reſpondetur, acceſſum ibi determinari, hic receſſum permitti, quia non ad ſimplicem, nec ad ſolam velocitatem ejuſmodi determinatio pertinet, ſed ad ejus quadratum directè ſumptum, & ad diſtantiam reciprocè. Conſideremus binas vires, quæ requirerentur ad retinendam diſtantiam tam in *E*, quam in *e*, ſive ad deſcribendos utrobique arcus circulares, & eas conferamus invicem. Sunt eæ (num. 264), ut quadrata velocitatum directè, & diametri circulorum, ſive ſemidiametri, vel diſtantiæ a centro reciprocè. Nimirum circuli arcus a tangente recedit ita, ut diſtantiæ in exiguis tangentibus reſpondeant non tangentibus, ſed quadratis tangentium ob curvaturam ipſam, & proinde ſi velocitas ſit dupla, qua tangens duplo major deſcribitur eodem tempuſculo,

ſculo, requiritur vis quadruplo major, quæ per quadruplo majus intervallum deducat punctum a tangente ad arcum ejuſdem etiam circuli. Quod ſi circulus ſit minor, ejus arcus magis curvus recedit a tangente magis, & in eadem exigua tangente, diſtantia eo eſt major, quo radius circuli eſt minor. Quare pari etiam velocitate ad deducendum punctum a tangente ad arcum circuli habentis radium duplo minorem, requiritur vis duplo major; adeoque ſi, ut in *e*, & velocitas ſit duplo major, & diſtantia *Ce* duplo minor, ac vis quædam retineat diſtantiam in *E*, vis octuplo major requiritur ad eam retinendam in *e*; quadruplo nimirum major ob duplo majorem velocitatem, adeoque quadruplo majus velocitatis quadratum, & iterum duplo major ob duplo minorem diſtantiam a *C*. Quare, ut poſſit fieri argumentum etiam a pari requiritur in *e* octuplo major vis, quam in *E*, quæ cum ſit ſolum quadruplo maior, relinquit locum, ut in *E* ſic aliquando major, quam requireretur ad ſervandam diſtantiam, & in *e* aliquanto minor, ac ibi quidem acceſſus, hic vero receſſus habeatur, quemadmodum reapſe haberi eruitur ex ipſa curvæ natura, & viribus per ipſam hanc curvæ naturam determinatis.

311 Demum in poſtrema ex hiſce tribus notis illud proponitur, vires ipſas velocitatem jam augere, jam minuere, & quidquid ex altera parte agunt, ex altera deſtruere, manente illarum effectu ſecundum eas directiones, ſecundum quas impreſſæ ſunt. Diſtantiam quidem eæ ſemper imminuunt tum, cum imprimuntur, ſed velocitas, & directio motus, quæ ab iis cum prima projectione conjunctis definitur, ipſas diſtantias jam auget, jam minuit multo magis, quam ipſæ vires imminuant ibi, ubi imprimuntur, & ita jam augent, jam imminuunt, ut demum eodem ſemper redeant in orbem.

F.30 312 Ut id ipſum oculis ſubiiciatur, concipiatur in figura 30 ellipſis *ABPb*, cujus axis tranſverſus *AP*, centrum *C*, axis conjugatus *Bb*, focus F, ad quem dirigantur vires, & per ipſum chorda *GFg* perpendicularis axi tranſverſo, tum rectangulum *EDde* quatuor tangentium ductarum per vertices axium *BAbP*, & aſſumptis utcunque punctis *H*, N in arcubus *AB*, *GN*, ducantur chordæ *Hh*, *Nn* pendiculares axi *AP*, cui occurrant in punctis *S*, *s*; tum *HF*, NF, *hF*, *nF*, in quibus aſſumantur *HI*, *NO*, *hi*, *no* reciproce proportionales quadratis diſtantiarum *FH*, *FN*, *Fh*, *Fn*, ducantur rectangulorum eas rectas habentium pro diametris latera *HM*, *IL*, NQ, *OR*, *hm*, *il*, *nq*, *or* parallela axi tranſverſo, & *HL*, *MI*, *NR*, *QO*, *hl*, *mi*, *nr*, *qo* parallela conjugato, & tangentes *HY*, NX, *hu*, *nx* in eam piagam, in quam motus dirigitur, ac demum aſſumantur *AT*, *At* in *AD*, *Ad* æquales *SH*, *Sh*, &, ut ſchema eſt delineatum, dicatur directio *AP* deorſum, *PA* ſurſum, *bB* dextrorſum, *Bb* ſiniſtrorſum. Concipiatur jam vis *HI* compoſita e binis *HM*, *HL*, vis *NO* e binis NQ, *NR*, & ita porro; fiat autem prima projectio ex *A* verſus *D*. Vires *HL* contrariæ directioni projectionis per totum arcum *AB* ipſam imminuunt ita, ut demum penitus extinguant in *B*. Interea vires *HM* producunt velocitatem ſecundum directionem *AF*. Hinc in *H* motus *HV* compoſitus ex parte reſidua velocitatis primæ projectionis, & tendente dextrorſum, & ex nova producta a viribus activis tendente deorſum, obliquè vergit & dextrorſum, & deorſum. At in *B* jam penitus extinctâ velocitate primæ projectionis, velocitas illa nova, jam ſola, determinat motum deorſum per tangentem *BE*.

313 Per arcum *BG* durat utraque vis utriuſque directio, *HM* pergit auge-

re ver

re velocitatem deorſum, *MI*, extincta velocitate agente dextrorſum, oppoſitam incipit parere ſiniſtrorſum, ac velocitas quidem deorſum eſt in *G* maxima, tum in quovis puncto *N* jam vis *NQ* agit ſurſum, & incipit minuere velocitatem deorſum, quæ fuerat p oducta per arcum *AG*, vis autem *NR* pergit producere velocitatem ſiniſtrorſum oppoſitam velocitati primæ projectionis, donec in *P* jam tota deſtructa ſit illa velocitas deorſum, & producta velocitas ſiniſtrorſum ſecundum directionem *Pe* multo major, quam fuerat illa in *A*, nimirum eo major, quo diſtantia *FP* eſt minor, quam diſtantia *FA*. Hinc in quovis puncto arcus *BC*, ut in quovis *N* arcus *GP* habetur motus obliquus per *NX* deorſum, & ſiniſtrorſum vergens, at in *P* remanet ſola velocitas ſiniſtrorſum oppoſita velocitati directionis.

314 In progreſſu per *Pg*, vires *nr* jam eodem ordine minuunt velocitatem ſiniſtrorſum, vires *nq* novam ſurſum generant: in *g* acquiſita eſt maxima velocitas ſurſum: per *gb* pergit imminui velocitas ſiniſtrorſum, & incipit imminui velocitas ſurſum: in *b* extincta eſt tota ſiniſtrorſum, & incipit produci nova dextrorſum: per arcum *bA* producitur nova dextrorſum, & pergit imminui illa ſurſum, donec in *A* deſtructa eſt tota ſurſum, & relicta ſola dextrorſum æqualis illi, quæ in prima projectione habebatur, & cum ipſa prorſus conſpirans; Hinc directio motus per arcum *Pb* eſt *nx* tendens ſurſum, & ſiniſtrorſum; in *b* eſt *bd* ſurſum tantummodo; per arcum *bA* eſt *hu* ſurſum, & dextrorſum; in *A* dextrorſum tantummodo nempe *AD*, donec iterum eadem rerum, & mutationum ſeries exſurgat.

315 Hoc pacto binæ quædam habentur veluti oſcillationes, altera dextrorſum, & ſiniſtrorſum, altera deorſum, & ſurſum. Si manerent in iiſdem diſtantiis a recta *AP* ſolæ vires *HL*, *NR* in punctis *T*, & *nr*, *hl* in punctis *t*, haberetur oſcillatio per rectam *DAd* circa punctum *A*. Si manerent in iiſdem diſtantiis a recta *Gg* ſolæ vires *HM*, *hm* in punctis *S*, & *NQ*, *nq* in punctis *s*, haberetur oſcillatio per rectam *AP* circa *F*. Iis ſimul conjunctis habetur motus in Ellipſi cum iiſdem acceſſibus, & receſſibus a rectis *AP*, *Gg*, & cum iiſdem velocitatum ad eas directiones redactarum viciſſitudinibus.

316 Patet igitur vires illas centripetas velocitati primæ projectionis jam prodeſſe, jam obeſſe, ſi ea ſecundum ſuam directionem conſideretur; & jam totam deſtruere, tum oppoſitam producere, quæ iterum deſtruatur, priore illa reddita. Si autem abſtrahamus animum a directione primæ velocitatis, & velocitatem detortam habeamus pro eadem, ipſam vires totæ *HI*, *NO* augebunt, ubi angulum cum tangente in prima ſemiellipſi acutum conſtituunt, imminuent totæ *no*, *hi* per eosdem gradus in ſecunda ſemiellipſi *PbA*, ubi angulus idem obtuſus eſt; velocitas autem tangentialis diſtantiam in prima ſemiellipſi imminuet, in ſecunda augebit.

317 Atque hoc demum pacto hæc difficultas evidentiſſime, & copioſiſſime ſolvitur, quod ſummo nobis erit uſui in ſecundo tomo, ac patet, quî fiat, ut nec velocitas demum extinguatur, nec mobile decidat in centrum virium: quod fuerat propoſitum.

SUP.

Digitized by Google

SUPPLEMENTUM AD LIBRUM SECUNDUM.

§. I. Ad notam in verſ. 48.

DE GEOMETRICO QUODAM VATICINIO.

318 IN hujus libri exordio Noſter comparato Reipublicæ litterariæ ſtatu, & variis vicibus, cum ſtatu, & vicibus hominum ſingulorum, oculis in venturam ætatem intentis meliora etiam ſperat, & ingentes progreſſus. At ego in hac ipſa nota affirmavi, eſſe mihi indicium quoddam e Geometria petitum, quod jubeat deteriora divinare, quod hic expoſiturum promiſi.

319 Nimirum quæcumque augeri videmus, aut minui, ſolent omnia mutationem ſubire ductu quodam continuo, non per ſaltum, ut ajunt, quem in iis, quæ a Natura fiunt, nec haberi omnino poſſe, videbimus in libro decimo. Id in ipſis populorum legibus, ac moribus videre eſt, in urbium frequentia, ac in aliis ejuſmodi etiam rebus quamplurimis, in quibus raro admodum ingentes exiguo tempore commutationes fiunt, numquam vero momento temporis. Hinc autem fit, ut ſi in fig. 31, & 32. recta quædam linea *AB* exprimat tempora, or-
F. 31 dinatæ ad curvam quamdam continuam *CFHLD* debeant exprimere continuam
32 illam ſtatus mutationem ita, ut momentis quibuſdam *EGI*, reſpondeant ſtatus *EF*, *GH*, *IL*, curva illa recedente ab axe *AB*, vel ad ipſum accedente, prout ſtatus ille incrementa habet, vel decrementa.

320 Porro ea eſt continuarum curvarum natura, ut generaliter binæ ordinatæ *EF*, *ef* differentiam ſuam habeant in ratione quapiam finita ad ipſarum diſtantiam *Ee*. At ubi receſſum in acceſſum mutant, vel acceſſum in receſſum, ibi incrementa, vel decrementa reſpectu infiniteſimæ diſtantiæ in infinitum minuantur, ut in *GH* in fig. 31, ubi arcus ductu priore progreditur, vel contra in infinitum augeantur, ut in fig. 32, ubi arcus retro regreditur, & cuſpidem efformat. Et quidem ea ipſa eſt ratio inveſtigandi vel ope Geometriæ, vel calculi loca maximorum, ac minimorum, ut nimirum inveſtigetur, ubi incrementorum, & decrementorum expreſſiones vel evaneſcant, vel in infinitum augeantur. Fieri quidem poteſt, ut curva, ubi ordinatarum differentiæ, ut in *H* vel infinities minores, quam alibi, vel infinities majores ſint factæ, flexu mutato per *Hld* pergat adhuc recedere, ſi recedebat, ut figuræ exhibent, vel accedere, ſi accedebant; verum illud generaliter de curvis continuis demonſtrari poteſt, hoſce flexuum contrariorum caſus, ut & caſus cuſpidum *CHL* fig. 32 ad determinata quædam puncta pertinere, caſum vero ductus continuati in eamdem plagam, quam exhibet arcus *FHL* figuræ 31, eſſe communem omnibus infinitis punctis continuorum arcuum, ut adeo illi caſus ſint his infinities pauciores.

321 Quamobrem ſi curvæ cujuſpiam arcum continuum aliquem ex obſervatione colligamus, ut in fig. 31. arcum *CF*; in immenſum probabilius erit, ejus ductum ſequentem fore *FHL*, quam *FHl*, & ubi incrementa ordinatarum *EF*, *ef*, poſtquam multo majora fuerint, jam facta ſint perquam exigua, infinities probabilius erit, arcum jam eſſe proximum maximæ diſtantiæ *GH*, in qua incrementa mutantur in decrementa. Quamobrem ſi ex hac Geometricarum curvarum natura, & naturalium, ac humanarum viciſſitudinum indole, de futuræ lit-

ræ litterariæ Reipublicæ ſtatu conjectari libeat, videndum, quos progreſſus nunc habeat litteratura, quos ætate præcedenti habuerit.

322 Et quidem in iis, quæ ad humaniores litteras pertinent, videmus poſt immanem barbariem, quæ per tot ſæcula curvæ illius ductum ad ipſum axem proxime admoverat, ubi ſæculo quartodecimo cœpit iterum illarum ſtatus aſſurgere, curva iterum recedente, paulatim quidem per admodum exigua incrementa caput erexit bonarum artium cultus, qui decimi ſexti ſæculi initio tam magna habuit tam brevi incrementa, tum ubi diutius aliquanto in eodem fere ſtatu perſtitiſſet, retro curſum reflexit, humanioribus litteris adeo per decimum ſextum ſæculum depravatis, quæ ſaltem hic apud nos in Italia hujus initio ſæculi ſe rurſum erigere cœperint, & adhuc erigant.

323 At ſecus in Philoſophicis hiſce, & potiſſimum Phyſico-Mathematicis diſciplinis videtur accidere. Si enim ſuperius decimum ſeptimum ſæculum, & primos hujuſce decimi octavi annos conſideremus, quam multis, quam præclaris inventis fœcundum extitit id omne tempus? Quod quidem ſi cum hoc præſenti tempore comparetur, patebit ſane, eo nos jam deveniſſe, ut fere permanens quidam habeatur ſtatus, niſi etiam regreſſus jam cœperit. Qui enim progreſſus in iis, quæ Carteſius in Algebræ potiſſimum applicatione ad Geometriam, Galileus, ac Hugenius in primis in Optica, Aſtronomia, Mechanica invenerunt? Quid ea, quæ Newtonus protulit pertinentia ad Analyſim, ad Geometriam, ad Mechanicam, ad Opticam, & Aſtronomiam potiſſimum, quæ ipſe, quæ Leibnitius, quæ univerſa Bernoulliorum familia in calculo infiniteſimali vel inveniendo, vel promovendo prodiderunt. Quam multa ea ſunt, cujus ponderis, quantæ utilitatis? At ea omnia centum annorum circiter intervallo prodierunt, initio quidem plurima confertim, tum ſenſim pauciora. Ab annis jam triginta vix quidquam adjectum eſt. Aberratio luminis, & nutatio axis acceſſit Aſtronomiæ, dimenſio graduum ad Telluris formam Geographiæ, mira electricorum phœnomenorum ſeries, cauſis tamen adhuc fere latentibus, Phyſicæ, & ſiqua alia ſunt ejuſmodi, quæ ſane cum prioribus illis tantis harum diſciplinarum incrementis comparari nullo modo poſſunt. An non igitur eo jam devenimus, ut incrementis decreſcentibus, brevi debeant decrementa ſuccedere, ut curva illa linea, quæ exprimit hujus litteraturæ ſtatum, ac vices, iterum ad axem deflexa delabatur, & præceps ruat?

§. II. Ad notam in verſ. 213.

DE CORPORUM COLLISIONIBUS DIRECTIS.

324 Ab hac nota incipiunt ea, quæ ad corporum colliſiones pertinent, quod argumentum fuſe a Noſtro pertractatum, in pluribus e ſequentibus notis continetur. Quæcumque ad ipſum pertinentia illuſtratione, vel demonſtratione indigent, hoc paragrapho complectar omnia.

325 Primum occurrit illud, quod propoſui in nota ad verſum 283, ex eo, quod in corporibus imperfecte elaſticis vis in recuperanda figura, ad vim in amittenda in iiſdem corporum poſitionibus ſit ubique in conſtanti quadam ratione, conſequi illud, velocitatem amiſſam, dum recuperatur figura, ad velocitatem acquiſitam, dum amittitur, eſſe pariter in conſtanti ratione, ni-

mirum ſubduplicata virium ipſarum. Id autem patet ex eo theoremate, quod propoſuimus num. 172, & ſequenti numero demonſtravimus collato cum numero 193.

326 Si enim bina corpora ſibi invicem directè occurrant cum ejuſmodi velocitatibus, ut ſi mollia ſint, poſt congreſſum debeant quieſcere; ubi elaſtica ſint, extinguent omnem velocitatem in fine acceſſus mutui, dum figura mutari deſinit; tum in receſſu mutuo, dum figura recuperatur, novæ velocitates contrariæ producentur. Porro, quæ velocitas in utrovis corpore in prima illa colliſionis parte extinguitur, æquatur (num. 193) ei, quæ produceretur, ſi in iiſdem punctis ſpatii eædem vires agerent, quæ prius egerant. Iis autem viribus produceretur ejuſmodi velocitas (num. 172), cujus quadratum ad quadratum velocitatis productæ in ſecunda colliſionis parte novis illis viribus erit in ratione priorum virium, ad vires poſteriores. Quare illa prior velocitas ad hanc poſteriorem erit in ratione ſubduplicata virium, tempora autem earum binarum colliſionis partium, ſive tempus acceſſus mutui, & receſſus, erunt per ipſum num. 172 in eadem ratione ſubduplicata, ſed reciproca.

327 Porro ſi jam utrique corpori ante conflictum concipiatur impreſſa velocitas quæcumque communis; ea ſtatum reſpectivum nihil turbabit, adeoque nihil turbabit velocitatem, utrilibet vel additam, vel ablatam, cum illa communi conjungendam, & eorum, quæ in binis colliſionis partibus fiunt, rationem ad ſe invicem. Quoniam autem in fine primæ partis colliſionis, ubi deſinit acceſſus mutuus, redigitur utrumque corpus ad velocitatem æqualem, concipiatur velocitas præcedens utriuſque, ut compoſita e binis, quarum una ſit hæc communis, altera ſit, quæ cum ipſa priorem illam componit; corpus utrumque ſine hac communi velocitate quieſceret in fine mutationis figuræ, & ſuperius theorema haberet locum, nec rem turbat communis hæc adjecta velocitas. Patet igitur theorema ipſum pro caſibus omnibus.

328 Demonſtrato hoc theoremate, occurrit nota ad verſum 414, in qua formulæ algebraicæ promittuntur, quæ omnia ad corporum colliſiones pertinentia complectantur. Eas ex iiſdem principiis derivabimus, ex quibus Noſter univerſam hanc theoriam deduxit, ac partim earum ope, partim etiam Geometriæ ſubſidio præcipua quæque, quæ huc pertinent, abſolvemus. Agemus autem primo de globis, qui concipiantur ex materia perfectè molli, tum de globis, qui concipiantur ex materia perfectè elaſtica, ac demum de globis, in quibus elaſticitas ſit imperfecta, detur tamen ratio velocitatis productæ ad partes oppoſitas in mutanda figura ad velocitatem productam in eadem recuperanda; dura enim corpora, ut in notis monui, nulla eſſe, arbitror, quæ tamen ſi adeſſent, iiſdem legibus, arbitror, celebratura congreſſus ſuos, impenetrabilitate præſtante momento temporis, quod mollities præſtat tempore aliquo continuo, & nulla vi mutuum receſſum inducente. Ut autem eædem formulæ complectantur caſus omnes, in quibus vel uterque globus in eandem plagam tendat, vel alter quieſcat, vel ſibi obviam eant, conſiderabimus ut poſitivam velocitatem cum directione, quam habet alter e globis, quem dicemus ſecundum, atque ubi in eandem plagam tendunt, erit is, qui conſequitur, ut negativam eam, quæ cum oppoſita directione ſit, quam nimirum habet globus, quem dicemus primum, qui, ubi tendunt in eandem plagam, præcedit. Inde autem fiet, ut factâ primi globi velocitate

=0,

$= 0$, habeatur caſus globi in globum quieſcentem incurrentis, facta autem ipſius velocitate negativa, habeatur caſus, in quo bini globi in ſe invicem incurrunt, quo caſu uterlibet aſſumi poterit pro primo.

329 Bina principia pro mollibus erunt, quod quantitates motuum, quas lucrabuntur in partes oppoſitas, ſint æquales, velocitas vero poſt conflictum remaneat communis. Hoc autem lucrum augebit præcedentem velocitatem, ſi cum ea conſpiret directio nova; imminuet, ſiſtet, vel in contrariam etiam vertet; ſi contraria directio ſit, & lucrum minus, quam ipſa, vel ipſi æquale, vel majus. Pro perfectè elaſticis, quod in recuperanda figura acquirat uterque tantundem velocitatis, vel motus, quantum acquiſivit in amittenda, ac in eandem itidem plagam, in quam prius acquiſierat. Pro imperfectè elaſticis, quod quantitas motus, vel velocitas acquiſita in amittenda figura ad quantitatem acquiſitam in tota colliſione ſit in ratione quadam data. Calculum autem aptabimus caſui, in quo uterque globus abeat in eandem plagam, & ſecundus quidem ſubſequens primum præcedentem velocitate ſuperet, ac ad ipſum demum pertingat, ex quo caſu reliquos derivabimus.

330 Sint binorum globorum maſſæ, ſive quantitates materiæ Q, & q, velocitates ante colliſionem C, & c, erunt (num. 86) quantitates motuum CQ, cq. Hinc ſumma motuum erit $CQ + cq$. Hæc poſt colliſionem manebit eadem, cum tantum motùs alter ſecundum ſuam directionem amittat, quantum alter acquirit ſecundum ſuam. Quare velocitas communis poſt conflictum habebitur diviſâ, ut ex eodem numero colligitur, eâ quantitate motus per ſummam maſſarum $Q + q$; erit nimirum $\frac{CQ + cq}{Q + q}$.

331 Hinc velocitas acquiſita a primo corpore erit $\frac{CQ + cq}{Q + q} - c =$ $\frac{CQ + cq - cQ - cq}{Q + q} = \frac{CQ - cQ}{Q + q}$, velocitas autem acquiſita a ſecundo erit $C -$ $\frac{CQ + cq}{Q + q} = \frac{CQ + Cq - CQ - cq}{Q + q} = \frac{Cq - cq}{Q + q}$. Quare habebuntur ſequentes formulæ.

Velocitas nova poſt colliſionem communis ———— $\frac{CQ + cq}{Q + q}$

Velocitas acquiſita a primo globo ———— $\frac{CQ - cQ}{Q + q}$

Velocitas amiſſa a ſecundo ———— $\frac{Cq - cq}{Q + q}$

332 Hæc quidem ad velocitates pertinent: æque facile deduci poſſent ea, quæ pertinent ad motum. Nam in utrovis globo habetur motus multiplicando formulam velocitatis per maſſam.

333 Jam vero ſi uterque globus in eandem plagam tendat, habebitur ex prima formula hujuſmodi theorema. *Ducatur utriuſque maſſa in ſuam velocitatem ſeorſum, productorum ſumma dividatur per ſummam maſſarum, & habebitur velocitas communis poſt colliſionem.* Ex formula vero ſecunda, & tertia habebitur hoc aliud theorema. *Eſt ſumma maſſarum ad maſſam globi alterius, ut differentia celeritatum ad celeritatem acquiſitam, vel amiſſam ab altero.* Nam erit $Q + q \,.\, Q :: C - c \,.\, \frac{CQ - cQ}{Q + q}$, & $Q + q \,.\, q :: C - c \,.\, \frac{Cq - cq}{Q + q}$.

334 Ex iiſdem habetur & hoc. *Celeritas acquiſita a primo ad amiſſam a ſecundo erit, ut maſſa ſecundi ad maſſam primi.* Eſt enim $q . Q :: \frac{Cq-cq}{Q+q} . \frac{CQ-cQ}{Q+q}$

335 Quod ſi ad habendos motus acquiſitum, & amiſſum ducatur prima formula in q, ſecunda vero in Q, utrobique habebitur $\frac{CQq-cQq}{Q+q}$ valor idem, quod pro quovis caſu globi utriuſque in eandem tendentis plagam, vel alterius quieſcentis, vel alterius contra alterum tendendis, commune eſt. Patet igitur, mutationes motuum factas in partes oppoſitas ſemper æquales fore, ut ad ipſas eruendas formulas fuerat aſſumptum, & ut actioni æqualis poſtulat, & contraria reactio.

336 Si jam primum illud corpus ante colliſionem quieſcat; velocitas ipſius c erit nulla. Quare omiſſis terminis, in quibus ipſa aderat, priores illæ formulæ in haſce tres commutabuntur, $\frac{CQ}{Q+q}$, $\frac{CQ}{Q+q}$, $\frac{Cq}{Q+q}$. Nimirum habebuntur ſequentia theoremata.

337 Primo quidem ex primo: *Ut ſumma maſſarum ad maſſam globi impellentis, ita velocitas ipſius impellentis ante colliſionem ad velocitatem communem utriuſque poſt ipſam.*

338 Secundo ex primo ſimul, & ſecundo: *Velocitas acquiſita a corpore impulſo in ipſa colliſione æqualis velocitati communi poſt ipſam.*

339 Tertio ex tertia: *Ut ſumma maſſarum ad maſſam corporis impulſi, ita celeritas impellentis ante colliſionem ad celeritatem ab ipſo amiſſam in ipſa colliſione.*

340 Quarto ex ſecunda, & tertia. *Ut maſſa impellentis ad maſſam impulſi, ita celeritas acquiſita ab impulſo ad celeritatem amiſſam ab impellente.*

341 Quod ſi maſſa corporis impellentis Q fuerit immenſa reſpectu maſſæ corporis impulſi q; contempto q reſpectu Q, prima, & ſecunda formula evadet $\frac{CQ}{Q}$, ſive C, tertia vero $\frac{Cq}{Q}$, quæ haberi poterit pro nulla ob valorem $\frac{q}{Q}$ perquam exiguum.

342 Hinc habetur hoc theorema: *Si maſſa globi impulſi fuerit per quam exigua reſpectu maſſæ globi impellentis; celeritas communis erit ad ſenſum eadem, ac prius, celeritas acquiſita ab impulſo æquabitur ad ſenſum celeritati impellentis, impellens vero de ſua celeritate fere nihil amittet, nimirum partem, quæ ſit ad ſuam priorem celeritatem, ut eſt maſſa impulſi ad ipſius maſſam.*

343 Quod ſi e contrario ſit Q incomparabiliter minus, quam q, fiet prima & ſecunda formula $\frac{CQ}{q}$ fere nihil, tertia vero $\frac{Cq}{q} = C$. Nimirum habebitur hoc theorema: *Si globus impellens fuerit perquam exiguus, velocitas communis poſt conflictum, & acquiſita a globo impulſo erit fere nulla, nimirum ad velocitatem impellentis præcedentem, ut hujus maſſa ad maſſam illius. Velocitas autem amiſſa ab impellente erit fere tota.*

344 Hæc quidem admodum facile deducuntur ex ipſarum formularum conſideratione. Pro tertio vero caſu, ſatis eſt conſiderare primi corporis velocitatem, ut negativam, ſive, ſi ea habeatur pro poſitiva, mutare ſigna omnium termi-

terminorum, in quibus habetur valor c in formulis num. 331. Inde autem orientur ſequentes tres formulæ. $\frac{CQ-cq}{Q+q}$, $\frac{CQ+cQ}{Q+q}$, $\frac{Cq+cq}{Q+q}$.

345 Ex prima formula patet, quid facto opus ſit, ut poſt collisionem habeatur quies. Debet nimirum eſſe $\frac{CQ-cq}{Q+q}=0$, adeoque $CQ-cq=0$, & $CQ=cq$, ſive $C.c::q.Q$. Nimirum habetur hujuſmodi theorema. *Si motus utriuſque globi ante conflictum idem fuerit*, vel, quod eodem recidit, *ſi fuerint ante colliſionem celeritates reciprocæ maſſis, bini globi poſt ipſam colliſionem quieſcent*.

346 Quod ſi ante colliſionem inæquales fuerint quantitates motus, conſideretur pro primo globo ille, qui ante colliſionem habuerit quantitatem motus minorem, pro ſecundo, qui majorem, & *ille prior directionem ſui motus mutabit, hic poſterior retinebit; ac velocitas communis poſitiva, ſive ſecundum directionem ſecundi globi habebitur ducendo utriuſque maſſam in ſuam celeritatem, & productorum differentiam dividendo per ſummam maſſarum.*

347 Ex ſecunda formula habebitur hoc theorema: *Summa maſſarum ad maſſam ſecundi, ut ſumma celeritatum ante colliſionem ad celeritatem acquiſitam a primo globo contra directionem ſui motus, a qua ſi auferatur celeritas ejus prior, habebitur nova.*

348 Ex tertia formula: *ſumma maſſarum ad maſſam corporis primi, ut ſumma velocitatum ad velocitatem amiſſam a ſecundo.*

349 Et his quidem continentur, vel huc facile reducuntur omnia, quæ pertinent ad corpora perfecte mollia. Jam eorum ope facile definiuntur, quæ pertinent ad perfecte elaſtica. Satis eſt duplicare celeritatem ab altero amiſſam, ab altero acquiſitam. Velocitas poſt colliſionem non erit communis, ſed eruetur ex ipſis formulis exprimentibus velocitatem acquiſitam, & amiſſam. Nam in primis ſecunda, & tertia formula numeri 331 migrant in has $\frac{2CQ-2cQ}{Q+q}$, $\frac{2Cq-2cq}{Q+q}$. Si prima addatur velocitati precedenti c primi corporis, habebitur $c+\frac{2CQ-2cQ}{Q+q}=\frac{cQ+cq+2CQ-2cQ}{Q+q}=\frac{cq-cQ+2CQ}{Q+q}$, ſi ſecunda dematur a velocitate C, habetur $C-\frac{2Cq-2cq}{Q+q}=\frac{CQ+Cq-2Cq+2cq}{Q+q}=\frac{CQ-Cq+2cq}{Q+q}$

350 Hinc pro perfecte elaſticis habebuntur ſequentes quatuor formulæ, ubi in eandem plagam tendant ante colliſionem

Velocitas acquiſita a primo globo —————— $\frac{2CQ-2cQ}{Q+q}$

Velocitas amiſſa a ſecundo globo —————— $\frac{2Cq-2cq}{Q+q}$

Velocitas primi globi poſt colliſionem —————— $\frac{cq-cQ+2CQ}{Q+q}$

Velocitas ſecundi globi poſt colliſionem —————— $\frac{CQ-Cq+2cq}{Q+q}$

351 Hic fieri poteſt, ut ſecundus globus poſt colliſionem pergat progredi, ut quieſcat, ut regrediatur. Facile invenietur, quid facto opus ſit, ut quieſcat.

ſeat. Satis eſt ponere formulam quartam $= o$. Id fiet, ubi $CQ - Cq + 2cq = o$, ſive $2cq = Cq - CQ$, nimirum $C . c :: 2q . q - Q$. Requiritur igitur in primis ut maſſa q primi corporis ſit major, quam maſſa Q ſecundi, ubi directiones motuum ſunt conformes in eandem plagam, ut nimirum utrumque membrum ſit poſitivum exiſtente c poſitivo; ſi enim opponerentur, deberet eſſe q minor, quam Q, ut exiſtente c negativo uterque negativus ſit. Deinde habetur hoc theorema. *Si fuerit celeritas ſecundi globi ad celeritatem primi, ut eſt dupla maſſa primi ad maſſarum differentiam, ſecundus quieſcet. Si ſecundi celeritas, vel maſſa major fuerit, quam ad eam proportionem requiritur, perget progredi; ſi minor, regredietur.*

352 Quod ſi in iis formulis maſſæ globorum æquales fuerint; erit ubique $q = Q$, $Q + q = 2Q$, $Q - q = o$. Hinc tertia, & quarta formula evadunt C, & c. Quare infertur hoc theorema: *Globi æquales in ipſa colliſione permutant veloſitates ſuas, ut ſecundus eam habeat poſt, quam habuit primus ante, & viceverſa*, quod quidem generale eſt, tum quod pertinet ad magnitudinem, tum quod pertinet ad directionem motus, ut ſi alter quieſcebat ante, alter quieſcat poſt, ſi ſibi obviam ibant ante, uterque retro reſiliat. Atque hoc ipſum theorema Noſter expreſſit a verſu 505 ad 528.

353 Quamobrem *ſi multi globi æquales in directum diſpoſiti ſint quovis a ſe invicem intervallo, vel etiam nullo, & primum impellat globus itidem æqualis, omnes poſt colliſionem quieſcent, dempto ultimo, qui cum ea velocitate abibit, cum qua primus advenerat*. Id Noſter expreſſit a verſu 529 ad 553, & ut ibidem in nota pariter monuimus, ſponte a præcedenti conſequitur.

354 Si alter e globis Q, vel q fuerit immenſus reſpectu alterius, ſatis erit alterum q, vel Q conſiderare ut $= o$; unde iterum multa theoremata. Sit ſpeciminis ergo globus primus immenſus in quarta formula, & poſito $Q = o$; habetur $\frac{-Cq + 2cq}{q} = -C + 2c$, ubi, ſi primus globus quieſcat facto $c = o$, formula evadet $-C$, ſi obviam eat, $-C - 2c$. Nimirum *ubi globus in maſſam incurrat in immenſum majorem, ſi tendant in plagam eandem, regredietur, ſtabit, vel progredietur, prout ejus celeritas fuerit minor, æqualis, vel major, reſpectu dupla celeritatis globi, in quem incurrit; & ſi major ille quieſcebat ante colliſionem, reſiliet cum velocitate eadem, cum qua advenerat; ſi obviam eant, ſemper reſiliet; erit autem celeritas ipſius poſt colliſionem in primo caſu differentia, in tertio ſumma celeritatis ipſius præcedentis, & dupla præcedentis celeritatis illius alterius.*

355 Concipiamus jam, primum globum quieſcere, quæcumque ſint globorum maſſæ, erit $c = o$. Quare illæ ipſæ quatuor formulæ numeri 350 reducuntur ad has $\frac{2CQ}{Q+q}$, $\frac{2Cq}{Q+q}$, $\frac{2CQ}{Q+q}$, $\frac{CQ-Cq}{Q+q}$.

356 Ex hiſce formulis plura theoremata evolvam. Ex prima, quæ pertinet ad velocitatem acquiſitam a globo impulſo, & tertia, quæ exhibet novam ipſius velocitatem poſt colliſionem, eruitur hoc. *Summa maſſarum ad duplam maſſam impellentis, ut celeritas impellentis ante colliſionem ad celeritatem impulſi poſt ipſam*. Nimirum $Q + q . 2Q :: C . \frac{2CQ}{Q+q}$. Hoc Noſter expreſſit a verſu 554 ad 561.

Quo-

357 Quoniam autem iiſdem formulis ductis in q habetur $\frac{2CQq}{Q+q}$ motus ipſius globi impulſi poſt colliſionem, & CQ eſt motus impellentis ante colliſionem; habetur hoc theorema. *Ut ſumma maſſarum ad duplam maſſam impulſi, ita motus impellentis ante colliſionem, ad motum impulſi poſt ipſam*, nimirum $Q+q \,.\, 2q :: CQ \,.\, \frac{2CQq}{Q+q}$.

358 E ſecunda, quæ pertinet ad celeritatem amiſſam ab impellente, eruitur eodem pacto hoc. *Ut ſumma maſſarum ad duplam maſſam impulſi, ita celeritas impellentis ante colliſionem ad celeritatem ab ipſo amiſſam poſt*, è quarta verò, quæ continet novam celeritatem impellentis eruitur hoc: *Ut ſumma maſſarum ad differentiam earundem, ita celeritas impellentis ante colliſionem ad celeritatem ipſius novam poſt ipſam*, ac ex utraque æque facile alia, quæ ad motum pertinent, inferrentur.

359 Hæc quidem pro globis quibuſcumque. Quod ſi globi æquales ſint, ob $Q=q$, $Q+q=2Q$, $Q-q=o$, illæ 4 formulæ numeri 355 redeuntur ad has C, C, C, o; unde infertur hoc. *Si globus incurrat in globum ſibi æqualem quieſcentem, globus ipſe incurrens totam velocitatem ſuam amittet ita, ut nullam reſiduam habeat, impulſus totam acquiret præcedentem velocitatem impellentis*, qui quidem eſt caſus particularis theorematis generalioris contenti num. 353.

360 Quod ſi globus primus ſit in immenſum minor ſecundo, vel ſecundus in immenſum minor primo, ſatis erit conſiderare in primo caſu $q=o$, in ſecundo $Q=o$. Inde novæ formulæ, & nova theoremata. Evolvam tria, quorum primum habetur ex ſecunda formula pro primo caſu, ſecundum ex tertia pro eodem, tertium ex quarta pro ſecundo, & primum quidem habet uſum in æſtimanda reſiſtentia corporis magni in elaſtica exigua corpora incurrentis, ſecundum in determinanda maxima velocitate, quam globus datus utcumque imminuto alteri globo communicare poteſt immediato impulſu, tertium in determinanda reflexione corporis elaſtici incurrentis in obſtaculum, quod habeatur pro immobili.

361 Poſito $q=o$, ſecunda formula evadit o, ubi pro non elaſticis haberetur tantummodo $\frac{Cq}{Q}$, vel $\frac{2Cq}{Q}$. Inde eruitur hoc. *Ubi globus ingens elaſticus incurrit in globulum exiguum, amittit de ſuo motu fere nihil, nimirum ſuæ velocitatis partem, quæ ad totam velocitatem eſt ad ſenſum, ut maſſa illius exigui ad duplam ipſius maſſam, & quæ eſt duplo major, quam amiſſa a globo non elaſtico*.

362 In eadem hypotheſi, in qua ſit $q=o$, erit tertia formula $\frac{2CQ}{Q}=2C$; unde habetur hoc theorema: *Si globus in globulum tenuiſſimum quieſcentem incurrat, velocitas ab hoc acquiſita æquabitur ad ſenſum duplæ velocitati præcedenti globi incurrentis*.

363 Poſito $Q=o$ quarta formula $\frac{CQ-Cq}{Q+q}$ evadit $\frac{-Cq}{q}$, ſive $-C$. Nimirùm. *Si globus minor incurrat in globum immenſæ maſſæ quieſcentem, reſiliet retro cum velocitate eadem, cum qua advenerat*.

Si

Digitized by Google

364 Si jam bini globi directionibus oppoſitis in ſe invicem tendant, tum quidem illæ priores formulæ numeri 350 exprimient omnia, dummodo habeatur c pro negativa; vel ipſa conſideratâ ut poſitivâ, ſatis eſt mutare ſignum in ſingulis, in quibus adeſt c, unde alia theoremata profluunt. Speciminis loco ſit prima formula $\frac{2CQ-2cQ}{Q+q}$, quæ mutatur in hanc $\frac{2CQ+2cQ}{Q+q}$, ac habito quovis globo pro Q, exhibet hujuſmodi theorema: *Ubi bini globi in ſe invicem incurrunt, eſt ſumma maſſarum ad duplum maſſæ alterius, ut ſumma celeritatum ante colliſionem ad celeritatem ab altero acquiſitam contra præcedentis ſui motus directionem.*

365 Faciendus jam eſt gradus ad corpora imperfecte elaſtica. In iis effectus in recuperanda figura non eſt æqualis effectui in amittenda, ſed ad ipſum in ratione aliqua data ſubduplicata vis exercitæ in amittenda, ad vim exercitam in recuperanda figura. Sit ea ratio m ad n; ac effectus in amittenda figura, donec nimirum ad communem velocitatem deveniatur, qui erit hic idem, ac in corporibus mollibus, ad totius colliſionis effectum erit, ut m ad $m+n$, quæ ratio dicatur 1 ad r, ut ſit $r=\frac{m+n}{m}$. Eritque in mollibus $n=o$, in perfecte elaſticis $n=1$, in imperfectè elaſticis ſemper aliquid, ſed minus quam 1, adeoque r in primis $=1$, in ſecundis $=2$, in tertiis major, quam 1, & minor quam 2.

366 Ad habendas formulas generales pro hoc caſu, ſatis erit formulam ſecundam, & tertiam numeri 331 non duplicare, uti pro elaſticis factum eſt num. 249, ſed multiplicare per r, & habebitur celeritas a primo globo acquiſita $\frac{rCQ-rcQ}{Q+q}$, a ſecundo amiſſa $\frac{rCq-rcq}{Q+q}$, ac addendo priorem illam valori C, habetur celeritas primi poſt colliſionem $\frac{CQ+cq+rCQ-rcQ}{Q+q}$, ubi cum ſit $r=\frac{m+n}{m}$, & proinde $1-r=\frac{m-m+n}{m}=\frac{n}{m}$, habebitur $\frac{cq-\frac{n}{m}cQ+rCQ}{Q+q}$, auferendo vero poſteriorem a C habebitur $\frac{CQ+Cq-rCq+rcq}{Q+q}$, quæ exhibet celeritatem ſecundi globi poſt colliſionem, & reducitur ad hanc $\frac{CQ-\frac{n}{m}Cq+rcq}{Q+q}$

367 Hæ pariter formulæ multiplicatæ per maſſas exhibent, quod pertinet ad motum, & generaliſſimæ ſunt pro caſibus omnibus, nimirum poſito $n=m$, & $r=1$ pro mollibus, & duris, poſito $r=2$ pro perfectè elaſticis, poſito r cujuſcumque intermedii valoris, pro imperfectè elaſticis. Poſſent ex iis itidem multa generalia derivari theoremata, & problemata ſolvi, ut & numeris rite ſubſtitutis, admodum facile ſingulares caſus evolvantur omnes. Sed hæc nobis innuiſſe ſit ſatis.

368 Ubi non duo tantummodo globi concurrunt, ſed plures in eadem recta diſpoſiti ſint ad aliquod intervallum, & qui poſtremus eſt in ejuſmodi ſerie præcedentem impellit, tum hic alium, & ita porro, multo plura occurrunt notatu dignif-

digniſſima, quorum pauca admodum Noſter attingit. Pauca itidem ego, nimis arctis adſtrictus limitibus, ſed quæ maximè ſcitu digna ſunt, perſequar.

369 Sint tres globi perfectè elaſtici, & quæratur celeritas primi quieſcentis communicata ipſi a tertio delato cum data velocitate, & incurrente prius in intermedium pariter quieſcentem, ac conferatur cum velocitate, quam ei immediato incurſu communicaret.

370 Sit maſſa primi m, ſecundi n, tertii p, tertii ipſius celeritas c. Erit num. 356. ut $p+n$ ad $2p$, ita c ad velocitatem, quam accipiet ſecundus a tertio, quæ erit $\frac{2pc}{p+n}$. Rurſus ut $n+m$ ad $2n$, ita $\frac{2pc}{p+n}$ ad velocitatem, quam primus accipiet a ſecundo, quæ evadet $\frac{4npc}{(n+m)\times(p+n)}$. Si autem tertius immediatè in primum incurriſſet, haberetur ut $p+m$ ad $2p$, ita c ad celeritatem immediato incurſu ipſi tribuendam, quæ fieret $\frac{2pc}{p+m}$. Hæc formula conferenda eſt cum illa priore.

371 Dividendo utramque per $2pc$, erunt, ut $\frac{2n}{(n+m)\times(p+n)}$ ad $\frac{1}{p+m}$, ſive, ut $2n(p+m)$ ad $(n+m)\times(p+n)$, nimirum ad $np+mp+nn+nm$, ſive, dividendo per n, ut $2p+2m$ ad $p+\frac{mp}{n}+n+m$. In iis autem demendo æqualia $p+m$, erit prima minor, æqualis, vel major, quam ſecunda, prout reſiduum $p+m$ illius fuerit minus, æquale, vel majus, quam $\frac{mp}{n}+n$ reſiduum hujus.

372 Porro erit primum illud reſiduum ſemper minus hoc ſecundo, ſi fuerit valor n vel minor, vel major, quam utervis valorum m, p; æquale ipſi, ſi n fuerit æqualis utrilibet m, vel p; major ipſo, ſi n fuerit medius inter utrumque, & manentibus m, p, valor $\frac{mp}{n}+n$ erit minimus, ubi fuerit n medius geometricæ proportionalis inter m, & p. Ea omnia ope calculi haud difficulter demonſtrari poſſunt, ſed faciliùs, & elegantius demonſtrabuntur Geometriâ in ſubſidium vocatâ.

373 Sit nimirum in fig: 33 e binis rectis AC, CB altera $= m$, altera $= p$, F. 33.
ac diametro AB deſcribatur ſemicirculus ADB, cui CD perpendicularis AB occurrat in D; eritque ex circuli natura quadratum $CD = AC \times CB = mp$, & ſumpto quovis puncto E in ipſa diametro, ductaque ED, & ipſi perpendiculari DF, quæ ob angulum ABD rectum occurret ipſi AB productæ alicubi in F, ſi altera e binis EC, CF dicatur n, erit altera $= \frac{mp}{n}$ cum ſit, $EC . CD :: CD . CF$, adeoque erit $EF = \frac{mp}{n} + n$.

374 Ducatur jam BG perpendicularis AB, quæ rectæ DF occurrat in G, & quoniam ob angulum ADB rectum eſt $DAB + DBA = ABG$ recto, erit $DAB = DBG$. Eſt autem ob $ADB = EDF$ etiam $ADE = BDF$. Igitur in triangulis ADE, DBG anguli ad D, & B æquales ſunt.

375 Sit autem primo $AC = CB$: erit & $AD = DB$. Quare & triangulum

$ADE = BDG$, ac $AE = GB$. Eſt autem GB ad BF, ut DC ad CF majorem ipſa DC, quæ in eo caſu æquatur CB, exiſtente C centro circuli. Igitur erit BG, ſive AE, minor, quam BF, & tota AB, ſive $m + p$ minor, quam $EF = \frac{mp}{n} + n$

376 Quod ſi AC, & CB ſive m, & p ſint inæquales; exprimat AC minorem, & ſumatur E in ipſa CA, eritque EC minor utrâque, CF utrâque major. Erit autem & DA minor, quam BD, in qua ſi ſumatur $DH = DA$, ducaturque HI parallela BG, erit triangulum $DHI = DAE$, & $HI = AE$, quæ idcirco erit minor, quam BG, & multo minor, quam BF; cum debeat eſſe CD minor, quam CB, adeoque multo minor, quam CF.

377 Quare ſive m, & p fuerint æquales, ſive inæquales, ſi n fuerit vel minor utrâque, vel major, erit $m + p$ minor, quam $\frac{mp}{n} + n$.

378 Quod ſi fuerit n, alteri æqualis, cadet punctum E in A, vel F in B, & erit $\frac{mp}{n}$ æqualis alteri, n æqualis alteri, ac binæ formulæ æquales.

379 Si autem fuerit valor n medius inter m, & p; e contrario altera e binis CE, CF referat m, altera p, & erit pariter $CD = mp$, ac alterâ e binis CA, CB, quarum utraque media erit inter CE, CF referente n, altera referet $\frac{mp}{n}$, eritque valor $m + p$ major, quam $\frac{mp}{n} + n$.

380 Quoniam autem, ſi AC, & CB ſint æquales, aſſumptâ utcumque CE minore, vel CF majore alterâ ex ipſis, tota AB eſt minor, quam EF, ſi quadratum CD ſit $= mp$, & alterâ e binis CE, CF dicatur n, exiſtente totâ $EF = \frac{m}{n}p + n$, hic valor ſtantibus m, & p, maximus erit, ubi fuerit $CE = CA$, & $CF = CB$, ac ipſa CA, & $CB = CD$, nimirum $nn = mp$, & n media geometricè proportionalis inter m, & p.

381 Quamobrem habetur jam demonſtratio eorum omnium, quæ propoſita fuerant num. 372., & inde eruitur hoc theorema. *Si globus intermedius utroque extremorum ſit minor, vel utroque major, velocitas per intermedium impulſum communicata eſt minor ea, qua communicatur impulſu immediato: ſi ſit æqualis alteri, velocitas erit eadem*, (quod quidem facile deducitur etiam ex num. 359.): *ſi ſit medius inter utrumque, erit major, & quidem maxima, ubi is fuerit medius geometricè proportionalis inter extremos*, quæ quidem expreſſit Noſter a verſu 562 ad verſum 581.

382 Porro hinc facile deducitur, ſi plures globi intermedii ponantur, eo majorem fore, velocitatem primo communicatam, quo plures intermedii in continua geometrica proportione collocentur inter primum, & poſtremum. Nam collocato quovis intermediorum numero, ſi inter binos novus collocetur, inter eos intermedius, jam poſtremo major velocitas imprimitur. Tum is, qui eum præcedit, jam non erit medius geometricè proportionalis inter binos, quibus

Digitized by Google

bus interjacet; & proinde eo ſublato, & ibi collocato medio geometricè proportionali, jam habetur in primo illo velocitas adhuc major. Adeoque velocitas in poſtremo ſemper augeri poterit, retento eodem intermediorum numero, niſi omnes in continua ſint geometrica progreſſione cum extremis.

383 Quoniam aucto intermediorum numero, augetur primi velocitas, quæri poteſt, quæ ſit expreſſio velocitatis acquiſitæ a primo, ubi numerus intermediorum ſit datus, & an eo aucto in infinitum, augeatur in infinitum etiam illa primi globi velocitas, an aliquis habeatur limes.

384 Exprimat in fig. 34 recta CD globum primum, AB poſtremum, EF penultimum, ac ſit $AH = 2AB$, & $BG = EF$; numerus autem intermediarum inter AB, & CD in continua progreſſione exprimentium globos intermedios ſit $x - 1$. Incipiendo ab AB uſque ad CD, numerus rationum æqualium erit x, eritque idcirco AB ad CD, ut potentia x ipſius AB ad potentiam x ipſius CD, & AB ad EF, ut radix expreſſa per x ipſius AB ad ſimilem radicem ipſius CD. Datis igitur poſtremo globo AB, primo CD, & numero x, dabitur & EF, qua inventa, dabitur & ratio AG ad AH, ſive ſummæ ipſarum AB, EF ad duplam AH, nimirum ratio velocitatis globi AB ante colliſionem ad velocitatem, quam accipit EF in colliſione. Porro ea ratio perpetuo eſt eadem in quavis velocitate globi ſequentis ad globum præcedentem, & numerus earum rationum uſque ad CD eſt x. Igitur ut potentia x rectæ AG, ad potentiam x rectæ AH, ita erit velocitas poſtremi globi AB ante colliſionem ad velocitatem primi CD poſt ipſam. Nimirum ſi dicatur $AB = 1$, $CD = m$, erit F. 34

$EF = m^{\frac{1}{x}}$, & poſita velocitate primi c, erit ut $\left(1 + m^{\frac{1}{x}}\right)^x$ ad 2^x, ita c ad

$$\frac{2^x c}{\left(1 + m^{\frac{1}{x}}\right)^x}$$

385 Si numerus intermediorum $x - 1$ augetur in infinitum, accedet in infinitum recta EF ad AB; nam in progreſſione geometrica differentiæ omnes cujuſvis termini præcedentis a ſequenti debent eſſe in ratione eadem, in qua ſunt termini, quæ ratio idcirco finita eſſe debet; unde fit, ut cum earum differentiarum numerus debeat augeri in infinitum, & earum ſumma æquari finitæ differentiæ terminorum CD, AB ſingulæ ejuſmodi differentiæ debeant in infinitum decreſcere, adeoque, abſciſſa $AL = EF$, decreſcet LB in infinitum. Si autem ſumatur AI media geometricè proportionalis inter AL, AB; erit itidem LI ad IB, ut eſt AL ad AI, nimirum in ratione, quæ ad æqualitatem in infinitum accedit; adeoque punctum I diſtabit a puncto medio inter L, & B per quantitatem infiniteſimam reſpectu ipſius LI infiniteſimæ, & ſi LI aſſumatur pro dimidia LB, ſive GH, & AI pro dimidia AG, committetur error infiniteſimus ſecundi ordinis. Igitur cum errore ſecundi ordinis aſſumi poterit ratio AG ad AH pro ratione AL ad AI ſubduplicata rationis AL ad AB, ſive EF ad AB, nimirum celeritas globi AB ad celeritatem EF erit in ratione ſubduplicata AB ad EF, cum errore infiniteſimo ſecundi ordinis. Eodem pacto celeritas cujuſvis globi ſequentis ad celeritatem proxime præcedentis erit in ratione ſubduplicata illius ad hunc, & ita porro cum errore ſemper infiniteſi-

Z z 2 mo

mo ordinis ſecundi. Quare etiam celeritas poſtremi *AB* ad celeritatem primi *CD*, compoſitis omnibus rationibus erit in ratione ſubduplicata primi *CD* ad poſtremum *AB*, ac error collectus ex numero infinito primi ordinis errorum infiniteſimorum ſecundi, erit adhuc infiniteſimus; adeoque *ſi numerus mediorum globorum concipiatur abſolute infinitus, erit limes ultimus rationis, quam habet celeritas poſtremi ad celeritatem primi ratio ſubduplicata maſſæ primi ad maſſam poſtremi*, errore nimirum omni prorſus evaneſcente.

386 Dato igitur globo primo, & poſtremo, ac primi celeritate, datur celeritas maxima, quæ per intermedios utcumque numero auctos poſſit imprimi primo globo, quæ minus differt a prima velocitate, quam differant ipſi globi, adeoque ubi ipſi globi non differunt a ſe invicem in immenſum, non in immenſum excreſcit. At ſi detur numerus globorum non ita exiguus, & ratio non ita ad æqualitatem accedens, poſtremus autem ſit maximus; primus excipiet velocitatem in immenſum auctam. Nam erit celeritas poſtremi ad celeritatem primi in ratione ſummæ maſſarum ad duplam maſſam poſtremi multiplicata per numerum globorum poſt primum, & celeritas primi ad celeritatem poſtremi in eadem ratione inverſa; ſatis autem conſtat, quantum creſcat ratio etiam parum excedens æqualitatem ingenti continuata multiplicatione per ſe ipſam, ut ubi dupla ratio, ſeu binarius numerus perpetuo duplicatur.

387 Quæcumque autem de multiplicatione velocitatis dicta ſunt, ubi globus major in minorem incurrit per intermedios, facile applicantur multiplicationi motus, ubi minor in majorem incurrit itidem per intermedios, cum per num. 357 ſit perpetuo motus cujuſvis ſequentis ad motum præcedentis, ut eſt ſumma maſſarum ad duplam maſſam præcedentis; ubi ſi ratio globorum ſit eadem, patet, eadem prorſus ratione multiplicari motum, ubi a minimo motus incipiat, ac velocitatem, ubi a maximo, quod Noſter expreſſit a verſu 582 ad 595. Tum inde ad 635. exhibet ipſum immanem multiplicationis ejuſmodi numerum pro caſu, in quo 100 ſint globi, quorum quilibet ſui proximi duplus.

388 Ut calculum hic ineamus per numeros, ſi ratio progreſſionis ſit 2 ad 1, erit duplum illius ad ſummam, ut 4 ad 3, quæ ratio replicanda vicibus 99 Logarithmus ejus rationis, ſive valoris $\frac{4}{3}$ eſt 0. 6020600—0. 4771213=0. 1249387. Eo ducto in 99 habetur 12. 3689313, qui eſt logarithmus numeri eam rationem ita continuatam exprimentis. Eſt autem numerus ei logarithmo reſpondens major, quam ſit 1 cum 12 cyphris, & minor, quam 1 cum cyphris tredecim ob caracteriſticam 12. Quamobrem numerus, qui exhibet multiplicationem velocitatis, ubi motus incipit a maximo, & multiplicationem motus, ubi incipit a minimo, eſt major eo, quem dicimus millionem millionum, quem numerum ibidem expreſſit Noſter. In immediato autem incurſu poſtremi in primum velocitas, minus, quam dupla evaſiſset juxta num. 334.

389 Ubi binis globis elaſticis interponitur globus minor, fieri poteſt, ut poſtremus in ipſum incurrens ita ipſum propellat, ut adhuc progrediatur, & ipſi a congreſsu cum primo redeunti retro iterum occurrat, & iterum cogat in primum incurrere, idque pluribus vicibus; donec demum velocitas medii evadat media inter extremorum velocitates ita, ut nullus ulterior congreſsus habeatur. Quid in eo caſu conſequi debeat, e formulis expoſitis num. 349. facile

cile

eſſe deducitur. Si ſint tres globi, quorum maſſæ 9, 1, 15, qui a ſe ita diſtent, ut mora, quæ in colliſionibus peragendis impenditur, rem non turbet, efficiendo, ut concurrant ſimul globi omnes; ac primo, & ſecundo quieſcentibus, poſtremus deferatur ad medium cum velocitate 512, invenio calculo inito, in prima colliſione fore novam velocitatem tertii 448, ſecundi 960. Cum hac velocitate 960 incurret ſecundus in primum quieſcentem, & in hac ſecunda colliſione velocitas nova ſecundi retro reflexi erit —768, primi 192. Hinc tertiò incurret iterum tertius cum velocitate 448 progrediens in ſecundum regredientem cum —768, & erit nova velocitas tertii 296, ſecundi 1512. Quare quartò incurret iterum ſecundus cum hac velocitate 1512 progrediens in primum præcedentem cum 192, & nova velocitas ſecundi iterum regredientis erit —864, primi 456. Hinc quintò iterum tertius cum velocitate 296 progrediens incurret in ſecundum regredientem cum —864, & erit nova velocitas tertii 151, ſecundi 1311. Quamobrem ſextò ſecundus incurret cum hac velocitate 1311 incurret in primum progredientem cum 456, & nova velocitas ſecundi erit 228, primi 627. Erit hic finis colliſionum, progredientibus globis cum velocitatibus 627, 228, 151, quin ullus conſequens præcedentem aſſequi poſſit.

390 Hoc pacto in ſingulis caſibus calculo inito rem liceret peragere, & fortaſſe ea methodo, ubi etiam globi plures ſimul concurrunt, poſſet inveniri quid conſequi debeat, qui caſus eſt longe difficillimus; ſed nobis hic eo progredi non licet, & innuendum eſt id, quod pertinet ad colliſiones obliquas. Id autem hoc pacto perficitur. Duo globi *A*, & *H* in fig. 35. moveantur dire- F. 35.
ctionibus *AC*, *HD* ita, ut percurſis eodem tempore ſpatiis *AB*, *HD* ſibi invicem occurrant, & ſe contingant in *H*, ac quæratur motus poſt colliſionem. Ducatur per centra *CD* recta, quæ tranſibit per contactum *F*, & concipiatur planum *EFG*, quod utrumque globum tangat in *F*, quod nimirum ipſi rectæ *CD* ſit perpendiculare, cui plano plana parallela per *A*, & *H* ducta occurrant in *B*, & *I*, ducanturque *AB*, *HI*, quæ ipſi *BI* perpendiculares erunt. Velocitas utraque *AC*, & *HD* reſolvatur in binas, illa *AB*, & *BC*, hæc *HI*, & *ID*, & ipſis *AB*, *HI* parallelis *GE* colliſio nihil oberit, illas *BC*, *ID* commutabit, ut in colliſione directa. Colligatur per formulas numeri 331. pro non elaſticis, numeri 350. pro perfectè elaſticis, numeri 367. pro imperfectè elaſticis, velocitas poſt colliſionem globi utriuslibet, ducanturque *CK*, & *DM* parallelæ, & æquales *AB*, & *HI*, tum ſumantur *KL*, & *MN*, vel *KS*, & *Mn* parallelæ *BI*, quæ exprimant velocitates habendas in illo congreſſu directo facto cum velocitatibus *BC*, *ID*, ducanturque *CL*, *DN*, vel *Cl*, *Dn*, quæ exprimunt, ut patet, directiones, & celeritates motus poſt colliſionem pro utroque globo. Id Noſter pro non elaſticis expreſſit a verſu 457 ad 476, & pro elaſticis a verſu 636 ad 649.

391 His expoſitis demonſtrabimus jam duo theoremata generaliſſima, & utiliſſima, quorum alterum pertinens ad motum corrigit legem a Carteſio propoſitam, alterum pertinens ad celeritatem invenit olim Hugenius. Nimirum *in quavis corporum quorumcumque colliſione quantitas motus in eandem plagam quamcumque, habito pro negativo motu in plagam oppoſitam, manet eadem, & in perfectè elaſticis ſumma, quæ conficitur e ſingulis maſſis ductis in quadrata ſuarum velocitatum, manet conſtans*, quod quidem ii, qui

Digitized by Google

qui admittunt vires vivas proportionales maſſis ductis in quadrata velocitatum, vocant principium conſervationis virium vivarum.

392 Primum patet ex eo, quod ſemper producuntur quantitates motuum æquales in plagas oppoſitas, adeoque ſi motus ſecundum directionem quamcumque conſideratus habeatur pro poſitivo, & ſecundum oppoſitam pro negativo, ſive acceſſus perpendicularis ad planum poſitum ultra omnem materiam habeatur pro poſitivo, & receſſus pro negativo; quantum ſummæ motuum addetur in una maſſa, tantum adimetur in altera, & incrementum acceſſuum factum in una maſſa, æquabitur ejus decremento in altera, vel novis receſſibus, vel receſſuum incremento. Hoc nimirum fluit ex actionum, & reactionum æqualitate, & in hoc ſenſu verum eſt principium hujuſmodi. *In Mundo ſemper eadem motus quantitas conſervatur, ſi conſideretur ſecundum datam quamvis directionem, motu ſecundum oppoſitam negativè computato in eand m ſummam*, quod quidem male admodum Carteſius ſine hujuſmodi conditione aſſumpſit pro lege motus generali.

393 Secundum ſic demonſtratur. Primo quidem in colliſione directa ante ipſam colliſionem erant maſſæ q, $\mathcal{Q}$, velocitates c, C, adeoque harum quadrata ducta in illas ccq, CCq. Poſt colliſionem ſunt maſſæ itidem q, $\mathcal{Q}$, velocitates novæ (num. 350.) ſunt $\frac{cq-c\mathcal{Q}+2C\mathcal{Q}}{\mathcal{Q}+q}$, & $\frac{C\mathcal{Q}-\mathcal{Q}q+2cq}{\mathcal{Q}+q}$, ſive $\frac{-c\times(\mathcal{Q}-q)+2C\mathcal{Q}}{\mathcal{Q}+q}$, & $\frac{C\times(\mathcal{Q}-q)+2cq}{\mathcal{Q}+q}$. Earum quadrata habentur, ſi numeratorum, & denominatorum quadrata fiant; numeratorum autem quadrata habentur ſumpto quadrato primi termini, binis productis e primo, & ſecundo, ac quadrato ſecundi, ſi ea quadrata ita fiant, tum ducantur in ſuas maſſas, habebitur in primo globo $\frac{c^2q(\mathcal{Q}-q)^2-4C\mathcal{Q}cq(\mathcal{Q}-q)+4C^2\mathcal{Q}^2q}{(\mathcal{Q}+q)^2}$, in ſecundo $\frac{C^2\mathcal{Q}(\mathcal{Q}-q)^2+4C\mathcal{Q}cq(\mathcal{Q}-q)+4c^2\mathcal{Q}q^2}{(\mathcal{Q}+q)^2}$. In horum ſumma ſecundi termini ſe mutuo deſtruunt, & relinquuntur utrobique bini, quorum priores ſimul ſeorſum collecti, & poſteriores ſeorſum exhibent

$$\frac{(c^2q+C^2\mathcal{Q})\times(\mathcal{Q}-q)^2+4\mathcal{Q}q\times(C^2\mathcal{Q}+c^2q)^2}{(\mathcal{Q}+q)^2}=$$

$\frac{(c^2q+C^2\mathcal{Q})\times(C\mathcal{Q}-q)^2+4\mathcal{Q}q)}{(\mathcal{Q}+q)^2}$. Eſt autem $(\mathcal{Q}-q)^2+4\mathcal{Q}q=\mathcal{Q}^2-2\mathcal{Q}q+q^2+4\mathcal{Q}q=\mathcal{Q}^2+2\mathcal{Q}q+q^2=(\mathcal{Q}+q)^2$. Igitur tota illa ſumma evadit $\frac{(c^2q+C^2\mathcal{Q})\times(\mathcal{Q}+q)^2}{(\mathcal{Q}+q)^2}=c^2q+C^2\mathcal{Q}$, nimirum æqualis illi, quæ ante colliſionem habebatur. Ea igitur in colliſionibus directis locum habet. Habet autem, & in obliquis. Nam in fig. 35. quadrata velocitatum *AC*, *CL*, *HD*, *DN*, æquantur ſingula binis *AB*, *BC*; *CK*, *KL*; *HI*, *ID*; *DM*, *MN*. Quare cum maneant *AB*, *HI* in *CK*, *DM*, & quadrata *BC* *DI* in ſuas maſſas ducta æquentur quadratis *KL*, *MN* ductis in eaſdem, ſumma quadratorum *AC*, *HD* ductorum in ſuas maſſas æquatur ſummæ *CL*, *DN* ductorum in ſuas.

Supe-

394 Supereſt, ut oſtendam illud, quod promiſi in nota ad verſum 491, quid Newtonus caverit in experimentis inſtitutis ad comprobandas hujuſmodi leges colliſionum, ne ipſis experimentis obeſſet aeris reſiſtentia. Maſſæ quidem definiuntur ex pondere, ut infra videbimus, velocitates autem e ſpatio, & tempore definire immediatè, res eſt admodum difficilis; nam minimus obſervationis error rem plurimum turbat, ſi velocitates aſſumantur aliquanto majores ob tempora nimis exigua. Adhibetur igitur gravitatis, & pendulorum theoria, de qua inferius in lib. 3. Si enim globus *A* in fig. 36. oſcillet in circulo *EAF*, & *B* in circulo æquali *GBH*, & alterum percurrat deſcendendo arcum *RA*, vel aſcendendo arcum *Ar* in vacuo, demonſtratur, velocitates in puncto infimo *A* fore, ut ſunt chordæ arcuum ipſorum deſcendendo, vel aſcendendo deſcriptorum. At in aere ipſa aeris reſiſtentia rem turbat, qua etiam fit, ut ſi globus *A* deſcendat per arcum *EA* ex *R*; aſcendendo per *AF*, non percurrat arcum æqualem, nec iterum revertatur ad *R*, ut deberet in vacuo, ſed deveniat ad punctum aliquod *V*. F. 36.

395 Newtonus igitur in ſcholio poſt leges motus ad habendam velocitatem globi *A* deſcendentis in aere per arcum datum, præſcribit, ut ſublato altero globo *B* demittatur libere ex aliquo puncto *R*, noteturque punctum *V*, ad quod poſt binas oſcillationes regreditur, tum pars quarta arcus *RV*, collocetur in medio in *ST*, ut *RS*, & *TV* æquentur inter ſe, nimirum ut *VT* ad *VR* ſit in ratione 3 ad 8, & affirmat, fore in aere velocitatem in *A* globi decidentis ex *S*, quæ in vacuo eſſet, ſi caderet ex *T*. Eodem pacto ſi poſt colliſionem aſcendat ad *s*, præſcribit, ut inveniatur punctum *u*, ex quo libere demiſſus globus ipſe *A* poſt itum & reditum ita aſcenderet uſque ad *r*, ut eſſet $rs = tu$, & *st* quarta pars totius *ru*, ſive, quod eodem redit, ut *rs* ſit ad *ru* in ratione 3 ad 8, ac affirmat, velocitatem in *A* fore illam ipſam, cum qua in vacuo aſcenderetur ad *t*.

396 Facile ejus correctionis ratio patet. Nam *RV* eſt effectus reſiſtentiæ aeris, qui in bina illa oſcillatione debetur binis deſcenſibus, & binis aſcenſibus, adeoque ejus quarta pars *ST* debetur ſoli deſcenſui, quam in medio collocat, ad habendum medium quendam effectum, cum nimirum illi bini deſcenſus, & aſcenſus non ſint inter ſe æquales, ſed primus aſcenſus, ac ſecundus deſcenſus æquales inter ſe, medii ſint inter primum deſcenſum, & ſecundum aſcenſum.

397 Hæc quidem correctio exhibet velocitatem ſolum proximè, non accuratè, quæ nimirum in exigua aeris reſiſtentia parum a vera poſſit abludere, nam ad veram determinandam, multo ſublimior, & adhuc incerta reſiſtentiarum theoria requiritur, ſed in re præſenti accuratiores illæ minutiæ ſub ſenſum non cadunt. Teſtatur autem ipſe Newtonus, ſe plurimis experimentis diligenter inſtitutis comperiſſe, experimenta ipſa theoriæ admodum conformia, & velocitates receſſus mutui a ſe invicem fuiſſe ſemper ad velocitates acceſſus in ratione conſtanti.

§. III. Ad notam in verſ. 658.

DE MOTU REFLEXO.

398 In hac, & ſequenti nota attigi, quæ pertinent ad motum reflexum, & ad ludum trudicularem: ea hic illuſtrabo ope Geometriæ.

Sit

F.37. 399 Sit *M* fig. 37. *MN* planum immobile, in quod incidat globus *FC* mollis, vel durus ad perpendiculum; is ibi debebit totam ſuam velocitatem amittere, ut facile eruitur ex generalibus colliſionum formulis, habito ipſo plano pro globo maſſæ infinitæ, ſed etiam per ſe patet, cum nec impenetrabilitas progreſſum permittat, nec quidquam ſit, quod ad regreſſum determinet.

400 Adveniat obliquè per *AC*, & ducta *AD* perpendiculari ad *MN*, ac completo rectangulo *ADCF*, ſi ejus motus per *AC* concipiatur compoſitus e binis *AD*, *AF*, alter *AD*, vel *FC* elidetur a plano *MN*, & alter *AF*, vel *DC* manebit, adeoque excurret globus verſus *N*, & æquali tempore percurret *CE* $=$ *DC*, quæ erit ad *AC*, ut coſinus anguli *ACD* ad radium.

401 At ſi fuerit perfectè elaſticus, in primo caſu delatus per *FC* regredietur itidem per *CF* eâdem velocitate, cum qua advenerat, quod conſtat ex n. 363., & per ſe patet, cum nimirum in recuperanda figura tantundem velocitatis acquirat, quantum amiſerat in amittenda.

402 Si autem adveniat per *AC*, reſoluto eodem pacto motu in duos, habebit ſequenti tempore & velocitatem priorem per *CE*, & novam per *CF*, ſive *EB* priori æqualem. Quare abibit per *CB* diametrum rectanguli *FCEB*, ubi, cum latera *CE*, *EB* æquentur lateribus *CD*, *DA*, & anguli ad *E*, *D* ſint recti, patet, angulum reflexionis *BCE* fore æqualem angulo incidentiæ *ACD*.

403 Quod ſi globus fuerit imperfectè elaſticus, & deveniat per *FC*, recuperabit velocitatis amiſſæ partem *Cf*, quæ (num. 325) erit ad ipſam in conſtanti ratione, nimirum ſubduplicata vis, quæ exercetur in amittenda, ad vim, quæ exercetur in recuperanda figura.

404 Quamobrem ſi obliquè deveniat per *AC*, retenta ſimul velocitate per *CE*, & recuperata parte velocitatis per *Cf*, vel *Eb* ipſi æqualem, reſiliet per *Cb*, eritque angulus reflexionis *ECb* ſemper minor angulo incidentiæ *ACD*, ſed cum *Eb*, *DA* ſint eorum angulorum tangentes ad radios æquales *CE*, *CD*, erit tangens anguli reflexionis ad tangentem incidentiæ in illa conſtanti ratione ſubduplicata virium.

405 Igitur eruitur hoc theorema. *Ubi globus incurrit in planum immobile ad perpendiculum, ſi nullam elaſticitatem habuerit, ſiſtitur; ſi habuerit perfectam, retro reſilit cum velocitate æquali illi, cum qua advenerat; ſi imperfectè elaſticus, reſilit cum minore, quæ ad præcedentem in corporibus data elaſticitatis ſit in ratione data; ſi vero oblique incidat, & ſit primi generis, progreditur ſecundum directionem plani cum velocitate, quæ ad velocitatem priorem ſit, ut coſinus anguli incidentiæ ad radium; ſi ſit ſecundi generis, reſilit ad angulum reflexionis æqualem angulo incidentiæ; ſi ſit imperfectè elaſticus, reſilit ad angulum minorem, cujus tangens ad tangentem illius ſit in illa eadem ratione data.* Hoc autem theorema habebit locum, ubi planum fuerit lævigatiſſimum, & verè planum, ne frictio quid officiat.

406 Ex hoc theoremate deducuntur leges reflexionum in ludo trudiculari, ſed cavendum, ut in nota innui, ut habeatur ratio craſſitudinis globi. Si glo-
F.38. bus *A* in fig. 38. conſideretur, ut punctum quoddam, & debeat incidere in planum *MN* ita, ut reſiliat ad punctum datum *B*, ſit autem perfectè elaſticus, ſatis eſt ducere *BE* perpendicularem ad *MN*, & tantundem producere in *G*, nam recta *AG*, exhibebit directionem quæſitam. Si enim *C* ſit concurſus recta-

rum

rum *AG*, *MN*, erit triangulum *BEC* æquale triangulo *GEC* ob latera circa angulos rectos æqualia. Quare angulus *BCE* æquabitur angulo *GCE*, adeoque & angulo *ACM* ad verticem oppoſito, & cum hic ſit angulus incidentiæ, erit ille angulus reflexionis. Si autem elaſticitas fuerit imperfecta, ſatis erit aſſumere *EG* ad *EB* in ratione illa data velocitatis amiſſæ ad recuperatam, & habebitur intentum eodem modo. Erit enim tangens anguli *ECB* ad tangentem *ECG*, ſive *ACM*, in illa ipſa ratione data.

407 Quod ſi debeat abire ad *B* per duplicem reflexionem factam in binis planis *MN*, *MO*, in quovis angulo conjunctis; ſatis eſt ducere *AS* perpendicularem ad *MO*, & aſſumere *SH* æqualem *SA*, vel in ea ratione data, ac ducere *HG*, quæ ſi incurret in latera *MO*, *MN* alicubi in *I*, & *L*, determinabit directionem *AI*, & totum motum *AILB*. Eodem enim argumento erunt æquales anguli *SIA*, *SIH*, ſive *MIL*, & *ELB*, *ELG*, ſive *ILM*, vel habebunt tangentes in illa ratione data.

408 Poſſet etiam idem generalius præſtari, ducendo *GR* perpendicularem ad *OM* productam, & in ea producta ſumendo *RK* ad *RG* in eadem illa ratione æqualitatis, vel majoris inæqualitatis data, ac collimando ad *K*, ut facile eadem methodo demonſtratur. Imo ſi ſint alia plana, ut *OP*, *PN* &c, & ex *K* ducatur perpendiculum in *PO* productum, ac itidem eodem pacto ejus ſine perpendiculum in *NP* productum, & ita porro; eâdem demonſtratione evincitur determinari motum ab *A*, ad *B* reflexione utcumque multiplici.

409 Facile autem demonſtratur in caſu æqualitatis angulorum, fore *AG* æqualem toti motui *ACB*, *AK* toti motui *AILB*, & ita porro poſtremam rectam ducendam ab *A* ad finem poſtremi perpendiculi producti æqualem toti motui. Evadunt enim æqualia omnia illa triangulorum paria, & $BC = CG$, $BL = LG$, $IG = IK$, & ita porro; ut etiam in priore conſtructione ob $AI = IH$, & $BL = LG$, tota *HG* totum exhibet motum *AILB*.

410 Facile itidem demonſtrari poteſt, ubicumque angulus binorum planorum, ut *OMN* ſit rectus, rectas *AI*, & *LB*, quæ determinant acceſſum ad alterum, & receſſum ab altero, fore parallelas. Nam tres anguli *BLE*, *BLI*, *ILM*, æquantur duobus rectis, & tres *AIS*, *AIL*, *LIM* aliis duobus. Porro poſtremi bini *ILM*, *LIM* æquantur uni recto, ubi angulus *M* trianguli *IML* rectus ſit, & priores *BLE*, *AIS* æquantur ipſis, adeoque itidem uni recto; ac proinde medii *BLI*, *AIL* ſimul duobus rectis æquantur, & *IA*, *LB* parallelæ ſunt.

411 Si globus non aſſumatur pro puncto, theoria correctione indiget, quæ admodum facile definitur. Nimirum centrum globi ad ipſum planum pervenire non poterit. Tum vero ſint ipſa plana *nmop*, & concipiantur plana *NMOP*, quæ ab iis ubique diſtent per globi ſemidiametrum. Si conſtructio fiat adhibitis hiſce imaginariis planis, omnia rite procedent. Ubi enim globi centrum advenerit ad *C*, *I*, *L*, ſuperficies continget illa plana in *c*, *i*, *l*, & centrum ab ipſo puncto *C* reſiliet. Atque ne id quidem accurate fiet; ſed ſolum, ſi negligatur exiguus ille tractus, quo comprimitur globus, quod quidem in ſuperioribus omnibus præſtitimus. Revera enim centrum ipſum nonnihil procurret ultra plana imaginaria *MN*, *MO*, nec reflexio fiet in *C* per ſaltum, ſed paulatim per curvam quandam, quod multo magis accidet in mea theoria, in qua ſuperficies ipſa globi ad immediatum contactum cum plano reali *mn* nunquam

Digitized by Google

deveniet, ſed ante ipſum contactum repulſionem ſentiet, & figuram mutare incipiet.

§. IV. Ad notam in verſ: 818

DE GRAVIUM NISU, ET LIBERO DESCENSU.

412 Complectar hic ea omnia, quæ ad gravitatem pertinentia a Noſtro uſque ad verſum 993 propoſita illuſtratione indigent. Brevi autem in iis immorabimur, cum in ſuperioris libri ſupplemento fuſe admodum determinaverimus, quidquid pertinet ad motus uniformiter acceleratos, & retardatos.

413 In primis a verſu 818 ad 829 proponit illud, experimentis conſtare, vim gravitatis in eodem Terræ loco in eodem corpore, in exigua diſtantia a ſuperficie Telluris, eſſe eandem. Id quidem, quod pertinet ad niſum, ſive preſſionem, facile deducimus tum ex eo, quod idem nos experiamur pondus, ſive in ſumma turri, ſive in ima, idem grave ſuſtineamus manibus, quod tamen craſſa quadam æſtimatione rem conficit. Accuratius res definiri poteſt, ſi in ſumma turri corpus grave cum pondere ſibi æquali imponimus bilanci, tum id e lance ipſa filo ſuſpendimus, ac ipſum demittimus paulatim. Si enim in lance altera tantundem fili addamus ponderi, æquilibrium manet, & manet ſi ex una domo in aliam omnia transferamus, ac ex urbe in ruſticam domum. Id quidem ſatis indicat, eundem ad ſenſum niſum exerceri in ſumma, & ima turri, in urbe, & ruri.

414 Inde eruit uſque ad verſum 853, in ejuſdem gravis deſcenſu libero velocitatem eſſe, ut tempus. Conſtat ex eo, quod, & rationi conſentaneum eſt, juxta num. 140, & experimentis confirmatur, ubi potentia qualibet perpetuo agat, prodire ſingulis tempuſculis velocitates proportionales illi niſui, quem in premendo exercebat, ut adeo ſi concipiatur actio velocitatis generativa, ipſa niſui illi ipſi prementi æqualis concipi poſſit, & ejus effectus tempuſculis æqualibus haberi pro æquali. Quamobrem ex gravitatis niſu conſtanti eruitur gravia libere cadendo ferri motu uniformiter accelerato, in quo demonſtravimus num. 166, eſſe velocitates, ut vires, & tempora, adeoque pari vi, ut ſola tempora.

415 Tum vero uſque ad verſum 878 proponit theorema, quod num. 169 demonſtravimus; ſi nimirum grave per totum tempus, quo decidit, habeat velocitatem æqualem illi, quam acquirit in fine motus, debere percurrere duplum ejus ſpatii, quod liberè decidendo percurrit. Docet autem, quo pacto
F.39. id ipſum experimentis confirmari poſſit. Decidat in fig. 39 globus *E* per rectam verticalem *EF*, tum per curvam continuam *FH* abeat motu horizontali per *HI*, quod quidem fieri poterit, ſi cadendo radat planum verticale *AB*, quod cum horizontali *CD* connectatur ope curvæ lineæ *BC*. Apparebit, per planum horizontale *HI* ipſum eo tempore, quod impendit in deſcenſu per *EF*, percurrere duplum ipſius *EF*.

416 Requiritur curva *FH* continua, quia, ut infra demonſtrabimus, per curvam continuam nihil deperditur de velocitate acquiſita, quæ in tranſitu a plano in planum minuitur. Debet autem eſſe perquam exigua. Si enim *EF*, & *IH* productæ concurrant in *G*, velocitas per rectam horizontalem *HI* erit, ut infra demonſtrabimus, æqualis illi, quæ acquiritur in lapſu verticali per totam *EG*. Adeo-

EG. Adeoque curandum, ut parum admodum differant a ſe invicem *EF*, *EG*. Si illarum differentia exigua fuerit, res ſatis bene ſuccedet, & frictio motus horizontalis compenſabit fere exceſſum illum velocitatis acquiſitum in deſcenſu per curvam *FH*.

417 Uſque ad verſum 901 deducit e ſuperiori theoremate, hoc aliud; ſpatia æqualibus temporibus percurſa a gravi libere cadente creſcere juxta ſeriem numerorum imparium 1, 3, 5, &c. Quo pacto id inde deducatur, ſatis expoſui in nota in hunc locum. Idem autem ſic facile deducitur ex generali theoria motuum uniformiter acceleratorum.

418 Juxta num. 167, ſi in fig. 40 partes *AH* rectæ *AC* exprimant tempora, F.40.
ordinatæ *HM* ad rectam *AB* expriment velocitates acquiſitas in motu uniformiter accelerato. Dividatur tempus *AH* in quotcumque tempora æqualia *AD*, *DF*, *FK*, *KH*, & ducantur inde uſque ad *HM* rectæ *DP*, *FO*, *KN*, parallelæ *AB*, tum uſque ad *AB* rectæ *DE*, *FI*, *KL* parallelæ *CB*, ac conſtat omnium *FI*, *KL*, *HM* partes interceptas ipſis *AM*, *DP*, *FO*, *KN*, fore æquales primæ *DE*, & inter ſe, adeoque rectas *EN*, *IO*, *LP* debere eſſe parallelas rectæ *AH*, cum claudant æquales, & parallelas, & tranſire per interſectiones parallelarum rectæ *AM* cum parallelis rectæ *HM*, ut *EN* tranſit per *G* concurſum binarum *FI*, *DP*. Patet autem ſimul exoriri ordines triangulorum æqualium *ADE*, quorum ordinum primus debitus tempori *AD*, continebit 1, ſecundus debitus *DF* continebit 3, nimirum *FGD*, *DGE*, *EGI*, tertius reſpondens *FH* continebit 5; & ita porro conſiderata natura triangulorum ejuſmodi, admodum facile conſtat, novum ſemper advenire ſingulis tempuſculis parallelogrammum, quod bina triangula ſemper addat; adeoque & ſpatia in motu uniformiter accelerato deſcripta, quæ ab illis triangulorum ſummis exprimuntur, erunt 1, 3, 5 &c. ſerie per impares numeros continuata.

419 Uſque ad verſum 935 deducit aliud theorema, quod ſupra iiſdem num. 166 demonſtravimus; ſpatia ab initio motus computata fore, ut quadrata temporum, ſive ut quadrata velocitatum; cum nimirum aggregata numerorum imparium ab unitate computatorum efficiant quadratos numeros. Id ipſum ita ſe habere ex illa triangulorum ſerie facile deprehenditur. Nam triangula *ADE*, *AFI*, *AKL*, *AHM*, quæ componuntur ex illis triangulis numeros impares referentibus, cum ſimilia ſint, ſunt, ut quadrata laterum *AD*, *AF*, *AK*, *AH* exprimentium tempora, vel laterum *DE*, *FI*, *KL*, *HM* exprimentium velocitates.

420 Quod autem ſeries numerorum imparium ab unitate in unam ſummam collectorum quadrata exhibeant numerorum exprimentium, quot impares ſumpti ſint, ſic etiam facile demonſtratur ſuppoſito hoc notiſſimo theoremate, quod in proportione arithmetica ſumma extremorum æquetur ſummæ mediorum. Concipiamus progreſſionem numerorum naturalium omnium 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c. In ipſa ſi accipiamus terminos numero x, poſtremus erit x, & primus cum poſtremo erit $1 + x$, ſecundus cum penultimo debebit itidem eſſe $1 + x$, cum ſit primus ad ſecundum, ut penultimus ad ultimum arithmetice. Quare habebitur $1 + x$ toties repetitum, quot terminorum paria habentur nimirum $\frac{1}{2} x$, & ſumma omnium erit $\frac{1}{2} x \times (1 + x) = \frac{x + xx}{2}$. Si igitur quivis terminus duplicetur, ſumma omnium parium eodem numero x acce-

acceptorum 2, 4, 6, 8, erit dupla prioris ſive $x + xx$. Dematur ſingulis terminis unitas, & fient impares 1, 3, 5, 7 &c. ac toti ſummæ detrahentur tot unitates, quot ſunt termini, nimirum x; & proinde omnium imparium ſumma eſt xx, nimirum quadratum numeri terminorum.

421 Ibidem autem docet illud, ſi grave deorſum proiiciatur cum aliqua velocitate, ſatis eſſe determinare illam altitudinem, ex qua libere cadendo illud corpus acquiſiviſſet velocitatem ipſam, cum qua proiicitur; ſatis eſt enim reliquos motus computare, tanquam ſi inde grave illud cecidiſſet. Docet autem inde ad verſum 957, quo pacto determinari poſſit ejuſmodi altitudo. Obſervatione nimirum deprehenſum eſt, gravia libere cadendo percurrere pedes Pariſienſes 15, & digitum unum quamproximè, ut habetur etiam in nota ad verſum 579 lib. 3, & in ſupplemento ejuſdem libri deducam ex theoria pendulorum. In fine autem ejus temporis acquiritur velocitas, cum qua quovis ſecundo horario duplum ejus percurreretur (num. 169). Adeoque, redactis ſingulis pedibus ad 12 digitos, uno ſecundo horario gravia hic apud nos libere cadendo percurrunt digitos pedis Pariſienſis 181, & acquirunt velocitatem, cum qua motu uniformi percurruntur ſingulis ſecundis horariis digiti 362.

422 Exprimantur jam velocitates per ſpatium, quod ipſæ uno ſecundo horario expoſcunt, & dicatur altitudo $181 = m$, adeoque numerus ille $362 = 2m$, quævis alia altitudo $= a$, quævis alia velocitas computata in digitis uni ſecundo debitis $= c$, ratio gravitatis noſtræ ad aliam quamvis vim 1 ad u, quodvis aliud tempus computatum in ſecundis horariis t, & generaliter (n.166) ut vis & tempus 1×1, ad vim, & tempus ut, ita celeritas $2m$, ad celeritatem $c = 2mut$: pariter ut vis, & quadratum temporis 1×1, ad vim, & quadratum temporis utt, ita altitudo m, ad altitudinem $a = mutt$. In priore formula quadrando habetur $cc = 4mmuutt$, in ſecunda ducendo in $4mu$, habetur $4amu = 4mmuutt$, adeoque $cc = 4amu$.

423 Habentur igitur tres formulæ $c = 2mut$, $cc = 4amu$, $a = mutt$, ex quibus plurimæ aliæ derivari poſſunt, & plurima theoremata demonſtrari methodo num. 75, ac plurima ſolvi problemata. Exemplo ſit id, de quo agimus. Quæratur altitudo, per quam motu uniformiter accelerato vi aliqua data acquiri poſſit data aliqua velocitas, quo problemate indiguimus ſupra num. 282 ad ſolvendum problema inverſum virium centralium. In ſecunda formula $cc = 4amu$ dabitur celeritas c, vis u, & numerus $m = 181$, Quare dabitur & valor a, qui inde erit $= \frac{cc}{4mu}$. Quod ſi vis data ſit ipſa gravitas $= 1$; erit altitudo quæſita $a = \frac{cc}{4m}$, qua nimirum hic indiguimus. Reliqua omnia problemata, quæ Noſter hic indicat, earundem formularum ope admodum facile ſolvi poſſunt.

424 Uſque ad verſum 980 de experimentis mentionem facit ad rem comprobandam inſtitutis, quæ, ſi magnitudine ponderis caveamus a reſiſtentia aeris, de qua in ſequenti libro eſt ſermo, ſatis accurate referunt leges expoſitas.

425 Demum vero uſque ad verſum 993 agit de motu retardato, in quo omnia theoremata huc uſque expoſita locum habent, dummodo initio motus ſubſtituatur

ſituatur finis, & initiali velocitati finalis velocitas, ac viceverſa, quod etiam generaliter pro omnibus motibus retardatis monnimus ſupra num. 193.

§. V. Ad notam in verſ. 994
DE VIRIBUS VIVIS.

426 Hoc argumentum Noſter pertractat ab hoc verſu, uſque ad 1231. Multa, quæ ad hanc quæſtionem pertinent, & ipſe ſatis luculenter expreſſit, & in notis ipſis ego quidem ſatis expoſui, in quibus plura alia ſupereſſe, & me plura in ſupplemento additurum, affirmavi in tribus notis, quæ hanc proxime conſequuntur. Fidem autem magna ex parte liberavi in iis, quæ §. 14 expoſui de variis virium generibus, & earum effectu. Addam alia nonnulla, quæ pertinent & ad illuſtranda ea, quæ Noſter propoſuit, & ad confirmandum meum de re tota judicium.

427 Cenſuit Leibnitius, & cenſent ejus Aſſeclæ in corporibus in motu poſitis, præter velocitatem, quæ ſit, ut ſpatium percurſum, directè, & tempus, quo percurritur, reciprocè, & præter motum, qui ſit, ut velocitas in maſſam ducta, eſſe conſiderandam vim quandam, quam vim vivam appellant, quæ ſit, ut quadratum velocitatis ductum in maſſam. Alii, ut plerique Carteſiani, & Newtoniani, admittunt quidem nomen ipſum vis vivæ, ſed affirmant, vim vivam, eſſe menſurandam a maſſa in ſimplicem velocitatem ducta, quod factum e ſimplici velocitate, & maſſa invicem multiplicatis nonnulli e Leibnitianis, ut Wolfius, appellant nomine impetus, & a vi viva diſtinguunt.

428 Ego autem, quam ſententiam & Noſter amplectitur, de re tota ſic ſtatuo. Præter velocitatem actualem, ſive, ut ego ipſam appello, in actu ſecundo, quæ conſiſtit in relatione ſpatii percurſi motu æquabili, ad tempus, quo percurritur, concipiendam eſſe cenſeo velocitatem etiam potentialem, nimirum determinationem ad illam velocitatem actualem, de qua velocitate potentiali egi pluribus jam in locis, & potiſſimum in ſupplementis paragrapho 14. Eam autem omnes Mechanici uſurpant, ubi ex velocitate ducta in tempus metiuntur ſpatium motu continuò accelerato percurſum; tribuunt enim ſingulis momentis velocitates ſuas, aliis alias, quod de actuali velocitate intelligi omnino non poteſt, quæ unico temporis momento non convenit, & cujus diſtincta idea, & accurata menſura, ſine æquabili motu haberi omnino non poteſt.

429 Præter hæc, quæ expoſui, nihil aliud eſſe, arbitror in Natura, quod vis viva appellari debeat, & a potentiarum actionibus inducatur in corpus una cum celeritate, & motu. Quod ſi quis aliud quidpiam velit concipere, & deſignare nomine vis vivæ; efformabit ille ſibi ideam complexam ex aliis ideis; ut ipſa velocitatis actualis idea componitur ex idea ſpatii, ac temporis, & ipſorum relatione, ac ipſa potentialis velocitatis idea ex ideâ determinationis cujuſdam, ſive exigentiæ, & ideâ actualis velocitatis, quæ eſt terminus, qui exigitur, vel ex ideâ vis inertiæ indifferentis ad omnes ſtatus quietis, vel motus cujuſcumque determinati æquabilis in directum, ac tenacis ejus, quem ſemel receperit. & determinationis inductæ a potentiis præcedentibus ad ſtatum quendam ejuſmodi determinatum.

430 Porro

430 Porro illud evidenter conſequitur, ſi idea vis vivæ eo pacto efformanda ſit ex ideis eorum, quæ aliunde novimus, & de quibus nulla eſt controverſia, ac deinde de ejus menſura oriatur lis, litem non fore de re, ſed de ideæ illius, quæ confuſa erit, evolutione. Si quis appellet vim vivam factum ex quadrato velocitatis, & maſſa; nemo dubitare poterit de ejus menſura habenda per maſſam, & quadratum velocitatis. Si quis appellet factum ex velocitate ſimplici, & maſſa; nemo dubitare poterit de ejus menſura habenda per velocitatem ſimplicem, & maſſam. Si quis effectus quoſdam conſtituat, & determinationem ad tendendum æquè certum elaſtrorum numerum, in quæ diverſa corpora cum diverſis velocitatibus incurrant, vim vivam appellet, tum demonſtret, fore ſemper eum numerum proportionalem maſſæ, & quadrato velocitatis, ut paulo infra videbimus; is ſine ulla controverſia vim vivam metiri debebit per maſſam, & quadratum velocitatis; ſi contra appellare velit vim vivam determinationem ad habendam certam quantitatem motus æquabilis; cum motus ipſe ſit, ut velocitas in maſſam ducta, ſine ulla controverſia vim vivam metiri debebit a ſimplici velocitate, & maſſa.

431 Lis tantum in hiſce caſibus haberi poterit de nomine. Si illud nomen vulgo receptum fuerit in aliquo ex iis ſenſibus a philoſophis omnibus; is, qui menſuram ideæ nomini affixæ non receperit, causâ cadet. Si apud alias Philoſophorum ſectas, alia ipſius nominis ſignificatio recepta fuerit, alii alias menſuras adhibere debebunt, & perinde erit, ac ſi eodem vocabulo apud diverſas nationes diverſas itidem habente ſignificationes, unius gentis Scriptor in uno utatur ſenſu, alterius in altero. Si apud eandem ſectam diverſæ acceptiones ſint, pernicioſa erit ipſa nominis uſurpatio, quæ lites inducet æquivocationibus plenas; quin imo, ubi diverſæ etiam ſectæ eodem vocabulo in diverſo ſenſu utantur, pernicioſus erit ipſius vocabuli uſus, cum pernicioſum omnino ſit, diverſarum nationalium linguarum diſcrimini (quod hodie potiſſimum tantum officit ſcientiarum progreſſui, juventute coacta, vel ad omnes Europæ linguas addiſcendas, vel ad ignoranda pleraque exterorum præclariſſima inventa) litterariarum quoque ad diverſas pertinentium ſectas linguarum diſcrimen adjungere.

432 Quod ſi idea eo pacto efformata confuſa ſit, vel alias ideas complectatur expreſſas per vocabula dubiæ ſignificationis; tum vero de ipſa menſura poterit dubitari, & lites multæ inſtitui poterunt; ſed eæ, ut ajebam, ſolam ideæ evolutionem reſpicient, non ipſam rem. Id meo quidem judicio in iis accidit, quæ Ricatus noſter in doctiſſimis dialogis ſuis protulit, in quibus Leibnitianas tuetur partes, & me pluribus in locis impugnat. Haud hic quidem eſt locus defenſionis per ſingula capita traducendæ. Spargam tamen præcipua ſemina, e quibus, ſi cui libuerit, in hujuſmodi controverſia, quam ego quidem ad ſcientiarum progreſſum omnino inutilem arbitror, tempus inſumere, per ſe ipſe poterit de re tota fundamentis omnibus hinc, & inde perpenſis ferre judicium.

433 Conſentit Ricatus, vim vivam nihil eſſe aliud, niſi quandam determinationem vis inertiæ, quodam peculiari modo conſideratæ. Adhuc tamen non inutilem arbitratur, ſed neceſſariam eodem pacto, quo licet idea vis centrifugæ quandam peculiarem includat conſiderationem vis inertiæ, adhuc tanto cum fructu adhibetur, & tam multa de ipſa theoremata demonſtrantur.

Ejus

Ejus notionem ita exhibet, ut ſit id, quod actionibus potentiarum concipimus inductum in corpus. Ex hac idea menſuram ejus deducit cum leibnitiana conſentientem per quadratum velocitatis, & maſſam. Sed ultro fatetur aliorum argumenta, quæ ſingillatim perſequitur, neutri menſuræ prodeſſe, ac ſuum profert, quod deſumit ex actionum ipſarum natura, quas vult exerceri non ſingulis tempuſculis æqualibus æquales, ſed ſingulis ſpatiolis. Id ipſum autem ad ſervandam æqualitatem inter cauſam, & effectum in compoſitione vitium, & reſolutione, in quarum prima effectus aliter ſit minor, in poſteriore major, quam ſua cauſa, quæ quidem eſt breviſſima quædam doctiſſimi operis velut ſynopſis.

434 Porro idea ejuſmodi vis vivæ involvit ideam actionum illarum, quæ ipſa explicatione indiget magis, quam indigeret ipſa virium vivarum notio ante ipſum ab aliis propoſita. Si enim hic nihil verè producitur per phyſicas actiones; actionum ipſarum nomen a libera pendet acceptione, adeoque in ejus ideæ evolutione lites iterum haberi poſſunt, ſed quæ lites itidem ſunt de puro nomine. Nec verò illud principium æqualitatis inter cauſam, & effectum litem ipſam ad rem deducet, ſed iterum ad vocabula, cum nihil hic habeatur, quod vere cauſa ſit, & effectum producat, ſed concipiatur tantummodo. Et quidem ſi actio ita concipiatur, ut agat tempuſculis æqualibus æqualiter; area, quæ num. 151. exprimit velocitates genitas, exprimet itidem id, quod inducitur, quod idcirco erit proportionale maſſæ, & ſimplici velocitati: ſi vero ita concipiatur, ut agat æqualiter æqualibus ſpatiolis; area, quæ numer. 157. exprimit quadrata velocitatum, exprimet ſimul id, quod inducitur, quod erit proportionale maſſæ, & quadrato velocitatis. Porro Mechanici paſſim cum ipſo Leibnitio ita acceperunt actionis nomen, ut actiones per ſingula tempuſcula æqualia æqualiter agerent, quod ipſe Ricatus agnoſcit de Leibnitio in primis. Quamobrem, ubi ipſe vis vivæ notionem exponit, nomen actionis adhibet in ſignificatione contraria ab ea, in qua ab aliis communiter ante ipſum adhibebatur, quod æquivocationibus occaſionem iterum præbet, & in lite de nomine ingens eſt præjudicium.

435 Sed de actionibus ipſis, de earum idea, de objecto, quod inducunt una cum motu, de argumento petito a compoſitione virium, & reſolutione, ſatis multa dixi, ni fallor, in illo § 14. Ad exemplum vis centrifugæ illud repono: ipſum quidem vis centrifugæ nomen occaſionem præbuiſſe æquivocationum plurium, ut § 20 oſtendi; ſed in eas incidiſſe eos tantummodo, qui confuſam ejus ex ipſo nomine ideam ſibi confinxerunt, tanquam conatus cujuſdam activi recedendi a centro virium, non eos, qui diſtinctam ipſius ideam ſibi efformarint, per determinationem recedendi ab arcu curvæ ad tangentem, ubi nulla vis activa cogat detorquere motum; quæ idea admodum diſtincta eſt; adhibet ea, quæ aliunde notiſſima ſunt, & in quorum menſura nullus eſt peritis Geometris controverſiæ locus; ac in eodem ſenſu communiter a ſatis peritis cujuſcumque ſectæ philoſophis adhibetur.

436 In hujuſmodi caſibus ad contrahendam expreſſionem ideæ complexæ per unicum vocabulum utile admodum eſt vocabulum ipſum. Si philoſophi conveniant æquè in vocabulo vis vivæ; res eodem recidet; ut fere jam convenerunt, ubi adhibetur nomen *Principii conſervationis virium vivarum*, quo ſignificant conſervationem facti ex quadrato velocitatis, & maſſa. Adhiberi

beri poterit id ipſum nomen ad contrahenda vocabula. Nec tamen tum argumentis petitis vel a rerum natura, ac metaphyſicis principiis, vel a phœnomenis, pro ipſa menſura decertandum erit hinc, & inde, ex quibus nihil conſtitui poterit, ſed in æquivocationes perpetuas, & ambiguam vocum ſignificationem incidetur; verum ad claram, & diſtinctam definitionem recurrendum, dicendo id ipſum vis vivæ nomine intelligi, nimirum quadratum velocitatis ductum in maſſam.

437 Cæterum, quod argumenta, quæ a phœnomenis pro viribus vivis adduci ſolent, nullam vim habere poſſint, mihi quidem videor evidentiſſimè evincere hoc pacto. Phænomena omnia pendent a loco, quem quovis momento temporis occupant materiæ puncta, & a motibus, quibus dato quovis tempuſculo cientur, a quorum primo pendet & ſingularum particularum figura, & corporum integrorum forma ac vis, qua ſe mutuo agitant vel particulæ, vel corpora, a ſecundo velocitas, & incurſus in noſtra organa, adeoque omnis ſenſuum perceptio per tactum, ſaporem, odorem, colorem, ſonum. Porro utrumque a ſola velocitate pendet, & velocitatis directione habita ab ipſa Mundi origine, una cum primo ſtatu, in quo condita fuerunt omnia materiæ puncta. Igitur ſi conveniat inter omnes philoſophos de modo, quo generatur velocitas, & cum ante genita componitur, vel, ut Ricato libet, de modo, quo velocitas advenit, ſive reſultat, vel ea dici debeat genita, vel quomodocumque adveniens; phœnomena prorſus omnia eodem modo accident, quæcumque præterea admittatur res, quodcumque adhibeatur nomen, quæcumque ipſi nomini idea adnectatur. Si lites exſurgent; exſurgent ſanè ex eo, quod ignoretur in ſingularibus quibuſque caſibus, quæ potentiæ adſint, & idcirco, qua ratione in ſingulari illo caſu velocitas genita ſit, qui motus advenerit, quandiu duraverit. Si quis in mechanica ſatis peritus, & ſatis inſtructus principiis ad ejuſmodi determinationem neceſſariis, phœnomenum rite conſideraverit, evolvet ille quidem per ſolas velocitatum mutationes, ſine ullo ad aliud quidpiam, ut ad vires vivas, reſpectu.

438 Cæterum, ut innoteſcat, quo pacto evolvenda ſint præcipua e phœnomenis, quæ hinc, & inde adduci ſolent, illa adhibebo, quæ Noſter adhibuit, ac unum addam præterea, & alterum. Prius autem adnotabo illud, temporis conſiderationem habendam eſſe ita, ut vis quælibet motrix maſſæ cuilibet applicata tempore quovis dato velocitatem producat proportionalem directè ſibi, & reciprocè maſſæ ipſi; mutato autem tempore, & manentibus cæteris, velocitas producta, & priorem augens, ſi conſpirent, minuens, vel extinguens etiam, vel ad contrariam directionem determinans, ſi opponantur, vel per obliquam compoſitionem detorquens, ſi obliquæ ſint invicem, ſit ut tempus. His adnotatis per theoremata expoſita § 15, omnia in ejuſmodi vulgaribus exemplis admodum facile perficiuntur.

439 Primum Leibnitii fundamentum deſumitur ex eo, quod grave cum dupla velocitate ſurſum projectum ad quadruplam altitudinem aſſurgat, quod Noſter a verſu 998 exponit. Ipſum ex meis principiis explicat a verſu 1181 ad 1194, & ego ejus notæ, quæ eſt ad verſum 1160 ſecundo capitulo, quod grave aſcendat, oſtendi, id provenire a velocitate, quæ imprimitur, cum qua velocitate corpus illud in infinitum abiret motu æquabili, & ſpatia percurreret temporibus æqualibus æqualia, niſi gravitas obeſſet: quod ultra certam alti-

altitudinem non aſcendat, id provenit a gravitate, quæ continuo producit velocitatem deorſum. Debet autem aſcendere, donec tota velocitas impreſſa extinguatur, ſive donec producatur æqualis contraria. Porro ex eo ipſo, quod gravitas conſtanter maneat eadem, & æqualibus tempuſculis æquales addat velocitatis gradus, illud provenit, ut dupla velocitas non extinguatur, niſi donec ad quadruplam altitudinem deventum ſit, atque id ipſum duplo tempore, ut colligitur ex num. 166 collato cum num. 193, cum nimirum in motu uniformiter accelerato ſpatia percurſa ab initio motus, & in uniformiter retardato ad finem motus, ſint, ut quadrata velocitatum. Inde autem ſit, ut ad quadruplam aſcendat altitudinem corpus cum dupla velocitate ſurſum projectum.

440 Quod ſi gravitas alia lege ageret; alia eſſet altitudinum ratio, a ratione quadrati celeritatum longe diverſa. Si nimirum vis eſſet, ut diſtantia a centro, & projectio fieret a centro ipſo; aſcenderent gravia ad altitudines proportionales ipſis velocitatibus, & tempora aſcenſuum omnia æqualia eſſent, ut colligitur ex num. 181, ubi oſtendimus ex quacumque diſtantia, in hac gravitatis hypotheſi eodem tempore ad centrum deveniri, & velocitates acquiri diſtantiis ipſis proportionales, quod quidem & Noſter adducit a verſ. 1044 ad 1065 & ego in nota ad eum verſum expoſui. In hypotheſi autem gravitatis decreſcentis in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, alia itidem proveniret ratio, undecumque projectio fiat, quæ definitur per id, quod num. 181 de hac lege demonſtravimus.

441 Secundum argumentum Leibnitianorum, quod Noſter innuit a verſu 1065 ad 1079, repetitur a foveis, quas globi ex diverſis altitudinibus demiſſi in ſebum, vel argillam mollem in ipſis excavant. Bina autem ſunt ejuſmodi experimentorum genera. Primo quidem ſi idem globus demittatur ex diverſis altitudinibus, foveæ excavatæ ſunt, ut altitudines ipſæ, adeoque (num. 166) ut quadrata velocitatum, cum quibus ad illam materiam mollem globus advenit. Secundò ſi bini globi ejuſdem molis, ſed diverſæ maſſæ demittantur ex altitudinibus reciproce proportionalibus maſſis ipſis, fovea excavatur magnitudinis ejuſdem.

442 Sit in fig. 40 *ABCD* vas plenum materia molli, ut ſebo, & globus *E* decidat per altitudinem *EI*, immergitur intra ſebum per ſpatium aliquod *FGH*, quod ſpatium, ſi æſtimetur non a ſola profunditate *IG*, ſed a toto ſegmento ſphærico *FGH*, quod extenditur in longum, latum, & profundum, invenitur in eodem globo proportionale ad ſenſum altitudini, adeoque quadrato velocitatis. Si nimirum ex quadrupla altitudine decidat idem globus; velocitatem acquiret duplam, ſed foveam excavabit quadruplo majorem, & ſi bini globi æquales ſint, ſed alter quadruplo plus maſſæ contineat, & is ipſe a quadruplo minore altitudine decidat, adeoque duplo minorem velocitatem acquirat, foveam excavabunt æqualem, ut ſunt æqualia producta ex maſſa 1 & quadrato velocitatis duplæ 4, ac ex maſſa 4 & velocitatis ſimplicis quadrato 1.

443 Id phænomenum, ubi foveæ ipſæ exiguæ ſunt, reſpectu totius globi, quod ſolet accidere ob ipſam ſebi reſiſtentiam, ſuccedit ſemper quam proximè, & qui ipſum revocarunt in dubium, errarunt ſane, aſſumpta nimirum foveæ menſura a ſola altitudine *IG*, non a toto ſpatio *FGH*. Sic autem ratiocinantur Leibnitiani. Fovea excavata eſt effectus vis vivæ corporis in motu poſiti.

Hæc reſpondet maſſæ ductæ in quadratum velocitatis. Igitur vis viva reſpondet maſſæ ductæ itidem in quadratum velocitatis.

444 Huic argumento reſpondet Noſter a verſu 1195 ad 1204, & ego in tertio ejus notæ capitulo. Aio igitur in primis, foveam illam non eſſe effectum ipſius globi decidentis, ſed reſultare ex ordine, quo velocitas generatur in ipſis partibus ſebi. Nam globus ipſe, ubi ad ſebum devenit, particulis, quæ erant in *I* celeritatem imprimit fere æqualem ſuæ celeritati. Quo autem magis progreditur, eo pluribus particulis motum imprimit ad latera, particulæ autem omnes inferioribus itidem, & illæ aliis, retardato interim, & ſuperiorum, & globi motu. Propagatur autem motus paulatim per totam maſſam ſebi ad ipſum vas, ad fulcrum, ad univerſam etiam Tellurem, cui fulcrum innititur, nec velocitatum mutatio deſinit, donec omnia ad æqualem velocitatem redacta ſint, quæ ob immanem Terræ molem, ac maſſam, inſenſibilis eſt & globum quieſcentem exhibet; eſt enim (num. 337) communis hæc velocitas ad velocitatem, quam globus habebat in *I*, ut maſſa globi ad ſummam maſſarum totius Terræ cum globo. Id quidem ita accidit, ſi Terra concipiatur, ut quieſcens; nam ea ob mutuam gravitatem cum velocitate perquam exigua venit obviam ipſi globo cadenti, & velocitas ab hoc ipſi impreſſa illam ejus velocitatem ſiſtit, ut accidit (num. 345) quotieſcumque binæ maſſæ molles ſibi invicem occurrunt cum velocitatibus reciproce proportionalibus ſibi ipſis.

445 Totus ille motus in tota Terra productus, vel extinctus eſt effectus colliſionis, & impactus globi in ſebum. Quoniam autem initio ſummæ ſebi partes majorem velocitatem acceperunt, quam imæ, antequam ad æqualitatem illam devenìretur, ſuperiores illæ particulæ minorem diſtantiam ab imis adeptæ ſunt, quam deinde tenent, in quo foſſa conſiſtit, quæ idcirco exurgit ex ſolo ordine, quo in ſebi particulis velocitas producta eſt. Ea autem velocitas ita producta eſt, ut motus ſemper producti ſint in partes contrarias æquales, & ſemper proportionales vi producenti, ac tempori. Porro quoniam tota globi velocitas ſiſtitur ad ſenſum, vel accurate, ubi fovea excavatur proportionalis quadrato velocitatis; id ſignum eſt, eam haberi virium producentium ſeriem, ortam a numero particularum, quas urget ſuperficies immerſa, quem numerum forma ipſa ſuperficiei determinat, ac a numero earum, quæ ſimul debent loco cedere in ejus ſuperficiei progreſſu, quem determinat ipſa velocitas progredientis ſuperficiei, & a vi quam particulæ exercent, ne comprimantur, ut ſeries velocitatum in globo productarum ſurſum non adæquet ipſius præcedentem velocitatem, niſi ubi ipſa fovea reſpondeat velocitatis quadrato.

446 Eodem pacto in ſecundo experimento ſignum eſt, ſeriem velocitatum productarum ſurſum in binis globis præcedentes velocitates non adæquare niſi poſteaquam æquales foveæ ſunt excavatæ.

447 Quod autem foveæ ipſæ non ſint virium vivarum effectus, qui earum menſuram exhibere debeat, illud etiam evincit, quod ſi totum vas continens ſebum cum eadem velocitate incurrat e contrario in globum quieſcentem, & toti Telluri innixum, fovea itidem excavetur, quæ nec tribui poteſt vi vivæ globi, qui nimirum quieſcebat, nec vi vivæ ſebi, quæ requirebat progreſſum ſebi ipſius æquabilem, non moram illam, quæ foveam parit. In utroque caſu phænomenum pendet ab actionibus momentaneis potentiarum producentibus velocitatem, & ex ordine, quo ipſa velocitas, quæ generatur, dividitur per particulas, ex quo ordine fovea exurgit. Por-

448 Porro omnem illam actionum ſeriem definire, non eſt ita facile, & res pendet a theoria reſiſtentiæ medii, per quod globus progreditur, adhuc tamen licebit comparationem inſtituere, & rem definire, ſi aſſumamus vim, qua globus urgetur ſurſum contra ſui motus directionem, eſſe proportionalem ſuperficiei globi ſebum urgenti, cui proportionalis eſt numerus particularum, quæ comprimuntur.

449 Nam pro primo experimento ſuperficies *FGH* ſegmenti ſphærici ex Geometria æquatur circulo, habenti pro radio chordam *GH*. Is circulus eſt ut quadratum ſui radii, ſive ut quadratum ejus chordæ, quod itidem ex Geometria æquatur rectangulo ex *GI*, & tota diametro *GL*, adeoque in eodem globo, ob diametrum conſtantem eſt, ut *GI*. Dum igitur globus in ſebum immergitur vires ſentit proportionales ſpatio, per quod procurrit, ſive diſtantiis puncti *G* ab initio motus ſui *I*. Inde autem conſequitur ex num. 181 collato cum num. 193, debere progredi per ſpatium *IG* proportionale ſuæ velocitati, ut grave quod in centrum graviter in ratione diſtantiarum ab ipſo, ſi projiciatur ex ipſo centro, aſcendit juxta num. 181 ad altitudinem proportionalem velocitati.

450 Porro fovea ipſa, ſive ſegmentum ſphæricum *FGH* eſt ad ſenſum, ut quadratum ipſius *GI*. Nam ſi *M* ſit globi centrum, eſt ſector ſphæricus *FMHG* æqualis trienti ſuperficiei ſphæricæ ductæ in radium *GM*, & conus *FMHI* trienti ſuperficiei circuli diametro *FH*, qui eſt ejus baſis, & qui in exiguo ſegmento æquatur proximè ſuperficiei ipſi ſphæricæ ductæ in *MI*. Quare ſegmentum ſphæricum, quod eſt differentia ſectoris illius a cono, erit proximè æquale trienti ejuſdem ſuperficiei ſphæricæ ductæ in *GI*, adeoque erit ut *GI*, & ut ipſa ſuperficies, quæ itidem eſt ut *GI*, nimirum erit, ut quadratum *GI*. Quamobrem erit fovea ipſa non quidem accuratè, ſed proximè, ut quadratum velocitatis, quæ in ipſa excavanda deſtruitur; & tempus erit idem, cum quacumque velocitate globus adveniat.

451 Id autem nequaquam arguet, haberi vim vivam, quæ ſit, ut velocitatis quadratum; cum fovea pendeat, ut diximus ab illa ſerie velocitatum extinctarum, & cum non reſpondeat accuratè, ſed proxime fovea ipſa velocitatis quadrato, cujus nimirum altitudo *IG* & ex hac theoria, & quidem etiam ex obſervatione invenitur velocitati proportionalis. Quod ſi pro ſebo adhiberetur materia, quæ magis compreſſa majorem adhuc multo reſiſtentiam exerceret; fovearum ratio multo magis diſcreparet a ratione quadrati velocitatum, a qua multo etiam magis diſcreparet, ſi majores foveæ excavarentur in ipſo ſebo.

452 Pro ſecundo experimento, ſes hoc pacto facilius expeditur. Reſiſtentia abſoluta contra globum utrumque eadem erit in iiſdem profunditatibus *IC*, in quibus æqualis ſuperficies immerſa æqualem particularum numerum urget. Concipiatur in caſu globi quadruplam habentis maſſam reſiſtentia ipſa diviſa in partes æquales quatuor, quarum ſingulæ ſingulis partibus ipſius quadruplæ maſſæ applicentur. Singulæ partes ſecundi hujus globi ſuſtinebunt vires quadruplo minores, quam maſſa primi globi ſingulis harum æqualis ſuſtineat. Igitur (num. 272), per ſpatium æquale *IG* producent ejuſmodi velocitates in ipſis maſſis, ut earum quadrata reſpondeant viribus ipſis, nimirum in primo globo ſint quadruplo majora, quam in ſingulis maſſis ſecundi, & proinde duplam in illo ſemper velocitatem producent; & cum ille cum dupla advenerit,

in eadem altitudine foveæ, in qua illius velocitatem omnem extinguunt, extinguent omnem iidem in hujus ſecundi partibus. Tempus autem ex eodem numero erit duplo longiùs in maſſa illa majore lentius incedente.

453 Idem prorſus accidit, ubi globi in elaſtra incidunt, quod Leibnitianorum argumentum Noſter innuit a verſu 1079 ad 1085, quod pariter dupliei modo inſtituitur. Vel enim idem globus cum diverſis velocitatibus incurrit in numerum elaſtrorum proportionalem ipſarum velocitatum quadratis, quod Noſter expreſſit, vel globi diverſæ maſſæ incurrunt in idem elaſtrum cum velocitatibus, quarum quadrata ſint reciprocè, ut maſſæ ipſæ: in utroque caſu æquè comprimuntur elaſtra ipſa. In primo caſu vires in ſingulis punctis ſpatii, quo globus progreditur, ſunt, ut numerus elaſtrorum. Quare cum ſpatium ſit idem, debebit (num. 172) generari, & extingui velocitas, cujus quadratum ſit viribus, adeoque numero elaſtrorum proportionale, & tempus impendi ipſi numero reciprocè proportionale. In ſecundo caſu vi ejuſdem elaſtri in tot partes diviſa, quot partibus major maſſa minorem ſuperat, huic applicabitur vis tanto major, quanto plures ſunt partes in illa; adeoque per idem ſpatium in hac generabitur velocitas contraria ſuæ, cujus quadratum ad quadratum velocitatis genitæ in illa ſit, ut eſt numerus partium in illa ad numerum in hac, nimirum in ratione maſſarum reciproca. Quamobrem omnes ejuſmodi caſus pendent a legibus receptiſſimis, quæ in velocitate a potentiis producta obſervantur, gignendo velocitatem in quavis materiæ particula proportionalem ſibi, & tempori, quo generatur.

454 Solent etiam hoc experimento uti. Sint in fig. 41 tres globi perfectè
F. 41. elaſtici poſiti in directum, quorum priores duo A, & B æquales, tertius C triplus ipſius B. Si ipſe B incurrat in C cum binis velocitatis gradibus, imprimet ipſi C unum velocitatis gradum, & ipſe cum uno reſiliet. Nam ex formulis num. 356 ut ſumma erit maſſarum $B + C$, ſive 4, ad duplam maſſam B, ſive 2, ita 2 velocitas præcedens globi B ad velocitatem globi C, quæ erit 1, & ut ſumma maſſarum 4, ad duplam maſſam $C = 6$, ita velocitas præcedens $B = 2$ ad velocitatem ab eo amiſſam, quæ erit 3, & eliſa priori 2, inducet regreſſum cum velocitate $= 1$. Incurret autem cum ea velocitate in globum æqualem A, cui (num. 359) totam ſuam velocitatem communicabit. Perget igitur globus C triplus, cum uno gradu velocitatis, & globus A cum uno, nimirum quatuor partes maſſæ habebunt ſingulos velocitatis gradus, quibus reſpondebunt ſingulæ partes vis vivæ, quæ cum provenerit a maſſa $= 1$ globi B cum dupla velocitate delati; oportet ipſe globus B habuerit 4 partes vis vivæ reſpondentes quadrato velocitatis.

455 Hæc illi, cui ſimilia alia multa aſſumunt experimenta petita a colliſione corporum elaſticorum, in quibus ſemper poſt omnes colliſiones invenitur, eſſe ſummam quadratorum velocitatis ductorum in maſſas, quæ moventur, eandem, ac erat prius. Id argumentum Noſter proponit a verſu 1086 ad 1094, & reſpondet a verſu 1204 ad 1207, in elaſticis quidem haberi ejuſmodi conſervationem, ſed id nequaquam arguere, eſſe vim vivam aliquam, quæ in ejuſmodi colliſionibus ex uno in aliud corpus transferatur; ſed eſſe neceſſarium conſectarium legum communium, quibus velocitas a potentiis generetur proportionalis in quavis materiæ particula vi agenti, & tempori, quo agit, ac ex peculiari elaſticitatis perfectæ natura, in qua vires in recuperanda figura æquales ſint viri-

Digitized by Google

viribus in amittenda, ex quibus principiis formulas colliſionum deduximus paragrapho ſuperiore, & ex ipſis formulis numero 393 hanc ipſam conſervationem ſummæ maſſarum ductarum in quadrata velocitatum.

456 Et quidem ſi ritè res conſideretur, motus globorum *C*, & *A* non imprimitur ipſis a globo B, ſed motus globi *B* acceſſum parit ad globum *C*, quo acceſſu fit, ut elaſticitas in utrumque agat, ac ipſi *C* det unum velocitatis gradum in ea directione, in qua globus *B* ferebatur, quo tres in illo exurgant gradus motus; contra vero tres gradus velocitatis contrariæ priori imprimit globo *B*, quorum bini priorem unicum ejus gradum extinguunt, tertio curſus retro reflectitur; & ob acceſſum ad globum *A* elaſticitas iterum imprimit globo *B* unum gradum velocitatis contrarium ſuæ, quo is ſiſtitur, & unum gradum globo *A*, quo is deinde moveri pergit. Atque eo pacto novi binorum globorum motus debentur, non vi cuipiam vivæ, quæ fuerit in globo *B*, ſed binis ſeriebus actionum velocitates gignentium, quas binæ elaſticitates exercuerunt hinc, & inde in binis congreſſibus ita, ut æqualibus tempuſculis æquales motuum particulæ ſint genitæ.

457 Cæterum cum nec in mollibus, nec in imperfectè elaſticis conſervetur ſumma productorum ex maſſis ſingulis in ſua velocitatum quadrata, id ipſum indicio eſt, nec conſervationem ſummæ hujuſmodi eſſe generalem quandam Naturæ legem, nec in Natura haberi aliquem veluti fundum vis vivæ, quæ conſervari debeat, & transferri ex aliis maſſis in alias. Quin immo in ipſis perfectè elaſticis, quæ puto nulla eſſe in Natura, dum ipſa colliſio fit, ſi conſiderentur omnium particularum velocitates, quantitas illa ipſa nequaquam manet. Nec vero eam manere arbitror unquam, cum colliſio nunquam omnino deſinat, punctis omnibus materiæ ſtatum omnium, in quacumque diſtantia ſint, immutantibus perpetuo per vires vel attractivas, vel repulſivas. Sic itidem ſi gravitas a nullo impulſu pendet, ut ego arbitror; in omnibus motibus a gravitate ortis a nullo corpore motus transfertur in aliud corpus, ſed vel novi motus generantur, vel veteres deſtruuntur, mutata ſemper ſumma productorum ex omnibus maſſis in ſua velocitatum quadrata. Uſque adeo parum extenditur id ipſum principium conſervationis virium vivarum.

458 Hiſce omnibus perpenſis, quæ Noſter ex mea de viribus vivis diſſertatione deprompſit, mihi omnino perſuaſum eſt, quod in eadem affirmavi, vires vivas in Natura nullas eſſe, & omnia phænomena pendere a ſola velocitate actionibus potentiarum producta. Quam quidem diſſertationem cum ipſo anno 1745, quo eam vulgavi, miſiſſem ad Mairanium ſummum virum, & in hac ipſa quæſtione exercitatiſſimum, cujus etiam in notis mentionem feci; reſcripſit vir humaniſſimus, ſe prorſus conſentire in eadem ſententia, vires nimirum vivas nullas eſſe in Natura, & arbitrari, brevi fore, ut Philoſophi ab ejuſmodi controverſia agitanda abſtinerent. Eandem autem diſſertationem meam celeberrimus vir Franciſcus Zanottus ſecundo tomo Actorum Academiæ Bononienſis inſeruit, iterum ibidem impreſſam; ac meam ipſam ſententiam, & præcipuas quaſque a me ibidem exhibitas argumentorum Leibnitianorum ſolutiones amplexus eſt in elegantiſſimis dialogis ſuis de viribus vivis italico politiſſimo ſermone conſcriptis, ut facile agnoſcet, qui meam diſſertationem cum dialogis ipſis contulerit, quod ſucceſſum aliquem mearum hac de re meditationum evincit.

§. VI. Ad

§. VI. Ad notam in verſ. 1233.

DE CONICARUM SECTIONUM NATURA.

459 Poſt digreſſionem ad quæſtionem de viribus vivis, quam aſcenſus rectilineus gravium obtulerat, aggreditur Noſter motus gravium obliquè projectorum, qui cum fiat in Parabola, una e tribus coni ſectionibus, quarum ſecunda, nimirum Ellipſis, uſum itidem habet ſummum in aſtrorum motibus, de quibus ſequenti libro agit Noſter, idcirco hic ipſius Coni, & Conicarum ſectionum naturam exhibet, ac varios innuit uſus, ut deinde ad ipſum gravium motum in parabola delabatur. Hoc ipſe argumentum pertractat uſque ad verſum 1419. Quod ad ea quæ profert illuſtranda pertinet, & in pluribus notis promiſimus, hic perſequemur.

F. 42. 460 In primis concipiatur in fig. 42 centro C circulus AHB, & extra ipſius planum punctum V, per quod tranſeat recta, quædam FVf indefinitè producta, quæ manente puncto V perpetuo gyret, & radat in H peripheriam ejus circuli, quam punctum H motu continuo in gyrum facto deſcribat. Generatur eo motu ejus rectæ ſuperficies quædam, quæ duplum ſpatium ſolidum continet, alterum infra V, alterum ſupra. Utrumque dicitur conus, V vertex, recta per V, & C ducta coni axis, circulus AHB baſis, recta quævis VH indefinitè continuata latus coni, & patet, conum utrumque in infinitum hinc, & inde a vertice protendi, ac interea dilatari in immenſum: & quidem conus ipſe dicitur rectus, ſi axis VC plano baſis fuerit perpendicularis; obliquus vero, ſi ipſe axis ad id planum inclinetur. Hæc Noſter exponit a verſu 1257 ad 1282.

461 Hæc ſolida figura, ubi plano aliquo ſecatur, occurſu ſuperficiei ſuæ cum plano ipſo figuras quaſdam exhibet, quæ Conicæ ſectiones appellari poſſunt omnes. Sed ubi ſecatur plano tranſeunte per verticem V, ut plano DVF, exurgunt ejuſmodi ſectione binæ rectæ ſe decuſſantes in V; ſive bini anguli ad verticem oppoſiti DVF, dVf, & ubi ſecatur plano parallelo baſi ipſi, vel ahb infra verticem, vel $a'h'b'$ ſupra ipſum, exurgit circulus eo major, quo a vertice magis diſtat. Id quidem, qui de conicis agunt, demoſtrare paſſim ſolent, quod & ego in tertio meorum elementorum tomo præſtiti, quo tomo Conicarum Sectionum naturam, & proprietates fuſius aliquanto ſummo geometrico rigore ſum perſecutus. Noſter autem utrumque theorema expoſuit a verſu 1283 ad verſum 1298.

462 Quoniam rectæ lineæ, & circuli notio ex Geometria plana habetur, & ad ipſam coni notionem requiritur, idcirco hæ binæ in coni ſectione conſiderari non ſolent, quod Noſter innuit a verſu 1298 ad 1309, nec vero communiter Sectionum Conicarum nomine intelligi, quo nomine appellatur triplex curvarum genus, quod oritur, ſi conus infra verticem ſecetur plano inclinato ad ipſam baſim. Quanquam in cono obliquo eſt quædam ſectio ita ad ipſum baſis planum inclinata, ut ex ejus ſectione itidem circulus obveniat, quod in cono recto nequaquam accidit, ex quo circulus nulla alia ſectione erui poteſt, niſi parallela baſi. Tria autem illa curvarum genera dicuntur Ellipſis, Parabola, Hyperbola, quarum ego aliam quandam fœcundiſſimam ſane, & admodum conceptu facilem notionem exhibui in ipſo plano, ac per planam Geometriam earundem proprietates demonſtravi, tum ad conum, & ejus ſectiones

facto

Digitized by Google

facto gradu, oſtendi, ipſas ex ejuſmodi ſectionibus oriri, quod & Hoſpitalius, & plures alii præſtiterunt.

463 Secetur jam conus uterlibet in fig. 43. infra verticem *V*, ut figura exhibet, vel ſupra, non plano *abb*, quod ſit parallelum plano baſis, nec ſubalterno, ſed quovis alio *aQp* ita tamen, ut omnia coni latera ſecentur ex eadem verticis parte. Orietur curva quædam linea *ampn*, quam exhibet fig. 44, quæ dicitur ellipſis. Ea habebit figuram ovalem, & binos axes *ap*, *mn* ſe decuſſantes ad angulos rectos in centro *c*, quorum alter, ut *ap*, erit productior, qui dicitur tranſverſus, alter contractior, ut *mn*, qui appellatur conjugatus, & in eo differet ejus forma a forma ovi, quod ovum ex altera parte craſſius eſt, dum binæ ſemiellipſes *man*, *mpn* ſunt ſibi prorſus æquales, & ſimiles, ut etiam binæ *amp*, *anp*. Hanc Noſter appellat primam coni ſectionem, & deſcribit a verſu 1310 ad 1322. Porro in ipſo axe tranſverſo ſunt binæ quædam puncta *Ff*, æque a centro diſtantia, quæ dicuntur foci, ſive umbilici, quorum præcipua proprietas eſt, ut ſi ad quodvis perimetri punctum *q* ducantur inde binæ rectæ *Fq*, *fq*, æquè inclinentur hine, & inde ad perimetrum ipſam, & earum ſumma ipſi axi tranſverſo *ap* ſit ſemper æqualis. F.43. 44.

464 Si ejus ſectionis planum accedat in fig. 42. ad planum *abb* parallelum baſi, accedit ejus forma ad circularem formam in infinitum, in quam deſinit; ſi inde in cono recto recedat, ſive verſus verticem *V*, ut *a'Q'p'*, ſive, quod Noſter expreſſit a verſu 1323 ad 1340, ad partes oppoſitas *V*, ut *aQp* forma ſemper magis attenuatur, & recedit a forma circuli, creſcente ſemper magis ratione axis tranſverſi *ap* in fig. 44 ad conjugatum *mn*, atque id ultra quoſcunque limites in infinitum.

465 Si planum ſectionis *Qaq* in fig. 45 ita jam inclinetur, ut evadat parallelum cuipiam lateri coni *eVE*, nec tamen ulli occurrat ultra verticem *V*, ſed quemvis alium citra ipſum ſecet, ſi ſatis producatur; ſectio ejuſmodi dicitur parabola quam Noſter ſecundam ſectionem vocat, & deſcribit a verſu 1356 ad verſum 1388. Ejus formam exhibet fig. 46. Habet autem ramum *Sas* binis conſtantem cruribus *aS*, *as* in infinitum productis, & a ſe invicem, & ab axe *an*, qui totam figuram ſecat mediam in partes ſimiles, & æquales, recedentibus in infinitum. Eſt autem in ipſo axe punctum *F*, quod dicitur focus, cujus præcipua proprietas eſt, ut binæ rectæ, quæ a quovis perimetri puncto *q*, ducantur altera *qF* ad ipſum, altera *qZ* axi *aR* parallela, contineant cum perimetro angulos æquales, & ipſâ *Zq* productâ, donec occurrat in *Υ* rectæ *XΥ* perpendiculari axi ductæ per punctum *X* ipſius axis æquè diſtans ab *a*, ac diſtat *F*, quæ dicitur parabolæ directrix, ſit $qΥ = qF$. F.45. 46.

466 Porro ubi ellipſis ſectionis converſione continua perpetuo magis inclinatur, demum in parabolam deſinit, axe per omnes elongationum finitarum gradus evadente demum infinito in ipſo appulſu directionis ſuæ ad paralleliſmum cum latere *VE*. Inde fit, ut Ellipſis in immenſum oblongata nihil ad ſenſum differat in ipſa ſua origne circa *a* a forma parabolæ, ad quam debet in infinitum accedere, ante quam deſinat in ipſam, licet in immenſa diſtantia plurimum a ſe invicem diſerepent, altera redeunte in orbem per *mpn* in fig. 44, alterà ſemper hinc, & inde recedente ab axe; unde fit, ut arcus ellipſeos in immenſum oblongatæ pro parabolico aſſumi poſſit, quod nobis uſui erit, & hic, paullo infra, & in ſecundo tomo, ubi de Cometarum motibus agendum erit,

qui

qui in ellipſibus maxime oblongis, & in arcu nobis conſpicuo ad parabolam accedentibus quam proxime motus ſuos peragunt circa Solem, parabola autem ipſa conſiderari poſſit pro ellipſi, cujus centrum, & alter focus, ac alter axis tranſverſi vertex in infinitum abierint, qua conſideratione uſi ſumus ſupra in ſupplemento libri primi num. 270.

467 Quod ſi adhuc inclinetur magis ſectionis planum, & jam utrumque ſecet
F.47. conum hinc, & inde a vertice, ut in fig. 47, oritur curva linea, quæ dicitur
48. hyperbola, quam Noſter exhibet a verſu 1356 ad 1388, binos habens ramos Sas, Sps hinc & inde a vertice binis cruribus ſingulos in infinitum excurrentes, ſibi invicem prorſus ſimiles, & æquales. Eam exhibet fig. 48, in qua eſt itidem ſuus axis tranſverſus *ap*, qui utrinque productus mediam ſecat, & in axe medio centrum *c*, per quod tranſit ſuus axis conjugatus *Mm*, ac ipſius præcipua proprietas eſt, ut, ſi ad quodvis perimetri punctum *q* ducantur inde binæ rectæ, *Fq*, *fq*, æque inclinentur hinc, & inde ad perimetrum ipſam, & earum differentia æquetur axi tranſverſo *Fp*.

468 Porro illi bini rami ſunt quædam veluti ſemiellipſes infinitæ, quæ ſibi convexitatem obvertunt. Si nimirum in figura 43. ſectio *ap* inclinetur motu continuo ad partes oppoſitas vertici, donec abeat in figuram 45, tum in 47; ellipſis figuræ 44 perpetuo oblongatur, & abeunte demum in infinitum tota ſemiellipſi *mpn*; cum centro *c* ut nuſquam jam ſit, abit in parabolam figuræ 46, tum redeunte quodammodo in fig. 47 ex illa continua converſione vertice *p* ex parte infiniti oppoſita, redit in fig. 48 arcus S'ps' cum priore curvatura ſuum habens focum; ſed centrum illud Ellipſeos, & axis coniugatus in infinito remanent, & novum centrum novus axis coniugatus, prioribus nequaquam analoga oriuntur, quod in diſſertatione ipſis elementis adjecta abunde expoſui a num. 809, & ingentes ad pleraque infiniti myſteria cognoſcenda, & inſpiciendam intimius Geometriæ indolem uſus habet.

469 Hinc autem ſinguli Hyperbolæ rami ramo etiam illi parabolæ ſunt analogi, in quem contraria ſectionis converſione deſinit eorum alter, atque ipſi in eo ſunt ſimiles, quod binis cruribus ſinguli in infinitum excurrant recedentibus a ſe invicem, & ab axe ultra quoſcumque limites. Diſcrepant autem in eo, quod quo magis protenduntur, eo magis accedunt ad rectarum quarundam linearum formam, quas in fig. 48 exhibent *Gcg*, *Hch*, & ad quas accedunt ſemper magis ultra quoſcumque limites ita, ut nuſquam tamen concurrant, quæ rectæ idcirco græco vocabulo appellantur aſymptoti.

470 Haſce curvas jam olim Græci Geometræ plurimum conſiderarunt, & præcipuas ipſarum proprietates detexerunt, quos inter eminet Apollonii Pergei volumen ingens. Hinc & nomen ab illis acceperunt a menſura quadam, quæ in ellipſi deficit, in parabola conſtat eadem, in hyperbola redundat, quod quidem ipſæ nominum a Græco idiomate derivationes indicant. Ut autem ea
F.49. menſura, quæ ſit percipi poſſit, ſit in fig. 49 ellipſis, in fig. 50 parabola in
50. fig. 51 hyperbola; & ſi e quovis perimetri puncto *A* ducatur in prima, &
51. tertia per centrum *C* recta *ACP*, in ſecunda recta *AR* axi parallela; ea chordas omnes *QEq* parallelas tangenti *BAb* ductæ per *A* ſecat bifariam, quæ idcirco diameter dicitur, appellatis illis chordis ejus ordinatis, & habet in ellipſi, & hyperbola alteram diametrum eidem tangenti, & ordinatis parallelam, quæ in ellipſi itidem ad perimetrum terminatur, & utrobique dicitur ejus conjugata.

Eſt

Digitized by Google

471 Eſt autem hæc præcipua ſectionum conicarum natura, ut quadrata ſemiordinatarum *EQ*, vel *Eq* ad quamvis diametrum ſint inter ſe in ellipſi, & hyperbola, ut rectangula ſub abſciſſis *AE*, *EP* a binis verticibus diametri, in parabola vero, ut unica abſciſſa *AE* ab unico vertice; ac in ellipſi, & hyperbola quadratum ſemiordinatæ *EQ*, ad rectangulum ſub abſciſſis *AE*, *EP* ſit, ut eſt quadratum diametri conjugatæ ad quadratum diametri primæ *AP*, in qua ratione ipſa ſi aſſumatur ad *AP* recta *AB* in ipſa tangente, quæ idcirco remanet tertia continuè proportionalis poſt diametrum *AP*, & *MN*, ac in parabola aſſumatur *AB* quadrupla diſtantiæ puncti *A* a foco (quæ *AB* ubique dicitur latus rectum diametri *AP*, & diameter ipſa reſpectu ipſius in Ellipſi, & Hyperbola latus tranſverſum); ducaturque recta in his per *B*, & *P*, in parabola vero parallela diametro *AR* (quæ recta in omnibus ordinatæ, ſi opus eſt, productæ occurret alicubi in D); erit quadratum ſemiordinatæ *EQ* æquale rectangulo ſub *AE*, & *ED*. Cumque *ED* debeat eſſe minor latere recto *AB* in ellipſi, ut patet, æqualis in parabola, minor in hyperbola; patet quadratum *EQ* in ellipſi deficere a rectangulo ſub abſciſſa *AE*, & latere recto *AB*, in parabola ipſi æquari, in hyperbola ab ea deficere, quod ipſi, ut monui, nomen dedit, & Noſter innuit a verſu 1392 ad 1395.

472 Porro hæc omnia, quæ hic ad harum curvarum indolem utcumque exhibendam propoſita ſunt, & alia multo plura in illis ipſis meis elementis accuratiſſimè demonſtrata ſunt omnia, ut & in aliis aliorum quamplurimis, quæ ubique proſtant, & vulgatiſſima ſunt.

473 Illud autem ibidem addit Noſter, ingentes eſſe harum curvarum uſus, quorum aliquos innuit, de quibus in notis egimus, & qui ad Mechanicam, ac Aſtronomiam pertinent partim ſupra occurrerunt §. 19 ſupplementi ad lib. 1, partim vero hic, partim ſequenti tomo occurrent. Haſce curvas, & in horologiis ſolaribus uſum habere affirmat, quem, in nota in hunc locum promiſi, me in ſupplemento expoſiturum, & definiturum, quando debeat in iis haberi ellipſis, quando parabola, quando vero hyperbola, quando iſidem recta linea, quando circulus ipſis ſuccedat. Res eſt admodum factu facilis.

474 In ejuſmodi horologiis ſtyli vertex per umbram horas determinat, & fere in plano quopiam deſignari ſolent horæ ipſæ, & umbræ vertex, quem determinat radius ad ſenſum rectilineus a Sole ductus, & per apicem ſtyli tranſiens, ultra quem excurrit, denotat horas rectis lineis expreſſas. Sol autem ſingulis diebus motu diurno apparet nobis delatus circa Polos Mundi in circulo deſcripto in ſuperficie ſphæræ cæleſtis habentis pro centro centrum Terræ, cum quo centro Terræ, ob immanem Solis a Terra diſtantiam, & exiguam hujus reſpectu tantæ diſtantiæ magnitudinem, confunditur ipſe ſtyli vertex, ac in Æquinoctio utrolibet, quo tempore Sol ab utroque polo æquè diſtat, circuli ipſius centrum eſt in ipſo Terræ centro, vel ſtyli vertice; reliquis autem omnibus anni diebus centrum circuli eſt in axe extra Telluris centrum, & ſtyli verticem hinc, vel inde verſus alterum e binis polis.

475 Inde fit, ut radius Solis appareat circa immotum ſtyli verticem deſcribens in Æquinoctiis planam circuli ſuperficiem, extra ipſa Æquinoctia binorum conorum hinc, & inde ab ipſo vertice oppoſitorum ſuperficies, quarum illa, quæ in planum horologii incurrit, determinat curſum verticis umbræ ſtyli, a vertice ipſo ſtyli projectæ, & conorum axis eſt linea axi Mundi parallela tranſiens

ſicos per ſtyli verticem, baſis autem ipſe circulus Solaris motus. Quamobrem via verticis umbræ in æquinoctiis erit ſemper rectilinea in quovis plano, cum planum circuli a radio Solari deſcriptum, cuivis plano in recta quadam linea debeat occurrere; at reliquis anni diebus erit coni ſectio aliqua, diverſa pro diverſa inclinatione plani horologii ad conorum axem, & latera.

476 Si planum horologii fuerit perpendiculare axi Mundi, ſectio ejuſmodi parallela circulo genitori erit circulus, & circulum umbræ vertex deſcribet; ſi fuerit ita inclinatus ad axem, ut adhuc totus Solaris viæ circulus ſupra ipſum extet; ſecabit adhuc totum conum ultra verticem ſtyli productum, ac deſcribetur ellipſis. Si planum magis adhuc inclinatum fuerit, Solis centro ad ipſum productum uſque ad ſphæram cæleſtem appellente tantummodo, evadet planum lateri coni parallelum ita, ut parabola obveniat. In ulteriore autem coni inclinatione, Solis circulo partim ſupra id planum extante, partim poſt ipſum planum demerſo, obvenire debet hyperbola.

477 Porro in horologiis delineari ſolet ipſa recta æquatoris linea, & plerumque illæ itidem curvæ, quæ ad binos tropicos pertinent, & horarum longitudines terminant. Ubi in plano horizontali horologium deſignatur, facile e ſphæræ armillaris principiis, & ex iis, quæ diximus, hæc deducuntur: ſub ipſo polo alterum tantummodo tropicum delineari poſſe, & circulum exhibere, ipſa æquatoris rectâ illâ lineâ in infinitum circulum abeunte, qui nuſquam jam ſit: per utramvis frigidam zonam tropicum alterum, & plurimos parallelos exhibere ellipſes; illum parallelum, qui tantum diſtat ab æquatore, quantum locus a polo, exhibere parabolam; reliquos, qui quidem ſupra planum aliqua ſui parte extant, uſque ad oppoſitum æqualem parallelum, hyperbolas, præter unicum æquatorem, qui rectam exhibet: ſub utrovis polari circulo, alterum tropicum exhibere parabolam, alterum punctum unicum, reliquos omnes parallelos, præter æquatorem exhibentem rectam, hyperbolas; reliquis autem omnibus Terræ locis & ipſos tropicos, & parallelos omnes, præter æquatorem, qui rectam exhibet, hyperbolas exhibere. Sed hæc innuiſſe ſit ſatis.

ſ. VII. Ad notam in verſ. 1420

DE MOTU GRAVIUM OBLIQUE PROJECTORUM.

478 Ab hoc verſu ad 1522 hoc argumentum pertractat Noſter, ubi primo oſtendit, gravia obliquè projecta parabolas deſcribere, tum præcipua, quæ ad ejuſmodi projectionem pertinent, theoremata indicat, & problemata, quibus univerſa Baliſtica continetur; ac demum illud innuit, ob aeris reſiſtentiam, motum ipſum in aere ad hyperbolam demum magis accedere. Sequemur ipſius ductum.

F. 52. 479 Primo quidem ſi in fig. 52 grave projiciatur per rectam *AB*, dum interea gravitatis vi urgetur directione *AR*, deſcribet (num. 220) curvam lineam quandam *AS*, cujus tangens erit ipſa projectionis directio *AB*. Quæritur hujus viæ natura.

480 Si quibuſdam temporibus debeant vi projectionis deſcribi partes *AE*, *AE'* motu æquabili, & iiſdem vi gravitatis partes *AH*, *AH'* rectæ *AR*, completis parallelogrammis *HAEQ*, *H'AEQ'*, debet (num. 202) curva tranſire per

per ipſa puncta *Q*, *Q'* motu nimirum compoſito. Porro in motu æquabili ſunt (num. 75) *AE*, *AE'*, ſive *AQ*, *AQ'*, ut tempora, & in motu per gravitatem uniformiter accelerato (num. 419) *AH* *AH'*, ſive *EQ*, *EQ'*, ut quadrata temporum. Erunt igitur quadrata ipſarum *HQ*, *H'Q'*, ut ipſæ *AH*, *AH'* quam num. 471 diximus eſſe proprietatem parabolæ habentis *AR* pro diametro, *AH*, *AH'* pro abſciſſis, *HQ*, *H'Q'* pro ſemiordinatis, ac elementorum meorum num. 440 demonſtravi itidem inverſum theorema, ubi id contingat, curvam eſſe parabolam. Quæcumque autem dicta ſunt cum litteris majuſculis, projectione facta per *AB*, locum habent in minuſculis, projectione oppoſita per *Ab*; & cum eadem velocitate *sAS* eſt unica, ac eadem curva, cujus ordinatas omnes *qQ* diameter *AR* bifariam ſecat. Et hæc quidem parabolæ determinatio facta eſt etiam e generalibus principiis ſupra num. 270. Noſter hac ipſa demonſtratione eſt uſus a verſu 1420 ad 1437, ubi adhibuit ſpatia *EQ*, *E'Q'* intercepta inter tangentem, & arcum curvæ pro effectu gravitatis, proportionalia quadratis *AE*, *AE'* habitis pro effectu velocitatis in projectione impreſſa. Porro demonſtratio rite procedit, ſecluſa aeris reſiſtentia, de qua paulo inferius, & habita gravitate pro conſtanti, & eandem retinente directionem. Cæterum cum gravitas convergat ad Terræ centrum, & decreſcat in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ab ipſo, debet deſcribi (num. 288) arcus hyperbolæ, parabolæ, vel ellipſeos habentis focum in centro Terræ, pro varia velocitate primæ projectionis, quæ tamen in noſtris projectionibus, quas experimur in ſuperficie Terræ, ſemper eſt ita exigua, ut ellipſim inducat, quæ tamen, ob immanem diſtantiam alterius foci a vertice proximo foco alteri, ad parabolam accedit quamproximè, in quam ellipſis in immenſum oblongata deſinit tandem. Sed hic, ut ſupra innuimus, utramque ſuppoſitionem retinebimus gravitatis tam directione, quam magnitudine conſtantis, & ſecludemus aeris reſiſtentiam.

481 Porro ſecluſa omni conſideratione parabolæ per ſimplicem geometriam planam facile demonſtratur hoc theorema, a quo univerſa Baliſtica pendet. *Si in RA producta ſurſum aſſumatur AV quadrupla altitudinis AL, ad quam illud grave ſurſum eadem cum velocitate projectum deveniret, vel ex qua acquireret velocitatem projectionis; erit AV. AE :: AE. EQ.* Nam tempore, quo aſcendit per *AL*, motu uniformi percurreret num. 169 ejus duplum *AI*, nempe ipſius *AV* dimidium. Erit autem (num. 166) *EQ* ad *AL*, ut quadratum temporis per *EQ*, quod eſt idem, ac tempus motus æquabilis per *AE*, ad quadratum temporis aſcenſus, vel deſcenſus per *AL*, quod eſt idem, ac tempus motus æquabilis per *AI*, adeoque ut quadratum *AE* ad quadratum *AI*, ſive ob *AL*, *AI*, *AV* continue proportionales, ad rectangulum ſub *AL*, & *AV*. Inde ductis extremis, & mediis habetur $EQ \times AL \times AV = AL \times AE^2$, ſive $EQ \times AV = AE^2$, & *AV*. *AE* :: *AE*. *EQ*.

482 Inde patet, hanc ipſam *AV* in parabola fore latus rectum diametri *AR*, cum ob $HQ = AE$, & $AH = EQ$, debeat eſſe quadratum ſemiordinatæ *HQ* æquale rectangulo ſub abſciſſa *AH*, & recta *AV*, & patet, data velocitate, & mutata directione projectionis utcumque, hanc parametrum omnibus parabolis fore communem, cum *AL* ejus ſubquadrupla pendeat a ſola velocitate.

483 Porro ipſam *AV* dicemus menſuram projectionis, quæ facta ſemel projectione quavis ex *A*, & notata directione *AB*, ac loco *Q*, in quem grave

 cadit.

cadit, facile invenitur. Poſſumus enim menſurare diſtantiam AQ, & angulum EAQ in A, angulum AQE, quem facit QA cum directione verticuli QE, in Q, quorum prior, ſi AQ fuerit planum horizontale, erit ipſa directionis elevatio ſupra horizontem, poſterior erit rectus, adeoque in triangulo AQE dabuntur latera QE, EA, & proinde etiam AV, tertia poſt eas rectas. Quare exploſo ſemel dato tormento bellico cum data menſura pulveris pyrii, & dato globi pondere, patet, pro omnibus ſequentibus projectionibus factis eodem tormento, & eadem pulveris menſura, ac eodem globi pondere, mutata utcumque directione, facile obtineri communem hujuſmodi projectionis menſuram.

484 Habita projectionis menſura facile ſolvuntur bina problemata, directum, F.52. & inverſum, quorum altero in fig. 52, in dato plano AP tranſeunte per punctum projectionis A, quæritur punctum Q, in quod decidet grave projectum data directione AE, altero quæritur directio projectionis, qua e dato puncto A grave abeat ad datum punctum Q.

485 Concipiatur planum verticale tranſiens pro primo problemate per AV, & per directionem datam AE, quod ibi plano dato occurrat in recta AP, pro ſecundo problemate per AV, & punctum datum Q, per quod tranſeat recta AP, & in eo plano ducatur recta perpendicularis ad AV ac per A recta perpendicularis ad AP, quæ ſibi invicem occurrant in C. Centro C, radio CA deſcribatur circulus, quem patet debere tranſire per V, & habere AP pro tangente. Huc uſque conſtructio erit communis. Tum pro primo problemate directioni datæ AE occurrat is circulus in E, ducaturque EQ verticalis parallela VA; & erit Q punctum quæſitum: pro ſecundo erigatur ex dato puncto Q recta verticalis, quæ ſi alicubi occurrat circulo in E, vel e, erit AE, vel Ae directio quæſita.

486 Demonſtratio eſt itidem communis, ducta enim VE, erit angulus EAQ æqualis EVA exiſtenti in alterno ſegmento, & AEQ æqualis alterno EAV. Quare ſimilia erunt triangula AQE, VEA, & erit $AV . AE :: AE . EQ$, ut oportebat; & eadem eſt demonſtratio pro puncto e.

487 Ex hujuſmodi conſtructione multa corollaria ſponte fluunt. Primo quidem patet binis directionibus AE, Ae, quarum altera fecerit cum AP eundem angulum, quem altera cum AV, debere per parabolas ATQ, AtQ diverſas abire grave ad idem punctum Q rectæ datæ AP.

488 Deinde ſi recta CI occurrat circulo ad partes P in N, & inde ducatur recta verticalis NO occurrens rectæ AP in O, ac recta NA, quæ ob arcus NV, NA æquales ſecabit bifariam angulum VAP; patet, punctum Q, debere eo magis recedere ab A, quo angulus PAE, vel PAe acceſſerit ad angulum PAN ſecantem bifariam angulum VAP, quem recta data AP continet cum verticali AV. Quo enim magis ii anguli accedunt ad angulum PAV, eo magis puncta Ee accedunt ad N, & punctum Q ad O.

489 Tertio patet, maximam diſtantiam, ad quam poſſit pervenire grave in data recta AP, eſſe ipſam AO, quæ ſemper erit æqualis ON, cum binæ circuli tangentes ex eodem puncto ductæ æquentur inter ſe; quæ quidem, ſi recta AP fuerit horizontalis, abeunte C in I, & evadente $AONI$ quadrato, erit æqualis ipſi AI, nimirum dupla altitudinis AL; & in eodem caſu, evadente angulo QAV recto, bini anguli PAE. PAe, qui ſimul æquantur angulo PAV, & exhibent binas elevationes binorum jactuum tendentium ad idem punctum Q, erunt alter alterius complementum ad rectum.

490 Hinc

490 Hinc autem eruitur illud, *binas elevationes, quarum altera alterius complementum ſit ad rectum, ad eandem in horizontali plano diſtantiam deferre diverſis viis grave emiſſum; maximum autem jactum in plano horizontali eſſe eum, qui fit per elevationem graduum 45, & hujus diſtantiam æquari duplæ altitudini illi, ad quam grave directè ſurſum eum eadem velocitate projectum aſcenderet, vel ex qua velocitatem acquireret, cum qua proiicitur*; quod quidem expreſſit Noſter a verſu 1460 ad 1478, poſteaquam a verſu 1448 ad 1457 directum problema ſolvi poſſe affirmaſſet, & inde ad verſum 1459 problema inverſum.

491 Porro hinc facile definitur etiam ſpatium omne, quod intra jactum continetur, & includit puncta omnia, ad quæ mutatis utcumque directionibus grave deferri poteſt, quod Noſter a verſu 1778 ad 1488 definit. Nam ſi punctum datum *Q* in ſecundo problemate jaceret in recta *AP* ultra *O*, patet, nullam eſſe directionem, qua ad ipſum deveniri poſſit: ſi ſit in *O*, erit illa unica *AN* ſi jaceat citra, erunt binæ, quarum altera per parabolam *ATQ* minus incurvatam ipſum grave deferet, qua utimur, ubi longiora tormenta exploduntur, quæ dicimus *cannoni*, altera per parabolam *AtQ* magis incurvatam, qua utimur in brevioribus tormentis, quæ dicimus *mortari da bombe*.

492 Quare in quavis recta *AP* punctum *O* determinat loca, ad quæ jactus poteſt perringere, & omnia hujuſmodi puncta *O*, quæ in omnibus circumquaque rectis *AP* eadem lege determinantur, determinant ſuperficiem includentem omne ſpatium ſolidum, quo omnes jactus continentur. Eſt autem juxta num. 465 & elementorum meorum num. 1, ob *AO* = *ON* punctum *O* ab parabolam habentem *A* pro foco, & *CN* pro directrice, a qua cum vertex æque diſtet, ac a foco, erit in *L* vertex parabolæ ipſius, quæ erit *SLS*, & ſi *AP* concipiatur horizontalis, erit *AO* dupla ipſius *AL*, ut demonſtravimus, & ſumpta ad partes oppoſitas *Ao* = *AO*, tranſibit ea parabola per *oLO*, cujus revolutione circa proprium axem, generabitur ſuperficies, quæ continebit omnia puncta illi gravi pervia, & excludet omnia impervia, ac habebitur hujuſmodi theorema. *Omnia puncta pervia gravi cum data velocitate projecto e dato puncto continentur intra ſuperficiem genitam a converſione parabolæ habentis verticem in illa altitudine, e qua libere cadendo acquireretur velocitas projectionis, & focum in ipſo puncto projectionis, qua nimirum e recta horizontali per focum ducta abſcindit quadruplum altitudinis ipſius.*

493 Hæc quidem omnia, & multo plura huc pertinentia, & hinc deducta perſecutus ſum eadem methodo in diſſertatione de motu gravium in ſpatio non reſiſtente, ubi etiam ex hac ipſa problematis conſtructione, quam hìc propoſui, deſcripſi inſtrumentum, quo admodum facile, quæ ad tormentorum directionem pertinent, perfici poſſunt.

494 Addit Noſter a verſu 1489 ad 1508, parabolæ ductum obſervari in aqua erumpente e vaſe. Cum nimirum ſingulæ guttæ parabolas ſingulas deſcribant, totus omnium ſibi ſuccedentium ductus parabolicus eſt.

495 Addit autem a verſu 1509 ad 1522, curvam in aere plurimum recedere a parabola, & accedere ad formam hyperbolæ, crure ad rectam quandam, ut aſymptotum, accedente in infinitum, quin uſquam congruant, quod quidem accidit potiſſimum in globis minus ponderantibus, vel ubi cum ingenti velocitate, & ſenſibili elevatione projectio fit, ut globus ad ingentem diſtantiam

tiam

etiam abeat, & reſiſtentia diu agat. Nam reſiſtentia ipſa de motu ipſo ſecundum directionem projectionis accepto perpetuo aliquid detrahit, atque id ita, ut certum limitem tranſgredi non liceat. Concipiamus projectionem fieri per planum horizontale. Quoniam reſiſtentia aeris perpetuo aliquid detrahit, perpetuo velocitas minueretur. Si reſiſtentia, imminuta velocitate non imminueretur, totam demum extingueret, ut in motibus retardatis. Sed reſiſtentia ipſa, ut habetur in ipſis notis libri 3, pendet a velocitate, & cum ipſa perpetuo decreſcit; inde fit, ut eam penitus extinguere nequaquam poſſit, ſed in infinitum ita imminuat, ut datum ſpatium non tranſcurrat. Ubi projectio fiat per aerem horizontalis, ipſam itidem, ut & verticalem vi gravitatis acquiſitam perpetuo reſiſtentia minuit; ubi obliqua projectio eſt, reſoluta projectionis velocitate in duas alteram horizontalem, alteram verticalem, utramque reſiſtentia minuit ſimul cum ea, quam gravitas gignit. Sed motus quidem ſecundum directionem verticalem ob gravitatis reparantis damna actionem continuam fit demum ſemper deorſum cum velocitate finita; at horizontalis velocitas, nullo adjuvante minuitur in infinitum, & receſſus horizontalis a recta *AR* non fit ultra certum limitem, curva limitem ipſum habente pro aſymptoto.

496 Hujus limitis determinatio geometrica eſt varia, pro varia hypotheſi circa legem reſiſtentiarum, qua de re Newtonus pluribus agit Principiorum libro ſecundo, & propoſitione decima profert plurimas regulas, quæ pertinent ad motus in hyperbolicis curvis accedentibus ad eam, quam habere debet grave projectum in aere, ſi reſiſtentia ſit, ut denſitas, & quadratum velocitatis conjunctim, ſed eam omnem theoriam, tum quod multo prolixior eſt, ac ſublimior, tum quod & minus accurata admiſſis etiam principiis, & incerta ob incertas admodum reſiſtentiæ leges, hic omittimus, ad cætera, quæ multo accuratiorem, atque expeditiorem determinationem patiuntur feſtinantes.

§. VIII. Ad notam in verſ. 1523.

DE DESCENSU PER PLANA INCLINATA, ET CURVAS.

497 Ab hoc verſu incipit Noſter agere de motu per plana inclinata, primo quidem per ſingula, tum per plana ſimul connexa, tranſeundo ex alio in aliud, ac ipſis in infinitum multiplicatis per curvas continuas, & in hoc quidem libro expedit, quæ ad circulum pertinent, cycloide ſequentis libri initio reſervata. Eodem ordine, quæ ipſe hoc libro comprehendit ante epiſodium poſtremum, nimirum uſque ad verſum 2040, perſequemur, & illuſtrabimus, ac demonſtrabimus de more.

F.53. 498 Primo quidem ſi grave *D* in fig. 53 debeat oblique deſcendere vel aſcendere per planum expreſſum a recta *AB*, ejus gravitas expreſſa per lineam verticalem *DE*, ductâ *EG* perpendiculari ad ipſum planum, & completo rectangulo *EGDF*, reſolvi ſolet in duas, alteram *DF* perpendicularem plano, quæ impenditur in premendo ipſo plano, alteram *DG* ſecundum directionem plani, quæ motum obliquum accelerat, quam etiam vim, ſeu gravitatem relativam appellant, gravitatem integram per *DE* appellantes abſolutam; & quoniam dum punctum *D* deſcendit per *AB*, manente gravitate abſoluta, manet *DE*, & totum quadrilineum *EGDF*, manebit etiam *DG*, ſeu gravitas relativa, & motus

motus ille obliquus erit uniformiter acceleratus, ac in quovis plano determinato, fiet motus eum iiſdem legibus, eum quibus fit deſcenſus, vel aſcenſus liber. Hæc Noſter exponit a verſu 1523 ad 1553.

499 In hac reſolutione gravitas *DE* binos effectus ageret preſſionis per *DF*, & ſollicitationis continuæ ad deſcenſum per *DG*, majores abſoluta ſolicitatione deſcenſus per *DE*. Sed in eo nihil eſt abſurdi, ne in communi quidem ſententia, cum, juxta ea quæ num. 543 expoſuimus, eadem cauſa poſſit in diverſis circumſtantiis diverſo modo agere, adeoque aliter, ubi ſine plano adjacente ſit, aliter, ubi ipſius ſibi obſiſtentis vim debeat retundere; in mea autem theoria difficultas ipſa penitus evaneſcit, in qua grave *D* non continget planum *AB*, ſed ita ab eo diſtabit, ut vis repulſiva *DH*, qua ipſum urgetur ad partes plano oppoſitas compoſita cum gravitate *DE* per parallelogrammum *HDEG*, exhibeat vim per diametrum *DG* parallelam ipſi plano *AB*; ſi enim magis diſtaret, imminutâ vi repulſivâ deſcenderet, & magis accederet; ſi vero diſtaret minus, auctâ vi repulſivâ contra recederet; & in ea ſola diſtantia, motum habebit ſecundum ipſam illius plani directionem. Quoniam autem vis repulſiva ſemper eſt mutua; urgebitur planum vi repulſiva *DF* contraria, & æquali ipſi *DH*, adeoque ipſi *EG*, eritque *DGEF* parallelogrammum rectangulum illud ipſum, quod in communi reſolutione adhibetur. Hinc autem conſequitur, non haberi veram reſolutionem in mea theoria, ſed compoſitionem, in qua ob directiones ex parte oppoſitas effectus decreſcit, nec planum urgeri vi gravitatis, ſed vi repulſiva orta ex acceſſu determinato a gravitate, nec deſcenſum obliquum oriri a parte gravitatis, ſed a tota gravitate conjuncta cum vi repulſiva; licet in utraque conſiderandi methodo vis abſoluta gravitatis ad vim reſpectivam ſolicitantem ad deſcenſum eandem rationem habeat, quod in omnibus omnino motibus impeditis locum habebit, ut num. 216 monuimus.

500 Quoniam vis hæc reſpectiva erit minor, quam vis abſoluta gravitatis, velocitas dato tempore acquiſita non erit eadem, ac in libero deſcenſu, ſed (num. 168) in ratione ipſarum virium. Ut autem ipſa ratio inveſtigetur, conſiderentur bina triangula *ACB*, *DGE*. Erit in iis præter angulos ad *C*, & *G* rectos, angulus *GDE* externus æqualis angulo *BAC* interno, & oppoſito. Quare erit *AB*. *AC*: : *DE*. *DG*. Nimirum gravitas abſoluta ad vim reſpectivam, ut longitudo plani ad ejus altitudinem. Quamobrem cum gravitas ſit conſtans, erit in diverſis planis vis reſpectiva, & proinde etiam velocitas dato tempore genita & vero etiam ſpatium dato tempore percurſum (num. 168), manente longitudine plani, directè ut altitudo, manente altitudine, reciprocè ut longitudo, & mutata utraque in utraque ratione compoſita. Id Noſter expreſſit a verſu 1554 ad 1570.

501 Addi hic poteſt hujuſmodi etiam theorema. *Vis gravitatis abſoluta ad vim reſpectivam eſt, ut radius ad ſinum anguli, quo planum inclinatur ad horizontem, & proinde in diverſis planis, quibuſcumque manente radio, erit, ut ſinus inclinationis ipſius.* Eſt enim *AB* ad *AC* ut radius ad ſinum anguli *ABC*.

502 Hinc autem generales formulæ derivari poſſunt pro deſcenſu in planis inclinatis quibuſcumque, quæcumque fuerint longitudines, & latitudines ope theorematis demonſtrati num. 166 pro quibuſvis motibus uniformiter acceleratis. Si nimirum dicatur vis *u*, celeritas acquiſita *c*, ſpatium percurſum *s*,

tempus

tempus impenſum t, eſt ex eo theoremate $e = ut$, $s = utt$. Si autem hic dicatur longitudo plani s, altitudo a, ſinus inclinationis m; erit $u = \frac{a}{s}$, vel $u = m$. Quare habebuntur hæ quatuor formulæ $c = \frac{at}{s}$, $c = mt$, $s = \frac{att}{s}$, ſive $ss = att$, $s = mtt$. Ex prima autem habetur $cc = \frac{aatt}{ss}$, ex tertia $a = \frac{aatt}{ss}$, unde oritur quinta $cc = a$. Jam vero ex hiſce formulis, patet, quam multæ aliæ formulæ, & quam multa poſſint theoremata derivari. Evolvam ea, quæ Noſter expreſſit.

503 *Si plura plana cujuſcumque longitudinis, & inclinationis fuerint æquè alta, velocitas in fine acquiſita, erit eadem, tempus autem, ut longitudo plani*. Quia in formula quinta $cc = a$, cum quadratum celeritatis ſit, ut altitudo, & altitudo ſit eadem; erit eadem & celeritas, & in formula tertia $ss = att$, facto a conſtanti, ſit $ss = tt$, ſive $t = s$, tempus, ut plani longitudo. Id Noſter expreſſit a verſu 1578 ad 1600. Generaliter autem, *erit quadratum celeritatis, ut altitudo plani; quadratum temporis, ut quadratum longitudinis directè, & altitudo reciprocè*. Primum enim continet formula quinta $cc = a$, ſecundum eruitur ex tertia $ss = att$, ex qua habetur $tt = \frac{ss}{a}$.

F.55. 504 Sit jam in fig. 55 circulus $ABDI$, cujus diameter AD verticalis, & quævis chorda AB, vel BD ducta e ſummo puncto A, vel imo D eodem tempore deſcribetur. Poſſet quidem admodum facile deduci hoc theorema e ſuperioribus formulis, ſed hoc pacto immediate facilius demonſtrabitur. Gravitas abſoluta AD, completo rectangulo $ABDI$, poteſt concipi ut compoſita e binis AI, AB, quarum prima ſola ſollicitat deſcenſum per AI, ſecunda per AB. Quare gravitas abſoluta ad vim relativam per AB erit, ut AD ad AB, adeoque cum ſpatia iis viribus confecta ſint (num. 168), ut ipſæ vires; quo tempore percurritur AD, eodem percurretur AB; & eadem eſt demonſtratio pro AI, adeoque & pro BD æquali, æqualiter inclinata ad ipſam. Et hoc quidem elegantiſſimum Galilei theorema Noſter expreſſit a verſu 1601 ad 1616.

505 Ex hoc theoremate Keillius cum aliis plurimis arripuerunt occaſionem erroris illius, de quo egi in notis ad verſum 1668, quem errorem Noſter pluribus inſectatur. Nimirum cum arcus exigui BbD parum admodum differant a chordis ſuis, tempora autem deſcenſuum per chordas quaſvis ſint æqualia, inferunt, tempora per arcus exiguos, æqualia proximè inter ſe eſſe debere, adeoque oſcillationes in exiguis arcubus circularibus eſſe debere iſochronas, ſive æquè diuturnas. Si quid argumentum evinceret, deberet evincere illud etiam, tempus per arcum minimum æquari tempori caſus liberi per diametrum, a quo, ipſæ obſervationes oſtendunt, id quidem plurimum diſcrepare. Erroris fontem, quem Noſter etiam hic indicat, & ut in notis monui, fuſe perſecutus ſum in diſſertatione de Inæqualitate gravitatis in diverſis Terræ locis, hic aperiam.

506 Chorda quidem infiniteſima arcui longitudine æquipollet ita, ut diſcrimen ſit infinitè parvum reſpectu totius longitudinis, quod admodum facile demon-

demonſtratur; at vis relativa, quæ ad deſcenſum obliquum ſollicitat in chorda, & in arcu eſt admodum diverſa. Per chordam *BD*, quæ ubique eandem directionem habet, eſt ubique eadem, ſed per arcum initio quidem in *B*, eſt fere duplo major, quam in chorda; in medio arcu *b*, eſt ipſi æqualis; in imo nulla. Si enim ducatur recta *DF* horizontalis, adeoque perpendicularis rectæ *AD*, & circuli tangens, cui occurrant in *E*, & e tangentes ductæ per *B*, & quodvis aliud punctum *b* arcus ipſius; directio arcus ubique erit eadem, ac directio tangentis, adeoque vis relativa erit eadem in punctis *B*, *b*, quæ eſſet in iis tangentibus; nimirum (num. 501) ut ſinus inclinationis ad horizontem, ſive angulorum *BEF*, *beF*. Porro angulus *BEF* æqualis duobus *EDB*, *EBD* internis, & oppoſitis inter ſe æqualibus, duplus eſt ipſius *BDE*, ſive *BDF*, quem idcirco metitur arcus ipſius *DB*, eum ejus dimidium ſit menſura anguli *DAB* exiſtentis in alterno ſegmento reſpectu *BDF*, adeoque ipſius *BDF*. Cum igitur eodem argumento angulum quemvis *beF* metiatur arcus *Db*; puncto *b* accedente ad *D*, is angulus perpetuo minuetur; in medio arcu erit dimidius ipſius *BEF*, adeoque æqualis ipſi *BDF*; in imo arcu in *D* nullus. Sunt autem exiguorum angulorum arcus quamproxime, ut ipſorum ſinus. Igitur & ſinus anguli vim relativam determinans erit in arcu in *B* duplus quamproxime ſinûs ipſam determinantis in chorda, in medio æqualis, in fine nullus.

507 Patet igitur, longe aliter ſe debere habere motum in chorda, ac in arcu. In illa motus eſt uniformiter acceleratus, in hoc admodum difformiter, in quo quidem licet a medio vis multo ſit minor, ubi jam ob concepti motus velocitatem vis ipſius actio exiguo durat tempore; tamen illa multo major velocitas prioribus illis majoribus viribus concepta, quæ durat per totum deſcenſum, contrahit mirum in modum tempus deſcenſus ipſius, ut paullo infra evidentius patebit. Exigua igitur illa curvatura contemni poteſt, & aſſumi arcus pro chorda exigua, ubi totus inclinationis angulus eſt ingens, non ubi ipſe exiguus eſt. In illo primo caſu contemnitur aliquid, quod exiguum eſt reſpectu ejus, reſpectu cujus contemnitur; in hoc contemnitur aliquid, quod eſt exiguum quidem, ſed non exiguum reſpectu ejus, reſpectu cujus contemnitur; unde fit, ut error in illo caſu exiguus committatur in eo, quod quæritur, in hoc admodum ingens. Hæc quidem expreſſit Noſter a verſu 1668 ad 1730.

508 Ut definiatur, qui ſit is ipſe error, & quod ſit verum tempus deſcenſus per arcum exiguum, & per quoſvis curvarum quarumcumque arcus, neceſſarium eſt definire, quod pertinet ad motum per plura plana inclinata invicem connexa, tum ipſorum planorum numerum in infinitum augere, & longitudinem minuere, quod Noſter præſtat a verſu 1743 ad 1858.

509 Primo quidem ſi grave in fig. 56 e plano *AB* tranſeat ad planum *BD*, non retinet in ipſo tranſitu in initio plani *BD* totam velocitatem, quam habebat in fine plani *AB*. Si enim concipiatur recta *AC* perpendicularis plano *DB* producto, & velocitas in fine plani in *B*, quæ habet directionem *AB*, concipiatur reſoluta in duas *AC*, *CB*, illam priorem, ut num. 406, novum planum elidet, ac, ſeclusâ omni elaſticitatis conſideratione, altera ſola urgebit corpus per novum planum, eritque velocitas prior ad novam, ut *AB* ad *BC*, ſive ut radius ad coſinum anguli *ABC*, ſive *ABD*, quem plana inter ſe continent, & prior velocitas ad amiſſam, ut radius ad ſinum verſum anguli, quem alterum planum continet cum altero producto; cum nimirum, ſi centro *B* radio *BA* de- F.56

ſcribatur ſemicirculus *eAE* occurrens plano *BD* in *E*, ipſi *DB* producto in *e*, ſit velocitas prior ad amiſſam, ut *AB* ad *CE*. Hæc fere habentur a verſu 1743 ad 1755.

510 Videtur quidem ibi, ſi angulus finitus ſit, fieri velocitatis mutatio in *B* per ſaltum quendam. Sed hæc eſt geometrica tantummodo conſideratio. Nam & corpus illud aliquam compreſſionem in incurſu in planum *BD* patietur, in qua velocitatem paulatim imminuet, ac ob elaſticitatem aliquam, quam ſemper habebit, nonnihil reſiliet, & deinde ſinuato motu deſcendet; ac in mea
F.57 theoria, planum ipſum ne attinget quidem, ſed, ut in fig. 57, deſcendet motu *abb'd* curvato in *bb'*. Quin imo nec plana ipſa continua habebuntur in mea theoria, & vero perfectè plana ne in communi quidem ulla erunt in Natura, quæ in cuſpidem accuratam deſinant in *B*, ſed in mea theoria habebuntur puncta quodam ordine diſtributa, quorum continua actio ad omnes diſtantias ſe protendens, quamvis in majoribus diſtantiis inſenſibilis, curvam quandam *abb'd* continuam, & vero etiam admodum ſinuatam determinabit. Sed ab iis omnibus hic mentem abſtrahimus.

511 Patet autem, differentiam illam velocitatum, decreſcente angulo, quem continet planum alterum cum altero producto, decreſcere, cum decreſcente
F.56 angulo *ABC* decreſcat *Ce*; ita autem decreſcet, decreſcente eo angulo in infinitum, ut ſit infiniteſima ſecundi ordinis. Nam, decreſcente (in fig. 56) in infinitum angulo *ABC*, decreſcit in infinitum ratio ſinus recti *AC* ad radium *AB*; cumque ſit *eC* ad *CA*, ut *CA* ad *CE* adhuc majorem radio *BE*, vel *BA*; decreſcet in infinitum adhuc magis ratio ſinus verſi *eC* ad ipſum ſinum rectum *CA*, adeoque ipſe reſpectu radii infiniteſimus erit ordinis ſecundi, & velocitatis decrementum reſpectu totius velocitatis finitæ infiniteſimum ſecundi ordinis.

512 Hæc Noſter exponit a verſu 1756 ad 1773, tum varios infinitè parvorum ordines commemorat uſque ad verſum 1790, quorum ego quidem naturam, & uſum exhibui in diſſertatione de natura, & uſu Infinitorum, & infinitè parvorum, ac paulo infra exponam in ſequenti paragrapho.

513 Augeatur jam numerus planorum in infinitum, imminutâ in infinitum ſingulorum longitudine, & angulo, quem quodvis ſuperius cum inferiore producto continet, ut planorum ſeries ad curvæ continuæ ductum accedat in infinitum. Habebitur numerus decrementorum infiniteſimorum ſecundi ordinis infinitus primi ordinis, adeoque eorum ſumma erit adhuc infiniteſima, quæ proinde evaneſcentibus penitus angulis, & ſerie planorum abeunte in curvam continuam, debet penitus evaneſcere, & motus per curvam haberi ſine ulla jactura velocitatis jam acquiſitæ, tanquam ſi motus fieret per rectam lineam, qui ſi viribus quibuſdam reſpectivis perpetuo acceleratur; eædem erunt accelerationis leges, quæ eſſent, ſi vires abſolutæ illis relativis æquales in eadem directione perpetuo corpus per eandem rectam delatum ſollicitarent. Hæc Noſter exprimit a verſu 1791 ad 1803.

514 Quoniam autem illa decrementa orta ex mutatione inclinationis, & angulis ejuſmodi ſunt, ut multiplicatis in infinitum ipſis planis evaneſcant, ſine ulla ſuæ velocitatis jactura, ſi concipiamus per plura plana deſcendere grave ſine ulla ſuæ velocitatis jactura in ingreſſu in novum planum, tum in infinitum multiplicato planorum numero, ea ad curvas continuas applicemus, nullus error

com-

committetur. Atque id ipſum habetur a verſu 1803 ad 1809, ac deinde ad 1819 hujus erroris contempti utilitas itinere jam expedito, oſtenditur.

515 Ope hujus ſuppoſitionis jam demonſtrat Noſter a verſu 1820 ad 1842 theorema quod Hugenius propoſuit Horologii oſcillatorii parte ſecunda prop. 8. hiſce verbis. *Si ex altitudine eadem deſcendat mobile continuato motu per quotlibet, ac qualibet plana contigua utcumque inclinata, ſemper eandem in fine velocitatem acquiret*: & eadem utitur demonſtratione.

516 *Sint* in fig. 58, *plana contigua AB, BC, CD, quorum terminus A ſupra horizontalem lineam DF per infimum terminum D ductam altitudinem habeat, quanta eſt perpendicularis EF, deſcendatque mobile per plana illa ab A uſque in D.* (Addit Hugenius ſine ulla ſuppoſitione erroris cujuſpiam mente ſecluſi; *dico in D, eam velocitatem habiturum, quam ex E cadens haberet in F.*) F. 58.

517 *Producta enim CB occurrat rectæ AE in G, itemque DC producta occurrat eidem AE in E. Quoniam itaque per AB deſcendens eandem acquirit velocitatem in termino B, atque deſcendens per GB* (num. 503); *manifeſtum eſt, cum flexus ad B nihil obſtare motui ponatur, tantam velocitatem habiturum, ubi in C pervenerit, quantam ſi per GC planum deſcendiſſet, hoc eſt, quantam haberet ex deſcenſu per EC. Quare & reliquum planum CD eodem modo tranſibit, ac ſi per EC adveniſſet, ac proinde in D denique parem velocitatem habebit, ac ſi deſcendiſſet per planum ED, hoc eſt eandem, quam e caſu perpendiculari per EF.*

518 Noſter hanc ipſam, ut ajebam, demonſtrationem retinuit, quam planis applicavit quotcumque, tum inde ad verſum 1850 multiplicatis in infinitum lateribus eruit theorema generale pro curvis omnibus, *Velocitatem in deſcenſu per curvam quamvis fore eandem, quæ acquireretur in deſcenſu rectilineo per eandem altitudinem*, quod quidem facile ex eadem demonſtratione colligitur locum habere & in aſcenſu. Et quidem Hugenius etiam ejuſmodi corollarium eruit pro curvis omnibus poſt expoſitam demonſtrationem, quod demonſtratione inverſa etiam pro aſcenſu demonſtravit.

519 Cum Hugenius in propoſitione theorematis uſus ſit illa voce *motu continuato*, & in demonſtratione appoſuerit *cum flexus ad B nihil obſtare motui ponatur*, videtur etiam ipſe locutus ex hypotheſi quadam conficta, quam Noſter ad errorem vitandum adhibet, de velocitate in planorum angulo nihil mutata. At quoniam in expoſitione theorematis ipſius, abſolutè addit, ut monui, *dico in D eam velocitatem habiturum &c.*, nec ullam ſuppoſitionem ibi adhibet; in propoſitione autem 21, nec in enunciatione, nec in expoſitione, nec in demonſtratione vocem addit ullam, quæ ejuſmodi ſuppoſitionem, ibi quoque neceſſariam, innuat; nuſquam vero in toto opere agnoſcit decrementum velocitatis in ea mutatione plani, nuſquam demonſtrat, errorem illum in curvatura continua evaneſcere, quod ad theoremata, quæ de curvilineis motibus abſolute enunciat, videtur fuiſſe perneceſſarium; videtur omnino cenſuiſſe id ipſum, nihil obſtare illum angulum, nec agnoviſſe mutationem ipſam, & jacturam, quam quidem Galileo quoque fuiſſe ignotam, videtur multo etiam magis erui ex theorematum enunciatione, & demonſtratione, ac ſolutione problematum, quæ profert de motu per diverſa plana, in quibus nulla habetur mentio jacturæ ipſius, & quæ, ut ab illo abſolutè proponuntur, omni-

 no ſunt

no ſunt falſa, & correctione indigent, quæ computata jactura ipſis haud difficulter adhiberi poteſt.

520 Ex theoremate expoſito eruitur methodus, quam hic Noſter indicat a verſu 1851 ad 1858 determinandi tempora deſcenſuum per curvas quaſcumque. Debeat in fig. 59 grave quodpiam deſcendere ex *B* per arcum *BDF* curvæ *AF*. Ducantur *BG*, *DH* perpendiculares ad *FC* verticalem, & ſemicirculus diametro *GF* occurrat rectæ *DH* in *R*. Erit velocitas in *D*, eadem, ac in *H* in libero deſcenſu ex *G*, nimirum (num. 166) in ratione ſubduplicata *GH* ad *GF*, ſive ut chorda *GR* ad *GF*. Hinc autem & ex eo, quod in motu conſiderato, ut æquabili, tempus eſt (num. 75) ut ſpatium directè, & velocitas reciprocè, dabitur expreſſio tempuſculi, quo ſpatiolum circa *D* deſcribitur, & colligi poterit eorum tempuſculorum ſumma.

F. 59.

521 Inde admodum facile definitur, quam libuerit, proximum vero tempus deſcenſus per quemvis arcum circularem. Dividatur arcus *BF* in quotcumque particulas exiguas æquales *d'Dd*. Ex puncto medio *D* cujuſvis concipiatur *DH*, & ipſi reſpondens *GR*, quæ erit media inter *GF*, *GH* ſinum verſum arcus *FB*, & differentiam ipſius a ſinu verſo arcus *FD*. Dividatur eadem *GF* per quamvis *GR*, & ſumma omnium quotorum ejuſmodi ducatur in unam particulam *d'd*; ac erit tempus deſcenſus per *BF*, ad tempus caſus liberi per *GF*, ut eſt id productum, ad duplam *GF*, quæ ratio eo propior erit veræ, quo minores aſſumptæ fuerint particulæ *d'd*.

522 Demonſtratio eſt facilis. Si enim conſideretur motus per *d'd*, ut æquabilis cum velocitate debita puncto medio *D*, exprimet *GR* velocitatem in *D*, & (num. 75) $\frac{d'd}{GR}$ tempuſculum inſumptum in *d'd*: exprimet autem $\frac{h'h}{GF}$ tempuſculum impenſum in deſcribendo *h'h* cum velocitate finali, quæ habetur in *F*. Quare totum tempus per *BF* exprimet ſumma omnium *d'd* diviſarum per ſingulas *GR*, & tempus deſcenſus per *GF* cum velocitate finali *F*, ſumma omnium *h'h* diviſarum per eandem *GF* ſive *GF* diviſa per ſe ipſam nimirum, 1. Quare ſi ſinguli illi quoti ducantur in *GF*, erit tempus per *BF* ad tempus per *GF* motu illo cum finali velocitate, ut ſumma omnium $\frac{d'd \times GF}{GR}$, quæ ob omnes *d'd* æquales æquatur ſummæ omnium $\frac{GF}{GR}$ ductæ in unicam *d'd*, ad $\frac{GF^2}{GF} = GF$. Tempus autem deſcenſus liberi per *GF* (num. 169) eſt duplum temporis deſcenſus cum velocitate finali. Igitur tempus deſcenſus per *BF*, ad tempus deſcenſus liberi per *GF*, erit, ut eſt ſumma omnium $\frac{GF}{RG}$ ducta in unicum *d'd* ad 2*GF*.

523 Methodus eadem eſt generalis pro curvis omnibus, in quibus dato arcu *FD*, inveniri poſſit pars axis *FH*, ut in circulo, dato arcu, invenitur per tabulas ſinuum ſinus verſus. Sed generaliter pro curvis omnibus, quarum detur in quovis puncto *D* directio tangentis *DE*, facile eadem methodus reducitur. Dividatur *GF* in quotcumque partes *h'h*: Inveniatur pro puncto *H* intermedio inter *h'h* ſua *GR* media inter *GH*, *GF*: fiat, ut ſinus anguli *EDH* ad radium, ita *h'h* ad *d'd*, tum ut *GR* ad *GF* ita *d'd* ſic inventa ad numerum quendam; ac erit tempus per *BF* ad tempus liberi deſcenſus per *GF*, ut omnium eorum numerorum ſumma ad duplam *GF*.

524 Demon-

524 Demonſtratio habetur ex eo, quod chorda $d'd$ ſumi poteſt pro parallela tangenti DE in arcu exiguo, adeoque ducta dV perpendiculari in $d'h'$, erit angulus $dd'V = EDH$, & dV ſive hh' ad dd', ut ſinus anguli $EDH = dd'V$ ad radium. Cætera manent, ut prius; tantummodo cum non omnes dd' æquentur inter ſe, non poteſt in fine fieri multiplicatio ſummæ terminorum per unicam dd', ſed ſinguli ducendi ſunt.

525 Generaliter accuratè res obtineri poteſt in curvis omnibus per curvarum quadraturas. Producatur quævis DH in I, ut poſito ſinu anguli EDH ad radium $1 = m$, ſit $HI = \frac{GF^2}{m \times GR}$, ac per omnia puncta I ducta curva OIP, erit tempus deſcenſus per BF ad tempus deſcenſus liberi per GF, ut area clauſa curva OIP, & rectis GN, FQ horizontalibus ad duplum quadratum GF.

526 Nam aſſumpta hh' infinitiſſima, erit $d'd = \frac{h'h}{m}$. Quare tempuſculum per $d'd$ exprimet $\frac{h'h}{m \times GR}$, adeoque id tempuſculum ductum in GF^2 exprimet $\frac{GF^2 \times h'h}{m \times GR} = HI \times h'h$, nimirum areola $i'h'hi$. Hinc totum tempus ductum in GF^2 exprimet tota illa area, tempus autem deſcenſus per GF cum finali velocitate ductum in idem quadratum exprimet ſumma omnium $h'h$ ducta in GF^2, & diviſa per GF, ſive $\frac{GF \times GF^2}{GF}$, vel GF^2; adeoque tempus liberi deſcenſus per GF ductum in GF^2 exprimet $2GF^2$.

527 Si ABF fuerit circulus centro C, ob angulum CDE rectum, erit angulus $DCH = HDE$, & proinde poſito radio $CD = 1$, $DH = m$, qui eſt ſinus arcus DF; unde evadit facillima determinatio valoris m. Generaliter autem pro quavis curva BDF, area OIP computari poteſt veræ proxima, ſi diviſa GF in particulas æquales $h'h$, pro ſingulis ipſarum mediis punctis H inveniatur HI, tum omnium HI ita inventarum ſumma ducatur in unicam $h'h$; ſingulæ enim areolæ $i'h'hi$, æquantur proximè ſingulis HI ductis in eandem $h'h$.

528 Alteram methodum temporis determinandi Noſter proponit pro curvis omnibus a verſu 1850 ad 1868, quæ huc reducitur. Conſideretur curva linea, ut recta quædam. Pro quibuſvis ejus punctis inveniatur vis relativa, & determinentur omnia, quæ pertinent ad motum in illa recta acceleratum per vires abſolutas illis relativis æquales methodo §. 15 libri 1, & erit factum. Monui in nota hanc methodum plerumque multo complicatiorem eſſe, quia plerumque admodum difficile eſt determinare vim relativam per arcum ipſum. Sed in caſu, noſtro arcus exigui, ut & in ſequenti libro in arcu utcumque magno cycloidis, res ſuccedit mirum in modum.

529 Nam in primis in arcu exiguo BbD figuræ 55 angulus beF eſt, ut arcus F. 55. Db, qui (num. 506) eſt ejus menſura, qui cum exiguus eſt, eſt ut ſuus ſinus. Igitur & vis relativa, quæ (num. 501) eſt, ut ſinus ejus anguli, erit ut arcus Db, ſive, ut ſpatium percurrendum uſque ad finem motus. Id Noſter habet a verſu 1874 ad 1895.

530 Aſt ubi in motu accelerato vires ſunt, ut diſtantiæ a fine motus, deſcenſus ex quibuſvis diſtantiis, & aſcenſus ad quaſvis diſtantias fiunt eodem tem-

tempore, juxta num. 181, quod hic Noſter fuſius demonſtat a verſu 1911 ad 1961. Igitur arcus exigui circuli, ſive majores, ſive minores ſint, eodem omnes ad ſenſum tempore percurruntur, quod Noſter exponit a verſu 1962 ad 1977.

531 Demum a verſu 1978 ad 2027 ex eo, quod arcus quidem exiguus parum admodum a ſua chorda abludat longitudine, ac, ut num. 506 demonſtravimus, vis in initio in arcu ſit duplo major, quam in chorda, & in illo decreſcat in ratione diſtantiarum a puncto infimo computatarum in ipſo arcu, in hac ſit conſtans, deduci, fore tempus in chorda, adeoque (num. 504) tempus deſcenſus liberi per diametrum circuli, ad tempus per arcum, ut eſt circuli diameter ad quadrantem peripheriæ, quod quidem theorema demonſtravimus ſupra num. 185.

532 Poſtremo loco proponit Noſter inveſtigandam rationem temporis per arcum quemvis majorem ad tempus per chordam, quod multo ſublimius eſſe affirmat, quam ut verſibus expediri poſſit, & vix veterum methodis geometricis admodum implexis ſolubile; unde occaſionem arripit digrediendi ad infiniteſimalem calculum differentialem, & integralem, cujus ope hujuſmodi problemata implicatiora ſolvuntur. At num. 521 vidimus, quo pacto ſolvi poſſit etiam per numeros ſine ejuſmodi calculo.

533 Intereà illud addam, me in diſſertatione de inæqualitate gravitatis in diverſis Terræ locis multo expeditiorem methodum pro arcubus non ita magnis tradidiſſe coercendi exiguam illam inæqualitatem deſcenſuum intra fines admodum arctos ope ſolius finitæ Geometriæ. Inveni, nimirum tempus deſcenſus per arcum quemvis non majorem gradibus 60 ad tempus deſcenſus per arcum minimum eſſe in ratione majore, quam ſit ratio arcus majoris ad chordam ſuam, & minore, quam ſit ratio chordæ ad ſinum. Inde calculo ſubducto facile innoteſcit illud, ſi bina pendula oſcillent alterum quidem per arcum minimum, alterum vero per arcum graduum trium, nec poſt 11382 oſcillationes, & ſi per arcum graduum duorum, nec poſt 29000 oſcillationem integram defuturam. Sed hæc itidem innuiſſe ſit ſatis.

§. IX. Ad notam in verſ. 2058

DE INFINITESIMALIBUS RECENTIORUM METHODIS.

534 Eorum occaſione, quæ Noſter de infiniteſimalium methodis ad finem uſque hujuſce libri commemorat, explicabo pauca quædam, quæ in notis promiſi, neque enim hic locus eſt ipſarum methodorum, & calculi potiſſimum differentialis, atque integralis elementa contexendi. Dicam autem in primis, quid ſint infiniteſimæ quantitates, & diverſi ipſarum ordines, quod promiſi in nota ad verſum 1743, tum quid infiniteſimalis methodus geometrica differat a methodis veterum, quas exhauſtionum appellant, quod promiſi in hac nota ad verſ. 2058, ac demum ſigna in calculo infiniteſimali adhibita proponam, & innuam, qui errores in eo calculo committantur, qui in univerſa infiniteſimali methodo metuendi ſint, qui contemnendi, ut promiſi in nota ad verſ. 2116.

535 Primo quidem nulla quantitas, ut eſt in ſe, & ſine noſtro cogitandi modo aut infinitè magna eſt, aut infinitè parva, ſed quævis quantitas in ſe deter-

ter-

terminata eſt, & finita. Id ego quidem me demonſtraſſe arbitror in Diſſertatione de Natura, & uſu infinitorum, & infinitè parvorum, in alia de transformatione Locorum Geometricorum addita Sectionum Conicarum elementis, ac in alia de lege Continuitatis edita ſuperiore anno. Sed quoniam data quavis quantitate utcumque parvâ, alia ſemper adhuc minor, ut demonſtravi in ſupplemento lib. 1. §. 12, & quacumque utcumque magnâ alia ſemper adhuc major haberi poteſt; licet nobis conſiderare quantitatem exiguam, vel ingentem, quam poſſimus minuere, vel augere, quantum nobis libet, abſtrahendo animum a quovis limite determinato. Quantitatem hujuſmodi dicimus infiniteſimam, vel infinitam, infinitè parvam, vel magnam, accipiendo infinitum pro indefinito, quod nuſquam eſt in rebus, ſed in noſtro concipiendi modo.

536 Quantitatem quamvis, quæ vel non concipitur variabilis, vel ſi concipitur variabilis, non concipitur variabilis ultra quoſdam determinatos limites, finitam dicimus, & rationem, quam duæ qantitates finitæ habent ad ſe invicem, rationem finitam. Unam e quantitatibus, quæ concipiuntur imminutæ ultra quoſcumque limites, *ad arbitrium aſſumptam*, dicimus infiniteſimam primi ordinis. Si ſit aliqua, quæ ad ipſam habeat rationem, quam ipſa ad aliquam quantitatem finitam ad arbitrium aſſumptam, eam dicimus infiniteſimam ſecundi ordinis. Quæ ad ipſam ſit in eadem ratione, dicimus infiniteſimam tertii, & ita porro. Si ſit quædam quantitas ad finitam illam, ut illa ad infiniteſimam primi aſſumptam, eam dicimus infinitam primi ordinis, & eodem pacto infinitas ſuperiorum ordinum definimus; ordines autem intermedios exhibent mediæ geometricæ proportionales inter illas, quæ ordinem habent certo numero definitum. Quantitates demum, quæ ad ejuſmodi quantitatem ordinis cujuſvis habeant rationem, quam quævis quantitas finita ad finitam aſſumptam, dicuntur ordinis ejuſdem. Hæ ideæ ſunt admodum diſtinctæ.

537 Hic, ubi quantitates quædam ſunt inter ſe utcumque connexæ, videndum, cujus ordinis ſint; ut ſi arcus circuli aliquis infiniteſimus primi ordinis aſſumatur, facile demonſtratur, eſſe chordam, ſinum, tangentem, infiniteſimam ordinis itidem primi; ſinum verſum, exceſſum ſecantis ſupra radium, ſecundi; differentiam inter ſinum, chordam tangentem arcum tertii; differentiam inter ſinum verſum, & exceſſum ſecantis ſupra radium quarti. Hæc autem cum plurimis ejuſmodi, quæ pertinent ad curvarum arcus infiniteſimos, & quantitates ab iis pendentes, quæ ad quantitates in triangulo quovis habente angulum infiniteſimum inter ſe connexas, & alia ejuſmodi, ut plura itidem definitionis conſectaria, pertinent ad elementa infiniteſimorum, quæ quarto nondum edito elementorum tomo tradam omnia.

538 Præmiſſis notionibus hoc theorema facile demonſtratur. Quantitates finitæ, & in ſe determinatæ eam habent rationem inter ſe accuratè, quæ in iis invenitur, contemptis quibuſcumque quantitatibus, quæ reſpectu earum ſint infiniteſimæ ordinis cujuſcumque. Id theorema abunde demonſtravi primo meorum elementorum tomo, ubi de ſolidis, num. 115, & demonſtratio inde petitur, quod error, ſi quis eſſet deberet eſſe in ſe determinatus, & finitus, qui vero oriretur ex infiniteſimorum contemptu, decreſceret cum ipſis ultra quoſcumque limites ad arbitrium; qui proinde decreſceret etiam infra illum limitem erroris verè exiſtentis, quod eſt abſurdum; eſſet enim ipſi æqualis ſimul, & ipſo minor, unde eruitur errores omnes ex ejuſmodi contemptu ortos, ſe mu-

tuo

tuo debere deſtruere. Demonſtratur autem, id accidere, ubicumque quantitates ordinum inferiorum reſpectu quantitatum ordinum ſuperiorum contemnuntur. Sed cavendum, ne id, quod contemnitur, habeat aliquid connexum ſecum ordinis ſuperioris, quod ſimul contemnatur, vel ne id, reſpectu cujus contemnitur, evaneſcat, vel ad ordinem inferiorem deprimatur. Quo caſu in errores inciditur.

F.30 539 Primi generis errorem committit, qui ex eo, quod in fig. 30 corpus perpetuo ſollicitatum ad F in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, ac projectum per *AD* debeat deſcribere ellipſim *ABPbA*, quæ evaneſcente velocitate *AD*, abeat in rectam *AP*, puncto ipſo *P* abeunte in focum F, deducit illud, corpus ipſum ſibi relictum in *A* ſine ulla projectione, debere a centro virium F retro reflecti, & ad *A* regredi, quod, ut notavi in diſſertatione de motu corporis attracti in centrum immobile &c., Eulerus in ſua Mechanica præſtitit. Nam ubi arcus *GPg* decreſcit in infinitum, ac demum evaneſcit, vires per ipſum, quæ deſtruunt velocitatem deorſum, & producunt æqualem ſurſum, augentur in infinitum. Quare eo arcu contempto, contemnitur infinita illa vis, quæ velocitatem deorſum in infinitum auctam extinguat, & æqualem contrariam progignat. Secundi autem generis exemplum ſæpe occurrit in quæſtionibus de maximis, & minimis, cujuſmodi errorem exhibui in ipſa diſſertatione de natura, & uſu infinitorum, & infinitè parvorum. Sed exemplo eſſe poteſt ipſe error Keillii, de quo egimus num. 505 qui ob arcus infiniteſimi differentiam a chorda infinities minorem ſe, etiam differentiam virium reſpectivarum in arcu & chorda contemnit reſpectu totius vis. Perperam quidem; nam reſpectu ejus in arcu infiniteſimo diſtante finito intervallo ab imo puncto eſt infinities minor; ſed ubi ipſe arcus infiniteſimus eſt in fundo illo, evadente ipſa vi per chordam infiniteſima, differentia ejuſmodi toti vi æqualis evadit, ut eruitur e n. 506.

540 Si adhibeantur hujuſmodi cautiones, methodus rite procedit, & Veterum methodos exhauſtionum contrahit. Ipſi quantitates comparandas indebant ſingulas inter binas quantitates alteram majorem, alteram minorem, tum priorem alterius priori alterius, & poſteriorem poſteriori æqualem demonſtrabant, ac differentiam inter priorem, & poſteriorem ad arbitrium minui poſſe demonſtrabant, unde eruebant per reductionem ad impoſſibile, debere æquales eſſe etiam illas intermedias. Sic ut aream circuli demonſtrarent æqualem rectangulo ſub dimidia peripheria, & radio, aſſumebant hinc poligonum regulare circulo circumſcriptum, & poligonum inſcriptum, laterum numero indefinito, inde rectangulum ex dimidia perimetro circumſcripti & inſcripti in diſtantiam lateris cujuſvis a centro; & demonſtrata æqualitate poligoni utriuſlibet cum ſuo rectangulo, incluſione circuli inter poligona, rectanguli, illius circularis inter illa poligonorum rectangula, acceſſu poligoni ad poligonum ultra limites quoslibuerit, deducebant æqualitatem circuli cum illo ſuo rectangulo.

541 In methodo infiniteſimali ſatis eſt, binas invenire quantitates, quæ ab iis binis, quas comparamus, differant quantitatibus infiniteſimis, & harum relationem ad illas tuto transferimus, licet ne cogitemus quidem, an differentia, quæ contemnitur, quantitates propoſitas augeat, an minuat certi nimirum generali illa reflexa ratiocinatione, utramque vel augeri, vel minui æque quidem, ubi de æqualitate agitur, in eadem vero ipſarum ratione, ubi de ratio-

ne

ne quapiam, ſine ullo erroris periculo, erroribus ſe neceſſario penſantibus ex eo ipſo, quod ſi qui ſint, debeant in infinitum decreſcere ad arbitrium noſtrum, qui infiniteſimas quantitates poſſumus minuere, quantum libet.

542 Jam vero, ubi aliqua quantitas perpetuo creſcit, vel minuitur, deſignari ſolet per extremas litteras x, y, z, liberum autem eſt per quaſcumque. Concipiuntur ipſarum incrementa vel decrementa infiniteſima, *infiniteſimis tempuſculis* debita, quæ appellantur differentiæ, & notantur characteriſticâ d, ut ſit dx differentia infiniteſima ipſius x, dy ipſius y, nec illud d exprimit novum valorem, per quem x, vel y multiplicetur, ſed totum ſignum dx, vel dy ſimul ſignificat unicum ſimplicem valorem illius differentiæ. Angli deſignare ſolent puncto ſuperpoſito ſic $\dot{x}$, $\dot{y}$. Differentia inter binas differentias debitas binis tempuſculis ſibi ſuccedentibus certa lege exprimitur replicata littera d ita ddx, ddy, & ita porro. Angli exprimunt ſic $\ddot{x}$, $\ddot{y}$. Summa e contrario omnium differentiarum finito tempore collectarum exprimitur littera S. ſic $S.\,xdx$ ſignificat ſummam ex omnibus productis x in ſuas dx.

543 Hinc primum calculi generale problema directum in eo ſitum eſſe debet, *ut exhibita quavis formula, quæ variabiles quantitates contineat, differentiis ſingularum eo modo notatis, inveniatur totius formulæ differentia per illos ipſos valores, quos formula exhibet, & eorum differentias eo modo notatas*. Id pertinet ad calculum differentialem. Deinde alterum inverſum, ut *data quavis formula, quæ differentias contineat, inveniatur formula, cujus illa ſit differentia*, quod pertinet ad calculum integralem. Si ea problemata generaliter ſolvi poſſent (primi autem jam ſolutionem habemus, ſecundi nondum accepimus, & licet ejus ſolutio in dies magis extendatur, plenam ego quidem ipſius ſolutionem non ſpero, niſi forte per ſeries infinitas, ut in numeris poteſtatem quamvis cujuſvis numeri facile efformamus, radicem ſine ſerierum infinitarum uſu habere non poſſumus); calculum utrumque perfectum haberemus, abſolutumque. Porro ſi hiſce binis problematis adjiciantur eorum uſus multiplices in Geometria potiſſimum, & Mechanica, in quibus certa quædam artificia adhibenda ſunt ad calculum inſtituendum, ac alia plura ab ingenioſiſſimis viris excogitata ad calculum contrahendum, vel faciliori tractationi diſponendum; integra utriuſque calculi elementa obtinentur, quæ ego quidem ſexto reſervavi meorum elementorum tomo, poſt expoſitam in quinto applicationem Algebræ ad Geometriam, & ſerierum infinitarum naturam.

544 In ſolutione primi problematis, quædam quantitates contemni ſolent, reſpectu aliarum, reſpectu quarum infinities minores ſunt. Exemplo ſit differentia quadrati, & cubi. Creſcat x per dx, & ad habendum incrementum quadrati x^2, debet ab $(x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + dx^2$, auferri x^2, & relinquitur $2xdx + dx^2$, quæ eſt differentia ipſius quadrati. Ad habendum autem incrementum cubi, debet ab $(x + dx)^3 = x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$ auferri x^3, & relinquitur $3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$. Sed quoniam eſt $1 . dx :: dx . dx^2 :: dx^2 . dx^3$, termini, in quibus habetur dx^2, & dx^3 ſunt ordinum inferiorum reſpectu termini, in quo adeſt tantum dx. Idcirco reliquis terminis contemptis, adhibetur pro differentia quadrati $2xdx$, cubi $3x^2dx$, & ſimili methodo generaliter pro differentia potentiæ m ſive x^m, aſſumitur $mx^{m-1}dx$.

545 Newtonus hunc contemptum evitat in formula quadrati, concipiendo

valorem x augeri ab $x-\frac{1}{2}dx$ ad $x+\frac{1}{2}dx$, quo pacto differentia ipſius valoris x eſt dx, & valoris x^2, habetur a quadrato $x+\frac{1}{2}dx$ auferendo quadratum $x-\frac{1}{2}dx$, ſive ab $x^2+xdx+\frac{1}{4}x^2$ auferendo $x^2-xdx+\frac{1}{4}x^2$; quo pacto remanet $2xdx$ accuratè pro differentia. At in cubo adhuc aliquid contemnitur, cum $(x+\frac{1}{2}dx)^3-(x-\frac{1}{2}dx)^3$ fit $(x^3+\frac{3}{2}x^2dx+\frac{3}{4}xdx^2+\frac{1}{8}dx^3)-(x^3-\frac{3}{2}x^2dx+\frac{3}{4}xdx^2-\frac{1}{8}dx^3)=3x^2dx+\frac{2}{8}dx^3$, adeoque dum accipitur $3x^2dx$ pro differentia, contemnitur $\frac{2}{8}dx^3$. Atque idem accidet in reliquis potentiis omnibus, & ubicumque plures, quam duæ variabiles quantitates multiplicantur, nec poteſt ſine contemptu aliquo ejuſmodi generalis expreſſio differentiæ inveniri in formulis compoſitis, quæ facta ſuppoſitione modi, quo mutatur quævis variabilis, formulæ cujuſvis ex variabilibus compoſitæ differentiam exhibeat.

546 Porro hic ipſe contemptus in cauſa eſt, cur minus cauti in errorem etiam incidant, cujus exemplum haberi poteſt in quæſtionibus de maximis, & minimis. Ubi quantitas perpetuo creſcens, vel perpetuo decreſcens ad eundem valorem redit, neceſſario debet in primo caſu haberi aliquod maximum, in ſecundo minimum. Quotieſcumque autem ejus differentia evaneſcit, debet redire ad eundem valorem. Quare quotieſcumque differentia evadit $=0$, debet haberi aliquod maximum, vel minimum. Hinc formula quæritur, quæ variabilis illius quantitatis valorem exprimat, cujus differentia ponitur $=0$, & ex ea poſitione definitur locus maximi, vel minimi. Accidit tamen aliquando, ut ibi nec maximum, nec minimum ullum inveniatur, quod in illa ipſa diſſertatione de natura, & uſu infinitorum, & infinitè parvorum oſtendi in geometrico quodam problemate, ac mille alia ejuſmodi exempla facile exhiberi poſſunt. Porro idcirco id evenit, quia illa, quæ aſſumitur pro differentia, non eſt accurata differentia, ſed omittuntur termini, qui reſpectu formulæ continentis ſolam dx ſunt infiniteſimi, ubicumque id, per quod multiplicatur dx, eſt quantitas finita, non purum nihil, ut eſt, ubi ipſa hæc formula ponitur $=0$. Hinc ejus ope reliqua omnia accuratè præſtantur, ut inventio tangentium, & alia ejuſmodi; at in eo caſu id, quod contemnitur, contemnitur reſpectu nihili; unde fit, ut erronea ſit tota concluſio. Quin imo mirari potius licet, qui fiat, ut ejuſmodi methodo unquam accuratè maxima, & minima determinentur, cum ibi potiſſimum, ubi formulæ inferioribus terminis mulctatæ eſt uſus; ea quæ omittuntur, non infinities minora, ſed infinities majora ſint iis, reſpectu quorum omittuntur. Sed tamen res plerumque procedit: et ſi ullum adeſt maximum, ac minimum, id exhiberi debet vel a formula illa poſita $=0$, vel ab eadem poſita infinita, quod tamen longe alia ratiocinatione ad demonſtrationem indiget; & quod pertinet ad primam partem differentiæ $=0$, ſatis luculenter expoſui in ſecundo meorum elementorum tomo §. 15.

547 Eos contemptus evitat methodus Newtoni, quam fluxionum appellant, ſaltem ut eam Mac-Laurinus propoſuit. Quantitas variabilis appellatur fluens, & fluxionis nomine intelligit Mac-Laurinus, non illam quantitatem, quæ fluendo generatur tempuſculo infiniteſimo, in quo ſenſu ſi fluxio accipiatur, ut a multis accipitur, nihil eſt aliud, niſi illa ipſa, quam differentiam alii appellant, mutato ſolo nomine, ſed velocitatem fluxus ipſius; quam itidem metitur non

non quantitate illa, quæ generatur velocitate inter generandum perpetuo mutata, ſed illa, quæ generaretur, ſi ea velocitas maneret conſtans toto tempuſculo. Hic autem analogia utitur ſemper inter hunc fluxum, & motum æquabilem, relatum ad acceleratos, retardatoſque, & ex mechanicis horum motuum legibus rem omnem ingenioſiſſimè expedit, ac formulas pro formularum fluxionibus exhibet, quæ quidem ipſi obveniunt conformes communibus in differentiali methodo adhibitis idcirco, quod celeritas fluxus infiniteſimo tempore infinitè parum mutatur, adeoque quantitas genita, ſive incrementum, vel decrementum quantitatis fluentis, infinitè parum differt ab ea, quæ haberetur in fluxu uniformi cum velocitate conſtante, & diſcrimen eſt illud ipſum, quod in communi methodo contemnitur.

548 Hinc ejus fluxionum methodus, a methodo differentiali differt ſolum in modo, quo fluxiones, & differentiæ concipiuntur, ac in applicatione ad uſus multiplices, in qua applicatione vel prævenitur contemptus ille infiniteſimalis, vel ibi admittitur, ubi lineolis, ſuperficiebus, & ſolidis infiniteſimis fluxiones deſignantur, qui contemptus in differentiali methodo fit in ipſa determinatione differentiæ pertinentis ad formulam compoſitam erutæ e differentiis ſimplicium. Cæterum calculus omnis eodem modo peragitur, & quæ altera methodo inventa ſunt, poſſunt ſemper aliquo ambitu, & eorum, quæ neglecta ſunt, notatione diligenti ad alteram methodum traduci.

SUPPLEMENTUM AD LIBRUM TERTIUM.

§. I Ad notam in verſum 198 DE RECTA, ET VARIIS CURVARUM GENERIBUS.

549 QUÆ de rectæ lineæ, & curvarum natura Noſter hinc innuit uſque ad verſum 252, partim expoſui in notis, partim attigi in Supplem. lib. 1, ſed plura hic dicenda ſuperſunt, quæ utrobique promiſi.

550 Rectam lineam rectæ congruere totam toti in infinitum productam, ſi bina puncta alterius binis alterius congruant, patet ex ipſa admodum clara rectitudinis idea, quam habemus; & ſi finitæ lineæ ſint, ac ipſarum extrema congruant; æquales eſſe, conſtat ex idea ipſa magnitudinis, & æqualitatis; e contrario verò ſi æquales ſint, debere congruere totam toti, dummodo initia congruant, & directio ſit eadem, conſtat ex notione totius, ac partis; ſi enim altera ultra alteram procurreret, altera alterius parti congrueret, & æquaretur, adeoque pars itidem æqualis eſſe deberet toti.

551 Porro inde etiam circulorum radios æquales habentium congruentia conſequitur ſuperpoſitis centris. Radii enim illi æquales in quacumque directione aſſumantur, ſibi invicem debent congruere, cum alter ultra alterum procurrere nequaquam poſſit. Hinc ex rectarum congruentia etiam circulorum æqualium congruentia derivatur, quorum arcus, binis congruentibus punctis, ſi ad eandem plagam curvatura jaceat, congruentibus neceſſario etiam centris, congruunt. At poſſunt arcus ipſorum æquales jacere ad partes oppoſitas chordæ bina puncta congruentia jungentis, ut in fig. 60 *ADB*, *AdB*, ſine congruentia, quæ proinde in circulo eſt minor; & idcirco circulus, qui minore congruentia eſt præditus, quam recta, ac ipſam congruentiam ab illius congruentia derivat, minus ſimplex videtur nobis, quam ipſa. Simplicior tamen, quam reliquæ curvæ omnes, apparet, quod quivis ejus arcus cuivis alteri æquali poſſit congruere, ſecus, ac in omnibus reliquis curvis accidit, in quibus certi arcus tantummodo certis aliis accuratè ſuperponi poſſunt, ut congruant.

F. 60

552 Cæterum ab hac congruentia rectæ lineæ, & circularis arcus, ex qua poſteriore angulorum æqualium congruentia conſequitur, derivari univerſam Geometriam ope principii, æqualibus æqualia addendo, vel auferendo, æqualia remanent, patebit ſane cuilibet, qui ipſa Euclidis elementa evolvat. Nam primum quidem theorema, quod eſt propoſitio 4 lib. 1, binorum triangulorum bina latera æqualia habentium cum angulo intercepto æquali, & idcirco æqualium, ab hac ipſa congruentia pendet totum, a qua reliqua omnia pendent, quæ conſequuntur, vel ad quam facile reducuntur; donec ad parallelarum proprietates deveniatur, quæ quidem idcirco accuratè ex aliis principiis demonſtrari non poſſunt, ſed aliquid neceſſario aſſumi debet, ut per ſe notum, quemadmodum Euclides aſſumpſit, rectas, quæ duos internos angulos ſimul minores efficiant duobus rectis, debere aliquando congruere, ego vero in meis elementis rectas parallelas debere ſupra tertiam rectam quamcumque æquè inclinari, quod quidem expertus ſum Tyronibus protſus perſpicuum.

553 Ubi

553 Ubi ad parallelogrammorum æqualitatem ſupra æquales baſes, & intra eaſdem parallelas devenitur, tum vero bina triangula demonſtrantur æqualia per ſuperpoſitionem, & congruentiam, ob terna latera, vel bina latera cum uno angulo æqualia, deinde ablato prius communi, ac alio addito, devenitur ad æqualitatem eorum, quæ congruere non poſſunt, ſed communi ablato prius, tum alio communi addito, ad congruentiam itidem reducuntur. Inde æqualitates aliæ plures inter parallelogramma ſuper baſibus æqualibus, ac triangula ſuper iiſdem, vel æqualibus baſibus deducuntur. Ipſa Pythagorica illa quadrageſima ſeptima propoſitio partim æqualitate triangulorum, quæ poſſint congruere, partim parallelogrammorum, & triangulorum ſuper eadem baſi inſiſtentium æqualitati a congruentia itidem derivatæ innititur.

554 Et ſane, ſi libeat univerſa Geometriæ elementa conſiderare; ſummus ubique congruentiæ hujuſce, vel veritatum per ipſam erutarum uſus apparet, qui ubicumque nos deſerit, ibi per ambages longiſſimas, & admodum implexas eſt iter.

555 Hinc autem ipſas curvas exigimus ad rectas, & quarum natura rectarum ope certis quibuſdam earundem relationibus exprimi poteſt, eæ dicuntur Geometricæ; quæ ejuſmodi relationes reſpuunt, Mechanicæ a Carteſio ſunt dictæ, & e Geometria eliminatæ; nunc autem protenſis Geometriæ finibus, illæ algebraicæ dicuntur, hæ tranſcendentes, & illæ his videntur longe ſimpliciores.

556 Relatio illa hoc modo fit. Aſſumitur recta ad arbitrium indefinita, ut in fig. 50 recta AR, quam axem appellare ſolent, in qua punctum ad arbitrium F.49
aſſumptum eligitur, ut ibidem A: tum e quovis puncto curvæ, ut q, ducta 50
in dato angulo recta ad illam rectam, ut qE, hanc appellant ordinatam, & 51
ſegmentum axis intercceptum inter hanc, & illud punctum aſſumptum, dicunt abſciſſam. Mutata abſciſſa, mutatur itidem ordinata, ſed mutatur certo quodam nexu, qui per algebraicam in algebraicis curvis, quam dicunt æquationem, exprimitur, ope formulæ, quæ binas illas variabiles rectas contineat, & alias conſtantes quaſcumque, quas dicunt parametros.

557 Sic in parabola quoniam (num. 471) eſt $Eq^2 = AE \times AB$, ſi dicatur $AE = x$, $Eq = y$, $AB = a$, erit $yy = ax$, quæ eſt æquatio ad parabolam. At in fig. 49 in ellipſi, ſi dicatur $AP = a$, $AB = b$, $EQ = y$, $AE = x$, adeoque $EP = a - x$, cum ſit (num. 471) $AP . AB :: AE \times EP . Eq^2$, erit $a . b :: ax - xx . yy$, & $yy = bx - \frac{b}{a}xx$, quæ eſt æquatio ad ellipſim; ac eodem pacto in hyperbola figuræ 51, in qua $EP = a + x$, inveniretur æquatio $yy = bx + \frac{a}{b}xx$.

558 Simili ratione ex diverſarum curvarum natura diverſæ oriuntur æquationes, quæ omnes conſtant diverſis relationibus abſciſſæ, & ordinatæ, quæ nimirum variatis curvæ punctis variantur, & aliarum rectarum conſtantium. Eæ autem ſublimiores cenſentur, quæ valores illos x, & y ad altiorem graduum aſſurgentes habent in æquatione ſua, computata ſumma graduum utriuſque in eodem termino æquationis. Ubi æquatio continet tantum x, & y ſeorſum ſumptas, vel ſolis conſtantibus utcumque permixtas, dicitur primi gradus, & ea ad rectas tantummodo pertinet; ubi occurrit vel x^2, vel y^2, vel xy, utcumque conſtantes permixtæ ſint, dicitur æquatio ſecundi gradus, & per-

pertinet ad curvas primi generis, ac illud demonſtratur generaliter, quamcumque ex æquationibus ſecundi gradus, niſi impoſſibilitatem involvat aliquam, ſectionis conicæ cujuſpiam, ipſo etiam circulo conicis ſectionibus adnumerato, exprimere naturam. Si adſit aliquis e ſequentibus terminis x^3, x^2y, xy^2, y^3; eſt gradus tertii, quæ curvam aliquam ſecundi generis exprimit. Si adſit aliquis e ſequentibus x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4; æquatio eſt gradus quarti & curvam exhibet generis tertii, atque ita porro.

559 Eas vero curvas, quæ omnes omnino ejuſmodi gradus tranſcendunt ita, ut nulla finita æquatio relationem exprimat abſciſſæ & ordinatæ, tranſcendentes appellant, quarum tamen innumeras ope differentialis, & integralis calculi ad alterius generis æquationes reducunt, differentiis conſtitutas variabilium, & differentiarum ſummis, cum variabilibus ipſis, & cum conſtantibus utcumque commixtis, in quibus ipſis ordines diverſi, & genera in infinitum multiplicantur, neque novit natura limitem.

560 Jam vero in algebraicis curvis, ope æquationum harum ea, quæ pertinent ad rectas tangentes, normales, & alia pleraque, immediatè etiam, & facile eruuntur. Quin imo, quod pertinet etiam ad ipſarum curvarum interſectiones mutuas, expeditur facile; & generaliter demonſtratur non illud tantummodo, quod in nota innui, quamvis curvam ejuſmodi in certo numero punctorum a recta aliqua ſecari poſſe, qui numerus eſt ille idem, qui æquationis gradum exprimit, vel is, qui exprimit genus curvæ, ſed unitate auctus; verum etiam curvam cujuſvis gradus ab alia curva gradus alterius ſecari poſſe in totidem punctis, quot exprimit numerus, qui obvenit, ſi numeri exprimentes gradus æquationum inter ſe multiplicentur; ut curvam primi generis, ſive ſecundi gradus ab alia ejuſdem gradus, nimirum ſectionem conicam a ſectione conica, in 2×2, nimirum 4, curvam tertii gradus a curva quarti in 3×4, ſive 12, & ita porro. Sed id ipſum demonſtratur rectarum ope, quærendo, ubi abſciſſæ eidem poſſit eadem ordinata reſpondere.

561 Ubi autem, vel arearum curvilinearum quadratura, vel arcuum rectificatio inveſtigatur, omni immediata ſuperpoſitione impedita ſummotis rectis, mirum quantis ambagibus eſt opus, per rectas itidem, ope inſcriptorum, & circumſcriptorum, ubi lateribus in infinitum multiplicatis, ad illa, quæ inveſtigantur, in infinitum acceditur, quibus Recentiores, infiniteſimali methodo ordinatâ, rectas ſubſtituunt, dum arcus curvarum infiniteſimos pro rectis habent.

562 At ſiqua mens a noſtrâ admodum diverſa, aliquam alicujus curvæ lineæ proprietatem intueretur, ut nos rectæ lineæ congruentiam, ipſam autem congruentiam rectæ non videret; næ illa longe alia ratione elementa ſuæ Geometriæ ordinaret, & longe alias relationes inveſtigaret, ut innui in ipſis notis.

563 Caeterum ſi animum ab ea rectæ lineæ proprietate abſtrahamus, conſtabit ſane, rectam ipſam quodammodo multo complicatiorem eſſe, quam ſit circulus, vel ovalis quæcumque linea, quæ in orbem redeat. Recta enim linea natura ſua in infinitum utraque ex parte excurrit, & plurima infiniti myſteria ſecum trahit, quæ ego quidem in abſurda etiam deſinere demum arbitror, ut abunde expoſui in diſſertationibus de natura, & uſu infinitorum, & infinitè parvorum, de transformationibus locorum geometricorum, & de continuitatis lege. E tot myſteriis unum hic inpuam.

F.61 564 Sit recta *AB* in fig. 61., quæ concipiatur, ſi fieri poteſt, in infinitum utrin-

utrinque producta, & extra ipſam punctum *C*, per quod tranſeat recta itidem infinita *FG*, ac circa ipſum centrum *C* ſit circulus, cui recta *CD* perpendicularis ad *AB* occurrat in *K*, & *I*, recta vero *FG* in *Q*, & *P*, & recta *LM* parallela *AB* in *N*, & *O*. Gyret jam recta *FG* circa *C*, deſcribentibus punctis *Q*, *P* ejus circuli peripheriam, & defigatur mentis acies in punctum *H*, in quo eadem recta ipſi *AB* occurrit.

565 Ubi *FG* eſt perpendicularis ad *AB*, puncta *P*, *Q*, ſunt in *K*, *I*, & *H* in *D*. Abeuntibus *P*, *Q* per quadrantes *KO*, *IN*, recedit *H* a *D* verſus *B* in immenſum, nec ulla eſt diſtantia ita magna a *D*, ad quam aliquando non devenIat, & quam non tranſgrediatur. Iis appellentibus ad *O*, & *N*, evadit *FG* parallela *AB*, & illa interſectio *H*, quodam infiniti veluti pelago abſorpta delitescit, & nuſquam jam eſt. At unico temporis momento in infinito moratur interſectio ipſa, ac deeſt. Progredientibus enim punctis *P*, *Q*, per arcus *OI*, *NK* in *p*, *q*, & abeunte recta *GF* in *gf*, jam illa interſectio *H*, quæ ex parte *B* per omnes finitarum diſtantiarum magnitudines receſſerat, ex infiniti parte oppoſita *A*, per omnes itidem finitarum diſtantiarum magnitudines regreditur, donec abeuntibus *p*, & *q* in *I*, & *K* redeat ad *D*, eandem iterum viciſſitudinum ſeriem obtentura ita, ut in ſingulis rectæ *FG* converſionibus bis per infinitum tranſeat ex altera parte in oppoſitam, quaſi infinitum ex parte *B* ratione quadam nobis impervia, cum infinito ex parte *A* connecteretur quodammodo, & in infinitis illis oppoſitis diſtantiis convenirent ambo, rectâ lineâ, ut quodam infinito circulo, in illa infinita diſtantia redeunte in ſeſe.

566 Porro licet ovalis quævis, ex ipſa geometricæ continuitatis natura infinitis in ſeſe redeat ſpiris, nuſquam verum initium nacta, nuſquam finem; adhuc tamen tota non mentis tantummodo, ſed hiſce ipſis frontis oculis patet, & unico intuitu tota conſpicitur; dum recta linea infinitis illis veluti cruribus in immenſum ſine ullo ſine protracta non oculis hiſce tantum ſubducitur, ſed etiam menti; niſi forte & impoſſibilis omnino ſit tota, ut argumenta in memoratis diſſertationibus meis expoſita mihi ſuadent; uſque adeo non eſt ſimpliciſſima inter omnia linearum genera certa conſtantium natura, ſed etiam earum plurimis complicatior multo, & fortaſſe etiam tota, quanta eſſe poteſt, omnino impoſſibilis.

ʃ. II. Ad notam in verſum 242

DE GEOMETRICIS, ET MECHANICIS PROPRIETATIBUS CYCLOIDIS.

567 Cycloidis naturam, & geometricas, ac mechanicas proprietates pleraſque Noſter perſequitur uſque ad verſum 385. Eas geometrico rigore demonſtrabo hic methodo ope infiniteſimalium quantitatum contractiore multo, quam in ejus curvæ elementis præſtiterim, quæ in notis innui. Porro licet ipſa, ut jam videbimus, in tranſcendentium curvarum numero ſit, adhuc tamen ob ſummam cum circulo, ex quo oritur, & recta affinitatem multo notior eſt nobis, & tractatu facilior, quam aliæ plurimæ ex ipſis algebraicis curvis.

568 Super recta indefinita *NO* in fig. 62 revolvatur circulus *KEI*, qui eam contingat perpetuo ita, ut ejus arcus quivis *EI* æquetur rectæ interceptæ inter puncta *A*, *I*, in quibus extrema puncta ejuſdem arcus ab ea recta contingun- F. 62.

tur,

tur, lineam $AECB$, quam in eo motu deſcribit punctum ejus quodlibet E, dico cycloidem, partem AB rectæ datæ interceptam inter binos contactus ejuſdem puncti E digredientis ab ea in A, & regredientis ad ipſam in B, dico ejus baſim, rectam DC mediæ baſi perpendicularem uſque ad cycloidis perimetrum, dico ejus axem, circulum illum mobilem ejus genitorem.

569 Facile patet baſim totam AB æquari debere peripheriæ circuli genitoris, qui in medio curſu habebit pro diametro ipſum axem DC, puncto E abeunte tum in C. Quare habebitur hoc theorema. *Baſis cycloidis æquatur peripheriæ circuli genitoris, axis vero diametro, ſive binis radiis.* Id Noſter exhibet a verſu 285 ad 289, expoſita in ſuperioribus geneſi ipſius cycloidis.

570 Hæc curva licet videatur conſtare arcu quodam finito ACB, tamen revera natura ſua utrinque in infinitum protenditur arcubus ſimilibus MA, BL numero infinitis. Nam circuli illius motus in infinitum utrimque continuari poteſt, & tota recta in infinitum utrinque producta ſimplicis naturæ eſt, ut & circulus totus in ſe ipſum infinitis veluti ſpiris circumvolutus. Hinc recta linea ita parum ad baſim inclinari poteſt, ut toti illi ſinuatæ perimetro in quovis dato punctorum numero occurrat, & ſi ipſi baſi parallela ſit, nec ab ea magis diſtet, quam per DC, ipſi in infinitum continuatæ in infinitis punctis occurrit. Idcirco Cyclois eſt curva tranſcendens, nec ejus natura per ullam finitam æquationem exprimi poteſt. Sed nos hic reliquis arcubus omiſſis, unicum ACB binis contactibus ejuſdem puncti interceptum appellabimus Cycloidem.

571 Si recta ex E parallela baſi occurrat diametris IK, DC in G, & H, & circulo DFC ad partes E in F, erit, ut facile patet, arcus DF æqualis $IE = IA$. Cum igitur ſemiperipheria DFC ſit (num. 569) $= DA$, erit arcus $CF = DI = HG$, ſive ob ſinus HF, GE æquales $= FE$. Hinc ſi circulum CFD habentem pro diametro axem DC impoſterum appellemus circulum genitorem, eruitur hoc theorema. *Si e quovis puncto F circuli genitoris ducatur recta FE ad partes ejus diametro oppoſitas, uſque ad cycloidem, erit arcus CF = FE.*

F.63 572 Compleatur in fig. 63 rectangulum $CDAI$, & fiat ſemicirculus API ad partes oppoſitas CD, cui recta per centrum circuli genitoris ducta baſi parallela occurrat in P, atque eadem arcui cycloidis in O, ſemicirculo genitori in N, ac ad æquales diſtantias ab M hinc, & inde ſint bina puncta H, H, & iis infinite proxima h, h', ac rectæ ex iis parallelæ baſi occurrant circulo genitori in F, F', f, f', cycloidi in E, E', e, e', rectæ AI in G, G', g, g', ſemicirculo API in L, L', l, l'; & ob $GL = HF$, patet, fore $FL = HG = DA = DFC$. Cum igitur ſit (num. 571) $CF = FE$, erit $EL = DF = CF' = F'E'$, & eodem argumento $FE = E'L'$. Hinc areola $FEef = L'E'e'l'$, & $ELle = F'E'e'f$. Quare tota area $DNOA = OPIC$, & area $OCN = OAP$; adeoque trilineum $AOCND =$ trilineo $APICO$, dimidium totius quadrilinei $APICND$, ſive, dempto & addito ſemicirculo, rectanguli $AICD$ ſub dimidia baſi AD, & axe DC, nimirum (num. 569) ſub dimidia peripheria & tota diametro, quod rectangulum eſt areæ circuli genitoris duplum ex geometria. Evadit igitur trilineum $AOCND$ æquale areæ circuli genitoris, & trilineum ſimile DCB alteri circulo, quibus addita circuli genitoris area, habetur hujuſmodi theorema. *Area cycloidis æquatur triplæ areæ circuli genitoris.* Id Noſter expreſſit a verſu 308.

F.64 573 Ducantur jam in fig. 64 ad bina puncta F, f infinite proxima binæ chor-

chordæ CF, Cf circuli genltoris, quarum prior rectæ ef occurrat in I, ipſæ autem EF, ef productæ occurrant circulo genirori ex parte oppoſita in L, l, & per Ee ducatur recta NEM. Quonlam angulum fFI metitur dimidius arcus Cl, & dimidius CL, ſive CF angulum CFL, adeoque & al num FIf, erunt in triangulo FIf binl angull ad F, & I æquipollenter æquales, & fI erit æquipollenter æqualls chordæ Ff, adeoque & arcui FI. Quare cum ef æquetur arcui fC, tota eI haberi poterit pro æquall arcui CfF, ſive rectæ FE. & proinde Ee pro parallela FI, ad cujus poſitionem accedet in infinitum, & in eam deſinet, accedente e ad E, ac f ad F, & deſinente in ipſum. Cum igltur, ubl e abit in E, evadat NM tangens cycloidis, habebitur hujuſmodi theorema. *Si recta baſi parallela determinet puncta* E, *&* F *cycloidis, & circuli genitoris, erit* NEM *tangens cycloidis parallela chorda* CF *ejus circuli*.

574 Si centro C intervallo Cf ducatur arcus circuli occurrens rectæ CF in O, haberi poterlt pro perpendicularl ad baſim FI trianguli FfI iſoſcelii, quam idcirco ſecabit bifarlam. Cum igltur Ee æquetur FI ſibi parallelæ parallelis iiſdem concluſæ, erit Ee dupla FO exceſsûs chordæ CF ſupra Cf = CO. Quare cum totus arcus CE componatur ex omnibus arcubus eE, & chorda CF ex omnibus ejuſmodi exceſſibus cujuſvis chordæ ſequentis ſupra præcedentem, habebitur hujuſmodi theorema. *Arcus* CE *eſt duplus chordæ* CF, *arcus* CEA *duplus diametri* CD, *& tota perimeter* BCA *quadrupla diametri circuli genitoris*, quod poſtremum Noſter expreſſit a verſu 309 ad 312.

575 Convertatur jam cyclois, ut in fig. 65 vertex D deorſum ſpectet, manente AB horizontali, & in quovis puncto E, habebitur vis gravitatis reſpe- F.65
ctiva urgens ad deſcenſum obliquum per canalem ejus formæ eadem, quæ eſſet in plano tangente EM, ſive in plano FD ipſi parallelo (num. 573), quæ ſi gravitas abſoluta exponatur per CD, ac reſolvatur in duas per CF, FD, erit ut FD, alterâ ut CF urgente ipſam cycloidem normaliter. Erit igitur vis reſpectiva accuratè, ut arcus ED duplus ipſius chordæ FD, nimirum, ut arcus percurrendus. Quare ut ſupra num. 181 & 530, eruitur hoc theorema: *tempus deſcenſus per arcum cycloidis ex altitudine quacumque uſque ad punctum infimum, eſt ſemper idem, & velocitas in fine, ut ipſe arcus deſcriptus*. Id Noſter expreſſit a verſu 313 ad 326.

576 Tempus abſolutum deſcenſus ſic invenietur. Eſt per num. 183 tempus, quo percurritur ſpatium AED vi accelerante motum proportionali diſtantiæ a puncto infimo D, ad tempus, quod inſumeretur in motu uniformi per ldem ſpatium cum velocltate finali, ut eſt dimldia perlpheria clrcull ad dlametrum: tempus hujus motus uniformis cum velocitate finali eſt duplum (num. 75) temporls, quod inſumeretur in percurrenda altltudine CD cum eadem velocitate finali, ob AD duplam CD, & tempus hoc hujus ſecundi motus æquabilis, eſt (num. 169) dimidium temporis, quod impenditur in motu uniformiter accelerato per CD, cul idcirco æquale remanet tempus, in primo illo motu uniformi, & habetur hoc theorema: *tempus deſcenſus per arcum quemvis cycloidalem uſque ad punctum infimum ad tempus caſus liberi perpendicularis per diametrum circuli genitoris eſt, ut dimidia circuli peripheria ad diametrum*. Id Noſter expreſſit a verſu 327 ad 330.

577 Quoniam tempus deſcenſus per arcum circuli exiguum ad tempus per diametrum eſt proxime (num. 531) ut quadrans peripheriæ ad ipſam diame-

trum, eruitur hoc theorema. *Tempus deſcenſus per arcum cycloidis eſt proximè duplum temporis deſcenſus per arcum minimum circuli genitoris*. Id Noſter expreſſit a verſu 331 ad 334.

578 Operioſior eſt aliquanto demonſtratio tautochroniſmi cycloidis, quem Noſter exprimit a verſu 335 ad 354. Adhuc tamen & ipſum ſic expedicmus. In primis proponatur hujuſmodi problema. *Debeat mobile quoddam*
F.66 in fig. 66. *ex E abire ad L ita, ut exiſtentibus AB, CD, GH parallelis, velocitas ipſius inter priores duas ad velocitatem inter poſteriores ſit in quavis ratione data; & quæratur via breviſſimi temporis*. Quoniam ibi tempus a decreſcendo tranſit ad creſcendum, habebuntur binæ viæ *EPL*, *Epl* infinitè proximæ inter ſe, quæ idem tempus requirant. Centris *L*, *E* ſint arcus minimi *PM*, *pm*, qui aſſumi potcrunt pro rectis lineis, & proinde aſſumpto *Pp* pro radio, erunt *Pm*, *pM*, ſinus angulorum *Ppm*, *pPM*. Ducta autem *IPK* perpendiculari ad *CD*, eſt angulus *Ppm* complementum *pPm*, adeoque æqualis *EPI*; & ob *pPK*, *MPL* rectos æquales, dempto communi *MPK* eſt *pPM* = *LPK*, adeoque *Pm*, *pM*, ut ſinus angulorum *EPI*, *LPK*. Porro tempus per *Em*, & *Ep* æquales idem erit, itidem tempus per *LM*, *LP*. Hinc tempus quoque per *Pm* æquale tempori per *pM*, ac proinde (num. 75) *debebunt eſſe velocitates*, ut ſpatia *Pm*, *pM*, ſive *ut ſinus angulorum EPI*, *LPK*, *quos bina via continent cum perpendiculari ad rectam dirimentem media*.

F.67 579 Jam vero concipiatur in fig. 67 ſeries continua planorum cycloidem *AGD* tangentium, quorum bina ſint *EP*, *PL*, & concipiatur, ſpatia omnia clauſa rectis parallelis baſi *EF*, *PI*, tum *PI*, *LK* debere percurri velocitatibus, quæ habentur in punctis contactuum *G*, *g*, poſt deſcenſum ex altitudine *AC*, ac rectæ itidem parallelæ baſi ex *G*, *g* occurrant circulo in *M*, *m*, diametro *CD* in *H*, *h*, ducanturque chordæ *CM*, *Cm*, *DM*, *Dm*. Erit (n. 573) *EP* parallela *DM*, *PL* parallela *Dm*, adeoque cum recta perpendiculari rectæ *PI* continebunt angulos æquales angulis *CDM*, *CDm*, quorum ſinus ſunt, ut *CM*, *Cm*. Eſt autem (num. 518, & 166) velocitas in *G* ad velocitatem in *g* in ratione ſubduplicata altitudinum *CH*, *Ch*, ſive ob chordas *CM*, *Cm* medias inter ipſas *CH*, *Ch* & eandem *CD*, ut ipſæ chordæ *CM*, *Cm*, nimirum ut illi ſinus. Igitur hæc eſt via breviſſima cum illis velocitatibus inter illas rectas parallelas. Multiplicetur rectarum numerus in infinitum, ut jam deſinant in cycloidem motu continuò accelerato deſcriptam, & via omnis ab ejus puncto *A* ad quodvis punctum datum ipſius *g*, erit via breviſſimi deſcenſus, in quam nimirum ſeries illa viarum ad breviſſima tempora requiſitarum tandem deſinit.

580 Quod ſi datis in fig. 68 binis punctis *A*, *E*, quæratur cyclois illa, quæ
F.68 in *A* incipiat, & tranſeat per *E*, ſic facile invenitur. Deſcribatur ex *A* baſi *Ab* horizontali quævis cyclois *Adb*. Ducatur *AE*, quæ ipſi alicubi occurret in *e*, niſi punctum *E* ſitum fuerit ſupra horizontem *Ab*. Sumatur *AB* ad *Ab*, ut eſt *AE* ad *Ae*, ac baſi *AB*, circulo, cujus radius ad radium prioris ſit in eadem ratione, fiat cyclois, quæ quoniam priori erit ſimilis, abſcindet a recta *Ae* ſegmentum, quod ad ipſam ſit, ut eſt *AB* ad *Ab*, adeoque tranſibit per *E*.

581 Hac cycloidis proprietate pulcherrima comprobata per obſervationes a verſu 368 ad 379, inde ad verſ. 385 addit Noſter aliam proprietatem a Parentio detectam, quod nimirum arcus cycloidis ubique æque prematur vi compo-

ſita.

ſita ex gravitatis parte perpendiculari, & vi centrifuga, ſeu potius in mea theoria ex vi mutua repulſiva, quæ utrique reſpondet. Prima pars ſic facile demonſtratur. Eſt (num. 575.) in fig. 65 vis urgens cycloidem, ut CF, in qua ipſa ratione eſt celeritas. Igitur quo major eſt in quovis arcu infiniteſimo vis premens, eo minus eſt tempus, quo preſſio agit, & proinde preſſio computata a niſu, qui exercetur, & tempore, quo niſus durat, eſt in omnibus exiguis arcubus æqualis. F.65

582 Ad demonſtrandam partem alteram requiritur alia geometrica proprietas ipſius cycloidis, quod nimirum ſe ipſam per evolutionem generet. Idcirco hic eam demonſtrabimus. Si curvæ cuidam AGH in fig. 69 advolvatur filum, F.69 tum evolvatur ex A ita, ut ejus pars libera EG, & curvæ ipſius dorſum contingens in G, maneat diſtenta, ac ejus caput E interea deſcribat arcum AED curvæ alterius; illa prior dicitur evoluta, hæc poſterior genita evolutione illius, ac facile patet arcum evolutæ AG, ſi evolutio ex A cœperit, nullo filo adjecto, quod procurrat ultra curvam evolutam, æquari debere rectæ GE tangenti evolutam ipſam, terminatæ ipſo contactu, & genita, genitam autem ipſam poſſe conſiderari tanquam compoſitam ex infinitis numero arcubus infiniteſimis deſcriptis centris G radiis GE; unde fit, ut ipſa illa tangens GE ſit radius circuli geniram oſculantis in E.

583 Jam vero ſit AGH ſemicyclois, & ducta HC parallela diametro KA circuli genitoris, ſive axis ipſius curvæ, cui recta AB parallela baſi KH occurrat in C, ac ipſa AB itidem rectæ GE occurrat in L, productâque HC tantundem in D, fiat ad partes E ſemicirculus CFD, ducaturque GI parallela baſi HK occurrens ſemicirculo genitori in I; & aſſumpto arcu $CF = AI$, ducatur EF. Quoniam GE æquatur arcui GA ex natura evolutionis (num. 582.), & GL parallela eſt, & proinde æqualis chordæ AI, ſive CF; erit LE æqualis itidem GL, ſive chordæ CF. Quoniam autem ob arcus AI, CF æquales eſt angulus $IAL = ACF$ alterno; erit FC parallela etiam AI, adeoque EF parallela, & æqualis LC. Eſt autem $CA = HK$ æqualis dimidiæ peripheriæ (num. 569.) & pars $AL = IG =$ arcui AI (num. 574.) ſive CF. Igitur erit CL, ſive FE æqualis arcui DF, & proinde (num. 574.) punctum E ad ſemicycloidem AED circulo genitore DFC, adeoque priori æqualem, ſed ſitu inverſo poſitam. *Generat igitur cycloïs ſui evolutione ſeipſam.*

584 Hinc autem conſequitur radium circuli ejus oſculatorem in E eſſe, ut eſt CF dimidia ipſius radii GE, quæ ipſa eſt, ut velocitas. Eſt autem in circulo (num. 264.) vis, quæ requiritur ad hoc ut is deſcribi poſſit, vi ſibi normali, ut quadratum velocitatis directè, & radius oſculi reciprocè. Erit igitur & hujuſmodi vis, quæ mobile illud in curvam inflectit, & cui æqualis & contraria vis canalem cycloidalem premit, ut velocitas, adeoque iterum ejus preſſio computata a vi hujuſmodi, & tempore in ſingulis arcubus æqualibus æqualis.

585 Ante quam hoc argumentum deſeram, illud adjiciam, quod ſpectat ad evolutas. Nimirum in fig. 64, ſi per F ducatur tangens circuli, quæ tangenti EM cycloidis occurrat in M; punctum M erit ad curvam, quæ oritur circulo evoluto ex C. Nam angulum MFC metitur dimidius arcus FC, & angulum F.64 CFL dimidius CL. Quare cum *ii* arcus æquentur, æquabuntur & *ii* anguli, & proinde etiam anguli FEM, FME, ille prioris alternus, hic poſterioris in-

ternus, & oppoſitus. Quare *FM* æquabitur *FE*, ſive (num. 571) arcui *CF*; vel filo evoluto ex *C*.

586 Expoſitis, quæ ad cycloidem pertinent, innuit Noſter a verſu 391 ad 419 immenſam, & vaſtiſſimo campo diffuſam ſegetem, quæ ſola integrum immane opus requireret, ut nimirum inveſtigentur deſcenſus per curvas quaſvis in quavis hypoteſi gravitatis, & in medio utcumque reſiſtente, ubi præter ſolutiones generales implicatiores occurrunt peculiares etiam ſanè multæ elegantiſſimæ, cujuſmodi aliqua ipſe Newtonus protulit, ut iſochroniſmum in curva epicycloidali, quam nimirum generat circulus non per rectam, ſed per arcum circularem interius excurrens, in hypotheſi gravitatis decreſcentis in in ratione directa diſtantiarum a centro, quod demonſtravit prop. 51 lib. 1, & ipſius cycloidis iſochroniſmum in medio, quod reſiſtat in ratione momentorum temporis, vel in ratione velocitatum ſimplici, quæ demonſtravit prop. 25, & 26. lib. 2, ac alia ſatis itidem elegantia, quæ de motu in ſpiralibus demonſtravit in prop. 15, & 16 lib. 2 ejuſdem, ut & alia ſane multa ab ipſo, atque ab aliis inventa vel ope Geometriæ, vel per calculum. Sed nec ea ſatis ad Naturæ cognitionem conducunt, cum plerumque hypotheſes aſſumant, quæ in Natura non extant; nec mihi, nimis arctis adſtricto limitibus tam late evagari conceſſum eſt. Quamobrem iis omiſſis ad pendulorum oſcillationes gradum faciam.

§. III. Ad notam in verſ. 420
DE PENDULORUM OSCILLATIONIBUS, ET DE CURVARUM EVOLUTIONE.

587 De pendulorum oſcillationibus acturus Noſter, hinc ad verſum 453 viam ei tractationi ſibi ſternit agens de oſcillationibus in curvo canali, in quo ex parte oppoſita poſt imum punctum habeatur curva æqualis priori prorſus, ac ſimilis, & ſimiliter poſita. Ibi, ſecluſa aeris reſiſtentia, & frictione canalis ipſius, aſcenſus eâdem lege fieret, qua deſcenſus, prorſus, ut vidimus in rectilineo aſcenſu, ac deſcenſu, & æqualibus prorſus temporibus tam aſcenſus, quam deſcenſus haberetur, quin imo in arcu circulari exiguo quamproxime, in Cycloidali accurate tempus idem eſſet, ſive longior, ſive brevior arcus deſcriberetur.

588 Porro hic Noſter conſiderat arcus hinc, & inde a puncto infimo prorſus æquales & ſimiles. At ſublimiores Geometræ curvas etiam admodum diverſas adnectunt ita, ut deſcenſui per unam, aſcenſus per alteram ſuccedat, tum deſcenſus per eandem ſecundam, ac aſcenſus per illam primam. In hujuſmodi oſcillationibus aſcenſus quivis cum ſuccedente deſcenſu per eandem curvam eodem tempore fit, at hic deſcenſus cum aſcenſu ſuccedente per curvam alteram fieri poteſt quovis alio tempore utcumque diverſo, licet ſemper altitudo ad quam hinc, & inde aſcenditur, æqualis eſſe debeat, & velocitas in imo puncto ſemper æqualis, manentibus illis arcubus, cum juxta num. 518 cuivis datæ altitudini per curvam quamvis eadem finalis velocitas reſpondeat in deſcenſu, & viceverſa cuivis datæ velocitati initiali eadem altitudo in aſcenſu.

589 Et quidem de hujuſmodi oſcillationibus admodum elegantia theoremata demonſtrantur, & ſolvuntur problemata, ut ubi data curva quavis, alia quæritur,

titur, quæ ſimul cum ipſa oppoſita parte conjuncta oſcillationes reddat iſochronas, compenſata per aſcenſum in altera inæqualitate temporis, quæ per deſcenſum in altera habetur in arcubus utcumque inæqualibus. Sed hæc & ſublimiora, & operoſiora ſunt, quam ut hic inſeri poſſint, & quidem multo magis ad ſubtiliorem geometriam, atque analyſim exercendam apta, quam ad phyſicos uſus, & cognitionem Naturæ.

590 Ubi autem oſcillationes non in aliquo canali ſiunt, ſed per ſuſpenſionem ex filo flexili vel virga rigida, fieri autem poteſt, ut in quavis curva, vel curvis quibuſvis oſcillationes fiant ope fili, quod jam videbimus; notandum illud, hic fili ipſius, vel fibrarum virgæ tenſionem idem præſtare per attractionem, quod in canali fundi preſſio per repulſionem præſtat in mea theoria; reſiſtentia autem aeris utrobique eſt eadem; reſiſtentiæ vero ex frictione fundi ſuccedit reſiſtentia ex aeris actione in filum, vel virgam, & ex aliqua fili rigiditate, vel frictione virgæ in ſuſpenſione. Hic autem ab ipſo pondere fili, vel virgæ abſtrahimus animum acturi de ipſis paulo inferius, ubi de centro oſcillationis.

591 Ut in quavis curva data *AFD* in fig. 69 oſcillatio fiat ope fili, ſatis eſt inveniro curvam *AGH*, cujus evolutione illa prior generatur, ut ipſi huic evolutæ filum advolvi poſſit, cujus nimirum explicatione propoſita curva deſcribetur, alterâ *HB* ex parte adverſa reſpondente alteri, vel eidem curvæ *DB*. Patet autem primo ad id requiri, ut curva ſit ad partes ſuperiores cava, ut nimirum ejus evoluta ſuperior ſit; deinde ut poſſit hoc problema ſolvi, *data curva quavis invenire ejus evolutam*, quod Hugenius generaliter præſtitit; commodius autem fit ope calculi integralis, & ut in Cycloide inventum eſt ipſam ſui ipſius evolutione gigni, ita propoſitâ quavis curvâ inveniri poteſt ejus evoluta. Et de his quidem agit Noſter paulo inferius a verſu 676 ad 740, ubi evolutarum naturam explicat, & de oſcillationibus ope fili inter laminas evolutarum ſuſpenſi, potiſſimum Cycloidales. F.69

592 Quod autem ad evolutas inveniendas pertinet, duo hic indicabimus, Primo loco ſi in quovis puncto *E* curvæ datæ ducatur recta normalis ad ipſius curvæ tangentem, ac in ea aſſumatur ſegmentum *EG* æquale radio circuli oſculatoris, fore punctum *G* ad evolutam quæſitam, ut ſupra num. 562 innuimus in ipſo evolutæ contactu eſſe circuli oſculatoris centrum. Quamobrem, ſi ea accurata aliqua methodo innoteſcat ratio determinandi radium circuli oſculatoris (quod quidem in meis Sectionum Conicarum elementis geometrice præſtiti pro eo curvarum genere, ubi & methodum generalem inſinuavi ejus inveſtigationis pro curvis omnibus ab Hugenio propoſitam per ultimum concurſum binarum normalium ad ſe invicem accedentium in infinitum, ut demum congruant, quæ methodus generaliter pertinet ad curvarum elementa geometrica, quæ quarto tomo ſum traditurus); jam habetur methodus deſcribendi ipſam evolutam. Deinde illud, ſi mechanica quædam, & veræ proxima quæritur evoluta curvæ datæ, ea facile ſic invenitur. Sit curva data *AED* in fig. 71, & ſeligantur in eâ puncta quotlibet *EFK* non multum a ſe invicem diſtantia, per quæ omnia ducantur normales *EB*, *FR*, *KL*, tum curva quædam *PGQ* continuo tractu ducatur ita, ut eas normales contingat hinc, & inde a concurſibus *N*, *M* binarum proximarum quarumcumque in *G*, *I*, *H*, quod quidem haud difficulter præſtari poteſt, illis ipſis normalibus, quæ in exiguo a ſe invicem F.71

vicem

vicem angulo declinabunt, curvæ ductum exhibentibus; & curva eo pacto deſcripta, erit ad ſenſum propoſitæ curvæ evoluta. Demonſtravit enim generaliter Hugenius; & admodum facile ex ipſa evolutionis natura utcumque colligitur, utrumque & directum, & inverſum theorema, nimirum *tangentes evolutæ eſſe normales genitæ, & ſi bina curva ita diſpoſita ſint, ut alterius tangentes ſint alteri ſemper normales, illam hujus evolutam eſſe*.

593 Ut autem ad circulares oſcillationes redeamus, facile erui poſſunt formulæ generales, quæ exhibeant tam abſoluta tempora oſcillationum ſingularum, quam numerum oſcillationum dato tempore peractarum per vires, & filorum longitudines, ac relationem inter ea tempora, eos numeros, longitudines, vires.

594 Aſſumatur formula exhibita num. 423 pro libero gravium deſcenſu $a=mutt$, ubi a exprimit altitudinem quamcumque, m ſpatium gravitate noſtra percurſum uno ſecundo horario, u vim poſita gravitate noſtra $=1$, t tempus deſcenſus per illam altitudinem a. Sit longitudo fili l, & ſpatium $a=2l$ diameter circuli, cujus arcus deſcribitur, ut jam ſit $2l=mutt\ mu$ & $tt=\frac{2l}{mu}$ tempus autem unius oſcillationis compoſitæ ex deſcenſu, & aſcenſu ſit q, numerus autem oſcillationum dato tempore d, ut uno die, computato in ſecundis horariis ſit n. Erit (num. 531.) ut diameter ad quadrantem peripheriæ, ita tempus per diametrum ad tempus deſcenſus per arcum circuli minimum, adeoque ut diameter ad dimidiam peripheriam, ita tempus deſcenſus per duplam fili longitudinem ad tempus totius oſcillationis, quod Noſter expreſſit a verſu 481 ad 494. Quare ſi ratio diametri ad peripheriam, quæ eſt 7 ad 22 ex Archimede, & multo propius 113 ad 355, ponatur 1 ad p, erit ſumendo quadrata temporum $1.\ \frac{1}{4}pp::$ $tt=\frac{2l}{mu}\ qq=\frac{lpp}{2mu}$. Rurſus, ut hoc quadratum temporis unius oſcillationis $\frac{lpp}{2mu}$ ad quadratum dd dati temporis, ita unius oſcillationis quadratum $=1$, ad quadratum nn numeri oſcillationum dato tempori debitarum, & habebitur $nn=\frac{2mudd}{lpp}$.

595 Binæ igitur habentur formulæ $qq=\frac{lpp}{2mu}$, $nn=\frac{2mudd}{lpp}$, quæ nexus illos quæſitos includunt omnes, ex quibus more ſolito & theoremata plurima deduci poſſunt, & problemata ſolvi. Ea evolvam tantummodo, quæ Noſter attigit, vel quæ uſui futura inferius indicavi in notis.

596 Si plura pendula inter ſe conferantur, quæ cum viribus quibuſvis oſcillent, erit pro omnibus conſtans p, $2m$, dd. Quare prima formula reducitur ad hanc $qq=\frac{l}{u}$, ſecunda ad hanc $nn=\frac{u}{l}$. Ex priore habentur hæc theoremata: *quadrata temporum ſingularum oſcillationum ſunt directè, ut longitudines pendulorum, & reciprocè ut vires conjunctim, paribus longitudinibus reciprocè ut vires, paribus viribus directè ut longitudines*, quorum poſtremum Noſter expoſuit a verſu 495 ad 519. Ex poſteriore habentur hæc: qua-

quadratum numeri oſcillationum dato tempori debitarum eſt directè, ut vis, reciprocè, ut longitudo penduli conjunctim, pari longitudine penduli, ut ſola vis directè; pari vi, ut ſola longitudo reciprocè.

597 Quod ſi tempus unius oſcillationis q, ſive numerus oſcillationum n dato tempori debitarum fuerit idem, nimirum ſi pendula fuerint iſochrona, erit ex priore $uqq = l$, & ex poſteriore $nnl = u$, ac in utraque, facto ibi q, hic n conſtanti, $l = u$. Nimirum habetur hoc theorema: *pendulorum iſochronorum longitudines ſunt, ut vires*, quod theorema propoſui, & alia ratione deduxi in nota ad verſum 495.

598 Porro quæ ad velocitates pertinent, facile etiam ſingula ex reliquis formulis numeri 423 deducerentur, ſed ſatis eſt notare in puncto infimo velocitatem fore eandem, quæ eſſet in caſu perpendiculari per eandem altitudinem, quæ nimirum æquatur ſinui verſo arcus deſcripti. Sinus verſus eſt tertius poſt duplam fili longitudinem, & chordam dimidii arcus oſcillando deſcripti, nempe ducta in fig. 55 *BL* perpendiculari ad *AD*, velocitas in *D* in caſu per *BD* eſt (num. 518.) eadem, quæ in caſu per *LD*, & eſt *LD* tertia poſt *AD*, & chordam *BD*. Si igitur chorda ejuſmodi dicatur h, erit altitudo $LD = \frac{hh}{2l}$. In F. 55.

formula $cc = 4amu$ num. 423, pro a ponatur hic valor $\frac{hh}{2l}$, & habebitur $cc = \frac{2hhmu}{l}$, in qua formula eſt c celeritas, u vis, m illa eadem altitudo, per quam grave decidit uno ſecundo horario, h chorda dimidii arcus, l longitudo penduli.

599 Hinc ſi diverſa pendula cum diverſis viribus, diverſos arcus oſcillando percurrentia inter ſe comparentur, dempto communi $2m$, ut evadat $cc = \frac{hhu}{l}$ *erit quadratum celeritatis in puncto infimo in ratione compoſita ex directa vis, directa quadrati chordæ dimidii arcus oſcillando deſcripti, & reciproca longitudinis penduli ſimul; pari autem vi, & longitudine penduli celeritas, ut chorda arcus dimidii ejuſdem, ſive ut chorda arcus deſcenſu ſolo deſcripti*, quo theoremate ſupra num. 394. uſi ſumus in experimentis pendulorum pro colliſionibus corporum; Noſter autem id expreſſit hic a verſu 520 ad 541.

§. IV. Ad notam in verſ. 542.

DE CENTRO ÆQUILIBRII, GRAVITATIS, ET OSCILLATIONIS

600 Hoc loco innuit Noſter theoriam centri oſcillationis geometricam prorſus, atque idcirco ineptam carminibus. Sed ea indiget naturâ vectis, quæ a centro æquilibrii pendet, & naturâ centri gravitatis, de quibus ipſe multo inferius agit a verſu 1386 ad 1726. Idcirco ea hic argumenta conjungimus. Et quidem quæ ad æquilibrium, & gravitatis centrum pertinent, ſatis fuſe in ipſis etiam notis ſunt pertractata ſunt, in quibus tamen nonnulla hic demonſtranda promiſimus. In pri-

601 In primis centrum æquilibrii dicitur illud punctum maſſæ cujuſvis etiam compoſitæ ex maſſis quotcumque inter ſe connexis per virgas rigidas, & carentes gravitate, ac inertia (quod nomine maſſæ intelligimus paſſim inferius) particulis ipſius maſſæ animatis viribus quibuſcumque, utcumque diverſis a ſe invicem, & quacumque directione agentibus, ſed datis, cujus puncti motus ſi impediatur maſſa omnis manebit immobilis, nec circa ipſum converti poterit.

602 Pendet ejus determinatio a niſu quodam, quem vires certo modo connexæ concipiuntur exercere, qui niſus dicitur momentum, &, ut demonſtravi in nota ad verſum 1402 ex ſubſidiario quodam principio, eſt, ut ipſa vis abſoluta, ac ut ſpatium, quod dato tempuſculo maſſa, quam ipſa animat, percurreret ſecundum directionem, ſi contrarias vires vinceret, vel contra ipſam, ſi vinceretur; ſive eſt, ut vis, & initialis celeritas, quæ haberetur in motu maſſæ. Subſidiarium principium eſt illud. *Si ad movendam per datum ſpatium maſſam, quæ certa vi in certam plagam tendat, requiritur vis quædam quodam in loco applicata; ad eam movendam per majus ſpatium eodem tempore, requiri debere vim ibidem applicatam eo majorem, quo majus eſt ſpatium.* Eo principio admiſſo, cætera omnia, quæ ad æquilibrii leges requiruntur, & ad omne machinarum ſive ſimplicium, ſive compoſitarum genus pertinent, ſponte omnia conſequuntur, & abunde in notis ſunt explicata.

F.70 603 Sic in fig. 70. ſi virgæ rigidæ adnectantur bina pondera æqualia *A*, *B*; & adſit fulcrum in *C*, patet eo caſu debere haberi æquilibrium, cum eodem pacto agat *A* in *B*, & *B* in *A* ſive ad deſcenſum, ſive ad aſcenſum. Ad hoc autem ut *A* vincat, debet eſſe tantillo majus quam *B*, quo caſu ipſum deſcendet per *Aa*, & elevabit *B* per *Bb*. Quod ſi pro *B* ſit in *D* pondus idem in dupla diſtantia; deſcendente *A* per *Aa*, debebit elevari per ſpatium *Dd* duplum ipſius *Bb* eodem tempore; adeoque requiretur in *A* vis prioris dupla ad eum effectum præſtandum, & quod de dupla diſtantia eſt dictum, idem patet de alia quavis dicendum eſſe, ut nimirum *D* exerceat niſum contra ipſum *A*, a quo debeat contra ſuam directionem moveri, qui ſit ut ipſius vis abſoluta, & diſtantia *CD* conjunctim. Hæc Noſter expreſſit a verſu 1402 ad 1427, tum ad quodvis machinarum genus tranſtulit uſque ad verſum 1438, ut nimirum computentur momenta partium omnium prædictarum viribus quibuſcumque, quæ agant eum directionibus quibuſcumque, æſtimata a viribus ipſis, & initiali velocitate, quæ haberetur contra directionem tendentiæ cujuſque vis, ſi motus conſequeretur, vel ſecundum eandem; & ſi ſumma ejuſmodi momentorum in partes oppoſitas tendentium ſit eadem, habebitur æquilibrium.

604 Porro non eſt habenda ratio velocitatis cujuſcumque, ſed velocitatis F.71 ſecundum, vel contra directionem vis cujuſque. Nam ſi in fig. 71, ſit virga inflexa *ACD* ſuſtinens pondera *A*, & *D*, quæ converti debeat circa *C*, abeunte *A* in *a*, & *D* in *d*, ſi ducantur *aE*, *dF* perpendiculares directioni *AE*, *FD* vis urgentis *A*, & *D*, non eſt computandum totum ſpatium *Aa*, *Dd*, ſed ſpatium *AE*, *DF*, quod ſi ducatur in vires totas, habentur bina illa momenta. Id autem etiam e generali principio reſolutionis, vel potius compoſitionis virium facile obtinebitur. Si enim vis agens directione *AE* concipiatur reſoluta in duas per *AM*, *AH*, quarum altera *AH* agat ſecundum directionem motus; altera *AM* tendet ad diſtrahendam, producendamque virgam *CA*. Erit autem, ob angulum *CAa* rectum, rectus, & alternus *AHE*, ac ob *AEa* rectum, erit *Aa* ad

ad *AE*, ut *AE* ad *AH*, ut vis abſoluta agens per *AE* ad vim relativam agentem per *AH*; adeoque ſi ducatur vis abſoluta in ſpatium *AE*, percurſum ſecundum ſuam directionem, vel vis reſpectiva in ſpatium *Aa* integrum percurſum ſecundum ſuam, æqualia producta proveniunt. Atque idem accidit, ſi vis abſoluta agens directione *FD* reſolvatur in duas agentes directione *ND*, *ID*, quarum prior tendet ad diſtrahendam virgam, poſterior aget contra directionem motus, eritque vis reſpectiva ducta in *Dd* æqualis abſolutæ ductæ in *DF*; nec aliud erit diſcrimen in maſſa D' poſita ultra rectam *GL* perpendicularem directioni FD', niſi quod vi reſpectiva ID' pariter oppoſita motui, vis $N'D'$ tendet ad comprimendam virgam $D'C$, non ad diſtrahendam.

605 Et hæc quidem ex idea reſolutionis motus; nam revera conſideranda erit in *A* vis *Am*, in *D* vis *nD*, qua virga tantundem trahat maſſam *A*, *D* ad *C*, quantum ipſa conatur virgam diſtrahere, & in D' vis $n'D'$, qua virga tantundem repellit maſſam D' a *C*, quantum ipſa nititur virgam comprimere, & vires *AH*, *ID*, $I'D'$ componuntur potius a viribus *AE*, *Am*; *FD*, *nD*; FD', $n'D'$, prorſus, ut ſupra diximus num. 499 de deſcenſu per plana inclinata, excluſa juxta num. 215, & 499, quavis vera reſolutione motus.

606 In omnibus autem hiſce caſibus, ſi rectæ *CK*, *CL* ſint perpendiculares directionibus virium *AE*, *FD*, $F'D'$, & conſideretur vis eadem ut applicata in *K*, vel *L*, ac agens vecte *CK*, *CL*; res eodem redit; cum pateat, triangula rectangula *EMA*, *CKA* ſimilia eſſe ob angulos ad *A* æquales, & proinde eſſe *CA* ad *CK*, ut *AE* ad *EM*, vel *AH*, ſive ut vis abſoluta ad relativam; unde fit, ut vis abſoluta ducta in *CK*, æquetur vi relativæ ductæ in *CA*, & illa cum vecte *CK* idem præſtet, quod hæc cum vecte *CA*. Inde autem & illud conſequitur, quod propoſui in nota ad verſum 1597 demonſtrandum hic in ſupplemento, pondus *D* ubicumque collocatum in recta verticali $D'D$ ſemper idem ubique momentum exercere ad circumagendam maſſam circa *C*, computandum a pondere ducto in diſtantiam *CL*.

607 Porro ſi vires quæcumque agant in particulas quaſcumque maſſæ cujuſcumque, & ſit punctum quoddam, cujus motu impedito, ſi concipiatur maſſa converti in quamcumque plagam, ſumma momentorum omnium hoc modo computatorum ſecundum eam directionem, æquetur ſummæ momentorum ſecundum oppoſitam, illud erit æquilibrii centrum, impedito penitus quovis maſſæ ipſius motu; quod theorema ex illo ſubſidiario principio per ea, quæ inde deduximus, derivatur.

608 Dico autem ſubſidiarium principium. Nam in Natura nullæ ſunt ejuſmodi rigidæ virgæ inflexiles, & omni gravitate, ac inertia carentes, adeoque nec revera ullæ leges pro iis conditæ, & ſi ad genuina, & ſimpliciſſima Naturæ principia res exigatur, invenietur, omnia pendere a compoſitione virium, quibus in ſe invicem agunt particulæ materiæ, a quibus nimirum viribus omnia Naturæ phænomena proficiſcuntur. Sic ipſum æquilibrium in mea ego theoria derivo ex iiſdem generalibus principiis, cujus quidem ſimpliciſſimum caſum ſuperiore anno communicavi cum P. Carolo Benvenuto Soc. Noſtræ doctiſſimo viro, qui ipſum ſuæ Synopſi Phyſicæ Generalis inſeruit.

609 Conſidero nimirum in fig. 73 binas maſſas compoſitas ex quotcumque punctis *A*, *D* collocatas in *A*, & *D*, quarum punctorum quodlibet urgeatur viribus parallelis quibuſcumque *AZ*, *DX*, exiſtentibus ipſis utcumque etiam in- F.73.

æqualibus, quæ in æquilibrio ſint cum punctis *B*, & *C* impedito motu puncti *C* per vim aliquam externam toti huic ſyſtemati. Vim *AZ* debet elidere contraria *AG* compoſita a binis *AI*, *AH*, quarum prior idcirco debebit eſſe repulſiva a *C*, poſterior attractiva ad *B*, & eodem pacto vim *DX* elidet vis *DK* compoſita e repulſiva *DM*, & attractiva *DL*. Hinc punctum *B* debebit attrahi in *A*, & *D* viribus *BN*, *BR*, & *C* repelli viribus *CO*, *CT*, quæ ad vires *AH*, *DL*, *AI*, *DM*, erunt ut numerus punctorum in *A*, & *D* ad punctum *B*, & *C*, ob actionem, & reactionem æquales. Hinc vis compoſita puncti *B* debebit dirigi ad *C*, & ab ejus repulſione elidi, ipſum autem *C* tantundem repulſum a *B* debebit urgeri quatuor viribus, nimirum prioribus *CO*, *CT*, & novis *NC*, *RC*, ex quibus emergent *NO*, *RT*, quam demônſtro habituras directionem *CE* parallelam *AZ*, *DX*, & fore æquales ipſis ductis in ſuas maſſas *A*, D: ductis autem perpendiculis *AF*, *DE* in ipſam directionem (quæ erunt æquales illis *CK*, *CL* figuræ 71), fore $AF . DE :: D \times DX . A \times AX$: nimirum haberi æquilibrium, ubi ſummæ virium in D, & *A* fuerint reciprocè, ut perpendicula e fulcro *C* in directionem virium: fulcrum vero gravari in *C* vi æquali ponderi totius maſſæ utriuſque. Et id quidem generaliter pertinet ad centrum gravitatis (quod in hac hypotheſi, ut jam videbimus, congruit cum centro æquilibrii), maſſa premente fulcrum eodem modo, quo ſi in centro gravitatis collectum eſſet totum pondus, ut affirmavi in nota ad verſ. 1612. Et hac quidem methodo ſi inquiratur in centrum æquilibrii, oſcillationis, percuſſionis; omnia Naturæ phænomena reducentur ad eadem generaliſſima principia, a quibus pendent, nimirum ad productionem velocitatis factam vi compoſita e viribus omnibus, & æquilibrium, ubi vis ea compoſita ſit nulla. Sed de his in quarto tomo agendum erit, ubi meæ theoriæ conſectaria uberius exponam.

610 Ex centro æquilibrii orta eſt idea centri gravitatis, quod nimirum eſt centrum æquilibrii in caſu, in quo omnia maſſæ puncta animantur viribus parallelis, & æqualibus, quod in gravitate noſtra concipimus. At ego ejus definitionem deſumere ſoleo potius independentem prorſus a gravitate, & vi quacumque, tum demonſtro, id in ea gravitatis hypotheſi obvenire. Huc autem ipſa definitio reducitur. *Si in quadam maſsa ſit punctum ejuſmodi, ut, ducto per ipſum plano quovis, ſumma diſtantiarum omnium perpendicularium ab ipſo omnium punctorum ejus maſsæ* (quo nomine in mea theoria intelligo puncta ipſa inextenſa, e quibus componitur, in communi vero ſententia intelligi poſſunt particulæ perquam exiguæ, quæ conſiderentur, ut puncta) *jacentium ex altera parte æquetur ſummæ jacentium ex oppoſita; id punctum dico centrum gravitatis, & planum quodvis ductum per ipſum dico planum diſtantiarum æqualium*. Patet autem inde deduci, in hypotheſi gravitatis conſtantis, utcumque collocata maſſa, id punctum fore centrum æquilibrii, ut demonſtravi in nota ad verſum 1597, ob æquales oppoſitorum momentorum ſummas, quorum ſingula æquantur ſingulis punctis ductis in diſtantiam cujuſque perpendicularem a plano verticali ducto per id punctum, in quo plano concipiatur jacere axis rotationis ab æquilibrio impeditæ.

611 Porro ex hac idea centri gravitatis, in mea de ipſo centro gravitatis diſſertatione præmiſſis a num. 8 nonnullis lemmatis, num. 36 habeo hujuſmodi propoſitionem. *In quavis maſsa conſtante e quotcumque corporibus utcumque a ſe invicem disjunctis, habetur centrum gravitatis, quod eſt unicum.*

per

per quod tranſeunt omnia plana diſtantiarum æqualium, & quod dato numero, & poſitione punctorum ejuſdem maſſa inveniri poteſt. Id autem ibidem demonſtro n. 37, ac inde facile deducitur illud: Si aſſumatur quodvis planum ultra omnem maſſam, ſummam diſtantiarum omnium punctorum ab ipſo debere æquari diſtantiæ centri gravitatis ductæ in numerum punctorum, ut ibidem deduxi n. 20.

612 Porro num. 38 ex ipſa propoſitione eruo hoc corollar: *Centrum commune gravitatis binorum corporum, quorum ſingula contineant corpora quotcumque, invenitur, ſi recta, quæ ſingulorum centra gravitatis conjungit, dividatur in ratione reciproca maſſarum eorundem corporum, vel aggregatorum*; quo demonſtrato jam ſponte conſequitur illud, quod propoſui in nota ad verſum 1632, ſi communi methodo inveſtigetur centrum gravitatis quocumque ordine, ſemper deveniri ad idem unicum punctum, ut num. 40 deduxi ibidem, ac in ipſius propoſitionis demonſtratione exhibui generalem methodum inveniendi gravitatis centrum, quod me hic exhibiturum promiſi in nota ad verſ. 1612, in qua & alia nonnulla de eodem centro gravitatis pollicitus eram, ſed excreſcente jam plus æquo mole voluminis, cogor ad illam meam diſſertationem provocare, vel invitus, ut & in inſequentibus nonnulla, quæ ſupplementis hujuſce tertii libri deſtinaveram, vel prorſus omittere, vel vix attingere, vel tomis ſequentibus reſervare cum aliis conjungenda. Illud addam tantummodo, ex his, quæ hic propoſui, facile deduci, quæ deinde in notis deduxi, atque illud in primis, ſtatum centri gravitatis nec a velocitatibus quibuſcumque, nec a quibuſcumque mutuis viribus perturbari, quod in notis ipſis ego, & quidem etiam Noſter in ſuis verſibus abunde demonſtravimus.

613 Ut ad centrum oſcillationis faciamus gradum, ſint bina pondera *B*, & *D* in fig. 74 ſuſpenſa e puncto *A* ad diverſas diſtantias. Si ſingula ſeorſum oſcillare debeant, oſcillatio propioris *B* debebit abſolvi citius (num. 596), F.74
remotioris *D* ſerius in ratione ſubduplicata diſtantiarum *AB*, *AD*. Si vero connexa ſint virgâ rigidâ, quæ concipiatur inflexilis, ac omni vi inertiæ, & gravitate deſtituta, debebunt oſcillationes ſimul peragere, adeoque debebit alterius motus alteri obſequi ita, ut tempus ſit medium inter utrumque, eritque quoddam punctum *C*, in quo ſi eſſet utrumque corpus, oſcillationes eodem tempore peragerentur, quo peraguntur, & eodem pacto ſi fuerint gravia quotcumque *E*, *B*, *D*, *F*, ita connexa, erit ſemper quoddam punctum *C*, in quo ſi ea eſſent, vel aliud corpus quodcumque, oſcillationes eodem tempore peragerentur, quo peraguntur. Id punctum dicitur centrum oſcillationis, & *AC* erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni illi pendulo compoſito.

614 Problema inveniendi centrum oſcillationis penduli utcumque compoſiti diu ab aliis nequidquam tentatum, ſolvit demum Chriſtianus Hugenius in Horologio oſcillatorio, quod opus anno 1673 impreſſit, ſolutione cum phœnomenis feliciſſime conſpirante; quanquam deducta ex principio nec evidenti per ſeſe, nec demonſtrato ab ipſo Hugenio, ut ego arbitror, & infra videbimus. Anno 1681 in hiſtoria litteraria Roterodamenſi non principium tantummodo, ſed & concluſionem Hugenii impugnavit Catelanus aſſumpto principio omnino falſo, cui reſpondit Hugenius, replicante inſequenti anno Catelano ipſo, & ſuam impugnationem nonnihil immutante, quæ controverſia inter eos duravit

 annos

Digitized by Google

annos plures. Interea & Jacobus Bernoullius contra Catelanum pro Hugenio ſcripſit, at in enunciando principio, quo utendum eſſet ad determinandum alia methodo centrum oſcillationis, erravit, ut ipſe, ab Hoſpitalio prius correctus, fatetur in Actis Lipſienſibus anni 1686, tum in iiſdem anno 1691, & in Commentariis Acad. Pariſienſis ad annum 1703, exhibuit genuinam ſolutionem ejus problematis petitam ex natura vectis, quam & Wolfius ſecutus eſt deinde, & vero etiam Graveſandius parum admodum mutatam. At anno 1714 in Commentariis Acad. Parii. Joannes Bernoullius aliam ejuſdem problematis ſolutionem propoſuit ingenioſiſſimam ſane, & multo ſimpliciorem, petitam itidem ex natura vectis, qui quidem in diſſertatione de motu Pariſios miſſa pro præmio problematis anni 1724 aliam longe ſimpliciorem exhibuit petitam a principio conſervationis virium vivarum, quam quidem jam ab anno 1696 Leibnitio per litteras communicaverat, ut videre eſt in commercio epiſtolico eorundem. Hugenianam, & tres Bernoullianas ſolutiones nonnihil contractas hic exponam, ac meum de ipſis judicium interponam.

615 Hugeniana ſolutio innititur huic principio; quod ſi ſingula pondera, ubi devenerit virga ad quamvis poſitionem Af, debeant, veluti incurſu quodam in planum immobile, ſoluto nexu, motum convertere ſurſum per ee', bb', dd', ff', centrum gravitatis commune aſcendere debeat ad eandem altitudinem, e qua deſcenderat. Poſito eo principio ſic licet ratiocinari. Quoniam & toti arcus Ee, Bb, Dd, Ff iiſdem temporibus, & eorum particulæ quævis ſimiles tempuſculis æqualibus percurruntur; erunt velocitates in e, b, d, f, ut ipſi arcus, ſive ut diſtantiæ AE, AB, AD, AF; & ſi eodem tempore grave quoddam deſcenderet per Cc ſine ullo vinculo, eodem autem tempore; quo in pendulo compoſito, cum C ponatur eſſe oſcillationis centrum; ejus pariter velocitas erit, ut AC. Id autem curſu reflexo ſurſum deberet utique ad eandem altitudinem aſcendere per Cc, ex qua deſcenderat, & ex qua cadendo illam eandem velocitatem finalem acquiſiviſſet. Igitur cum altitudines, ad quas aſcenditur, ſive ex quibus deſcenditur, ſint (n. 166), ut initialium, vel finalium velocitatum quadrata, erit $AC^2 . AE^2 :: cc' . ee' = \frac{AE^2 \times cc'}{AC^2}$, & eodem pacto erit $bb' = \frac{AB^2 \times cc'}{AC^2}$, $dd' = \frac{AD^2 \times cc'}{AC^2}$, $ff' = \frac{AF^2 \times cc'}{AC^2}$. Quare ſumma receſſuum in aſcenſu omnium particularum a plano horizontali, ductis ſingulis hiſce aſcenſibus in eorum corporum maſſas, erit $(E \times AE^2 + B \times AB^2 + D \times AD^2 + F \times AF^2) \frac{cc'}{AC^2}$. Porro in deſcenſu per arcus Ee, Bb, Cc, Dd, Ff, proportionales radiis EA, BA, CA, DA, FA, ſimiles & ſimiliter poſitos, acceſſus ad planum horizontale, ſive deſcenſus erunt itidem in eadem ratione, adeoque, ut AC ad AE ita deſcenſus $c'c$ ad deſcenſum corporis E, qui erit $\frac{AE \times c'c}{AC}$, & eodem pacto reliqui deſcenſus corporum B, D, F, habebuntur, eritque ſumma eorum omnium ductorum in ſuas maſſas $(E \times AE + B \times AB + D \times AD + F \times AF) \frac{cc}{AC}$.

616 Jam vero cum centrum gravitatis debeat ad eandem altitudinem redire, & ejus diſtantia a plano horizontali poſito infra omnes ducta in ſummam maſſarum debeat æquari ſummæ diſtantiarum omnium particularum maſſarum omnium; ſumma deſcenſuum, ſive acceſſuum, debebit æquari ſummæ aſcenſuum, ſive receſſuum; nimirum debebit eſſe $(E \times AE^2 + B \times AB^2 + D \times AD^2 + F \times AF^2)\frac{c'c}{AC^2} = (E \times AE + B \times AB + D \times AD + F \times AF)\frac{c'c}{AC}$. Adeoque $AC = \frac{E \times AE^2 + B \times AB^2 + D \times AD^2 + E \times AF^2}{E \times AE + B \times AB + D \times AD + F \times AF}$. Cumque ſatis pateat, idem obvenire, quotcumque corpora in eâdem recta ſint diſpoſita, patet conſequi hoc theorema. *Ducantur ſingula pondera in quadrata ſuarum diſtantiarum ab axe rotationis, tum ſingula in ſimplices diſtantias, ac priorum productorum ſumma dividatur per ſummam poſteriorum, & habebitur diſtantia centri oſcillationis ab eodem axe, ſive longitudo penduli ſimplicis iſochroni illi compoſito*, quæ quidem determinatio haud difficulter applicatur ponderibus omnibus ſitis utcumque etiam extra eandem rectam, & eſt ipſa Hugenii determinatio, cum phœnomenis apprime congruens.

617 At Jacobus Bernoullius in Actis Lipſienſibus ad annum 1791, & in Commentariis Acad. Pariſ. ad annum 1703, ſic ex natura vectis rem expedit. Deveneritin fig.75. pendulum ad poſitionem *Af*, & ſit *cI* arcus, quem corpus in C poſitum, & ſolitarium, percurreret velocitate concepta, ac *Ii* ſpatiolum, quod ob vim gravitatis illo tempuſculo eodem agentem adjiceretur, ducanturque per *A*, & *I*, *i* radii occurrentes arcubus illis circulorum in *G*, *H*, *L*, *M*, & *g*, *h*, *l*, *m*, ac iiſdem occurrat recta per *i* ducta ipſi *AI* parallela in N, O, *P*, *Q*. F.75

618 Quoniam velocitates in *G*, *H*, *I*, *L*, *M* ſunt (num. 615), ut radii *AG*, *AH*, *AI*, *AL*, *AM*, adeoque ut arcus *eG*, *bH*, *cI*, *dL*, *fM*; velocitates jam conceptæ deferrent corpora connexa, per *eG*, *bH*, *dL*, *fM* eodem tempore, quo corpus liberum per *cI*, nec nexus ullum motui impedimentum præberet. At gravitas, quæ ob arcuum circularium paralleliſmum in omnibus iis arcubus æquè agit, deberet ipſa præterea transferre per ſpatiola *GN*, *HO*, *LP*, *MQ* æqualia ipſi *Ii*; nexus autem cogit ea abire per *Gg*, *Hh*, *Ll*, *Mm*, quo pacto motus corporum E, & B ſuperiorum minuitur per $E \times gN$, $B \times hO$, inferiorum augetur per $D \times Pl$, $F \times Qm$. Si igitur conſideretur actio omnium *E*, *B*, *D* in poſtremum *F*; ſuperiora *E*, & *B* debent ipſi addere motum, quem amittunt, & *D* auferre, quod ſibi rapit; ſed actio illa dum e minore ad majorem diſtantiam transfertur, debet, ut in vecte, minui in ratione diſtantiæ minoris ad majorem. Quare ſi fiat ut *AF* ad *AE*, ita $E \times gN$ ad $\frac{E \times AE \times gN}{AF}$, habebitur quantitas motus addita *F* ob actionem *E* ipſum accelerantis, eodem pacto $\frac{B \times AE \times HO}{AF}$ erit quantitas addita a *B*, & $\frac{D \times AD \times lP}{AF}$ ablata a *D*, quæ ſimul debent æquari illi incremento motus $F \times mQ$. Quare ſi hi termini ponantur æquales, multiplicentur omnes per *AF*, & lineolis *gN*, *hO*, *lP*, *mQ* ſubſtituantur *ig*, *ih*, *il*, *im*, vel *CE*, *CB*, *CD*, *CF* ipſis proportionales, erit $E \times AE \times CE + B \times AB \times CB - D \times AD \times CD$

$\times CD = F \times AF \times CF$, ſive $E \times AE \times CE + B \times AB \times CB = D \times AD \times CD + F \times AF \times CF$, quod coincidit cum Graveſandii determinatione, qui jubet, ſingula pondera duci in diſtantias a puncto ſuſpenſionis, & a centro oſcillationis, ac ſuperiorum producta æquari productis inferiorum.

619 Iam vero pro CE, CB, CD, CF ponatur $AC - AE$, $AC - AB$, $AD - AC$, $AF - AC$, & habebitur $E \times AE \times AC - E \times AE^2 + B \times AB \times AC - B \times AB^2 = D \times AD^2 - D \times AD \times AC + F \times AF^2 - F \times AF \times AC$, adeoque tranſpoſitis negativis $E \times AE \times AC + B \times AB \times AC + D \times AD \times AC + F \times AF \times AC = E \times AE^2 + B \times AB^2 + D \times AD^2 + F \times AF^2$, ac demum $AC = \frac{E \times AE^2 + B \times AB^2 + D \times AD^2 + F \times AF^2}{E \times AE + B \times AB + D \times AD + F \times AF}$

620 Hæc quidem Jacobus Bernoullius; at Joannes in Comm. Aca. Paris. ad annum 1714 breviore calculo, & methodo multo magis ingenioſa, quam hic ego adhuc magis contraho eodem pariter ope vectis ſic devenit. Concipit grave quodvis, ut E, agere in quodvis punctum virgæ, ut C, ita, ut ipſum ſollicitet ad deſcenſum vi, quæ applicata ad E minuetur in ratione AC ad AE. Si igitur noſtra gravitas dicatur G, ut pondus E, ſive niſus ad deſcenſum in E ſit $E \times G$, & fiat AC, AE : : $E \times G$ $\frac{E \times G \times AE}{AC}$; hoc erit momentum a maſſa E exercitum in C, quo ipſum C urgebitur ad deſcenſum. Concipiatur jam in C maſſa alia, quæ ſit $\frac{E \times AE^2}{AC^2}$, & cujus gravitas ſit $\frac{G \times AC}{AE}$, & hujus momentum urgens ad deſcenſum, ductâ eâ maſsâ in eam vim, erit $\frac{E \times G \times AE}{AC}$, ut prius. Eodem pacto ſi in C collocentur maſsæ $\frac{B \times AB^2}{AC^2}$, $\frac{D \times AD^2}{AC^2}$, $\frac{F \times AF^2}{AC^2}$, cum viribus $\frac{G \times AC}{AB}$, $\frac{G \times AC}{AD}$, $\frac{G \times AC}{AF}$, habebuntur momenta in C ſollicitantia ad deſcenſum æqualia momentis ibidem exercitis a corporibus B, D, F, nimirum $\frac{B \times G \times AB}{AC}$, $\frac{D \times G \times AD}{AC}$, $\frac{F \times G \times AF}{AC}$.

621 Erit igitur C ſumma maſsarum $\frac{E \times AE^2 + B \times AB^2 + D \times AD^2 + F \times AF^2}{AC^2}$, & ſumma virium $\frac{E \times G \times AE + B \times G \times AB + D \times G \times AD + F \times G \times AF}{AC}$, quorum effectus conjunctus urgebit C ad deſcenſum æque, ac maſsæ E, B, D, F ipſum urgeant præditæ ſuâ ſingulæ vi gravitatis G. Illa autem vi diſtributa æqualiter per ſummam maſsarum illarum, quas mente confinximus, erit vis cujuſvis particulæ $\frac{E \times AE + B \times AB + D \times AD + F \times AF}{E \times AE^2 + B \times AB^2 + D \times AD^2 + F \times AF^2} \times AC \times G$, quæ quidem, ſi punctum C in centro ipſo oſcillationis poſitum debeat ſollicitare ad deſcenſum eodem modo, quo id noſtra gravitas G ſollicitaret, debebit æquari ipſi gravitati G, adeoque facta illa formula $= G$, tum dividendo per G, & per numeratorem fractionis, ac multiplicando per denominatorem habebitur valor quæſitus demum, $AC = \frac{E \times AE^2 + B \times AB^2 + D \times AD^2 + F \times AF^2}{E \times AE + B \times AB + D \times AD + F \times AF}$, ut prius.

622 Id ipſum Bernoullius in memorata diſſertatione de motu, ex principio conſervationis virium vivarum, ſic habet. Deſcendat pendulum compoſitum

AF

Digitized by Google

AF in ſitum verticalem *Af*, & ſi celeritas puncti *C* exprimatur per *AC*, exprimentur velocitates maſſarum *E*, *B*, *D*, *F* per *AE*, *AB*, *AD*, *AF*, & earum quadrata ducta in maſſas per $E\times AE^2 + B\times AB^2 + D\times AD^2 + F\times AF^2$, At ſi ſingula ſcorſum caderent, punctum quidem *C* eandem velocitatem acquireret, & reliquarum maſſarum quadrata velocitatum eſſent, ut altitudines, ex quibus cadunt, nimirum ut ſinus verſi arcuum ſimilium, adeoque ut ipſi radii; eritque, ut *AC* ad *AE*, ita quadratum velocitatis maſſæ $C = AC^2$ ad quadratum velocitatis maſſæ *E*, quod evadit $AE\times AC$. Eodem pacto habebuntur reliqua quadrata velocitatum, quæ ſi ducantur in ſuas maſſas, habebitur horum productorum ſumma $E\times AE\times AC + B\times AB\times AC + D\times AD\times AC + F\times AF\times AC$, quæ, ſi vires vivæ ſint, ut quadrata velocitatum, & maſſæ, ac debeant eædem gigni tam in deſcenſu unito, quam in ſeparato, æquatis illis binis ſummis, & dividendo per ea, per quæ multiplicatur *AC*, habebitur itidem, ut prius $AC = \frac{E\times AE^2 + B\times AB^2 + D\times AD^2 + F\times AF^2}{E\times AE + B\times AB + D\times AD + F\times AF}$.

623 Verum hæc poſtrema determinatio ſupponit gravitatem in utroque deſcenſu debere eandem vis vivæ quantitatem producere, & vim vivam eſſe, ut maſſam, & velocitatis quadratum, cum ſupra oſtenderimus, vires vivas nullas eſſe in Natura, & præterea in utroque deſcenſu gravitas non ſolum deſcenſum urgeat, ſed etiam & virgam tendat, quæ tenſio in diverſis caſibus diverſa eſſe poteſt, & vero debet. Accedit, quod in motu libero non eodem tempore deſcendunt omnes maſſæ, ſed dum *F* deſcendit adhuc, jam *E* aſcendit, quod officit ipſi conſervationi vis vivæ, cujus nimirum idcirco quantitas perpetuo variatur.

624 Idem autem, & Hugenianæ methodo officit. Nam ſi curſus eo modo ſurſum reflecteretur; centrum gravitatis omnino ſurſum ad eandem altitudinem nequaquam aſcenderet. Eam enim haberet, ſi in fig.74 *E* delatum per *ee'* expectaret F.74
in *e'*, donec *F* advenirer per *ff* ad *f*, quod cum non poſſit accidere, ſed jam *E* delabatur iterum; patet altitudinem centri gravitatis, ſoluto vinculo, minorem fore poſt, quam fuerit ante. Et quidem, quod debeat centrum gravitatis ex mutuis viribus nihil perturbari in ſuo ſtatu, ſupra vidimus, ac Noſter etiam expreſſit, & nos in notis exhibuimus. At in illo nexu non agunt ſolæ vires mutuæ, ſed vis etiam puncti ſuſpenſionis, in quod ope virgæ, vel fili agit pendulum, & per ipſum in totam Terram, Terra reagente per ipſum in pendulum.

625 Hinc ſtatum ſingulorum corporum, & centri gravitatis determinat hæc mutua vis inter corpora pendulum conſtituentia, & inter punctum ſuſpenſionis, ac Tellurem univerſam, quæ actio admodum diverſa eſt ante ſolutionem vinculi, ac poſt. In illam actionem inquirendum, ut innoteſcat, quid velocitatis remanere debeat ſingulis corporibus in quovis penduli ſtatu, & quantum id ſtatum centri gravitatis mutare poſſit, quod in quarto tomo præſtabimus ex generalibus, & genuinis principiis inveſtigando juxta meam theoriam, ut illud æquilibrii, ſic etiam hoc oſcillationis centrum. Ibidem autem determinabimus & centrum itidem percuſſionis, ſive punctum illud, in quo ſi corpora illa ipſa *E*, *B*, *D*, *F*, delata motu circulari circa *A* incurrant in *i* in obſtaculum, quod percutiant; omnes elidi debeant corporum ulteriorum, & citeriorum vires ita, ut punctum *A* nec retrorſum, nec antrorſum urgeatur, ſed punctum ipſum *i* totam percuſſionem recipiat, & omnes motus ſiſtat, quod quidem percuſſionis cen-

centrum ſaltem in caſu virgæ rectilineæ eſt idem, ac centrum ipſum oſcillationis; de quibus omnibus ibi & fuſius, & oportunius agi poterit.

626 Interea ex ſubſidiario illo principio, ex quo æquilibrii centrum, & vectis naturam definimus, hanc etiam determinationem centri oſcillationis retinebimus, ut ſatis comprobatam, demonſtratamque utriuſque Bernoullii methodo, ſed potiſſimum poſteriore illa Joannis Bernoullii, qua determinatione recepta, illud conſequitur, verum eſſe & Hugenianum principium, e quo eadem determinatio prodit, nimirum aſcenſus centri gravitatis poſt ſolutionem vinculi ad eandem altitudinem, ex qua deſcenderat, pro caſu, quo ſuperiora omnia corpora in ſuis altitudinibus expectent ibi adventum infimi ad ſuam ac binos Hugenii errores ſe corrigere, quorum alter omittit conſiderationem actionis externæ, quæ eſt inter corpora, & punctum ſuſpenſionis, ac Tellurem, alter negligit differentiam temporum, quibus corpora ad maximam, quodque ſuam altitudinem aſcenderent.

627 Porro ex hac generali determinatione centri oſcillationis haud difficulter deinde pro figuris ſingulis centra oſcillationum inveniuntur, & quædam etiam generalia elegantiſſima, & utiliſſima theoremata deducuntur, quorum præcipua quæque ipſe Hugenius feliciſſime deduxit. Sed ea res operoſior eſt, quam ut hic inſeri poſſit. Enunciabo tantum præcipua, quæ ad uſus phyſicos maximè neceſſaria ſunt; ſed prius notandum illud, ſi quod grave ſupra punctum ſuſpenſionis ſit, ſatis eſſe ejus diſtantiam ab axe oſcillationis aſſumere pro negativa, & ſuperior Hugeniana regula valebit eadem. Eo autem pacto in ſolo denominatore fractionis, in quo uno ſunt ſimplices diſtantiæ, mutabitur ſignum, non vero in numeratore, in quo adſunt earundem quadrata.

628 Deinde theoremata præcipua generalia ſunt hæc. *Centrum gravitatis jacet in recta, quæ tranſit per punctum ſuſpenſionis, & centrum oſcillationis inter ipſa ita, ut factum ſub diſtantia centri oſcillationis, & puncti ſuſpenſionis a centro gravitatis, ſit ſemper idem, collocata maſſa illa utcumque, & poſitionibus ipſius utcumque mutatis.* Unde fit, ut, *ſi ſuſpenſio removeatur a centro gravitatis, centrum oſcillationis accedat ad ipſum in eadem ratione reciproca diſtantia illius aucta, ac viceverſa, & centrum oſcillationis ac punctum ſuſpenſionis alternentur, illo nimirum adhibito pro hoc, hoc illi ſuccedat.*

629 Rurſus in recta linea cujus longitudo a, & quæ ſuſpenſa ſit in vertice ſumma quadratorum diſtantiarum omnium particularum a ſuſpenſione ductarum in ipſas particulas eſt $\frac{1}{3}aa$, ſumma autem diſtantiarum ſimplicium in ipſas particulas ductarum eſt $\frac{1}{2}a$; unde illâ per hanc diviſâ, *habetur diſtantia centri oſcillationis in recta linea, & per eam in filo vel virga* $\frac{2}{3}a$, *æqualis binis trientibus ejus longitudinis.*

630 In ſphæra, in cujus centro figuræ eſt centrum gravitatis ipſius, ſi diſtantia puncti ſuſpenſionis a centro ſphæræ ſit a, radius ſphæræ ſit r, ratio diametri ad circumferentiam ſit 1 ad p; erit prior illa ſumma $\frac{10a^2pr^3 + 4pr^5}{15}$,

poſte-

poſterior $\frac{2}{3}\,apr^3$; unde, illâ per hanc diviſâ, habetur $\frac{5aa + 2rr}{5a} = 15$ $a + \frac{2rr}{5a}$; unde infertur, *eſſe centrum oſcillationis inferius centro gravitatis per* $\frac{2}{5}$ *tertia continuè proportionalis poſt diſtantiam ſuſpenſionis a centro ſphæra, & ejus radium.* Inde patet, ſi globus ipſe non ſit perquam exiguus, non poſſe contemni diſtantiam centri oſcillationis a centro gravitatis, ſive a centro ipſius globi, cujus ſuperiores partes ita requirunt oſcillationes celeriores, partes autem inferiores requirunt lentiores ita, ut medium non ſit in medio figuræ ipſius, ſed aliquanto inferius.

631 Quod ſi jam e filo, vel virga gravi pendeat globus, facile invenietur centrum oſcillationis commune. Invenienda eſt utraque ſumma pro utroque per eas regulas, ſed pro virga, vel filo ducenda utraque in planum æquale baſi ipſius conſideratæ, ut in cylindro quodam, quæ poteſt ad arbitrium aſſumi, dummodo fili, vel virgæ moles æſtimetur ab ea baſi ducta in longitudinem, & ejus gravitas ſpecifica; ad gravitatem ſpecificam globi aſſumatur directe, ut ejus pondus ad pondus globi, & reciproce, ut moles ad molem, tum omnia quatuor producta præterea ducantur in numeros, qui eorum ſpecificas gravitates exprimunt, a quibus nimirum pendet numerus particularum eodem ſpatiolo contentarum, ac priores binæ ſummæ ad globum, & filum pertinentes dividendæ per binas poſteriores. Et ſi plures globi ex eadem virga pendeant, patet, quid facto opus ſit, ut habeatur centrum oſcillationis commune omnium, & virgæ.

632 Porro his uſus eſt ſummus; ubi accuratiſſima quæritur menſura longitudinis penduli ad ſingula ſecunda oſcillantis, quæ adhibetur in determinanda inæqualitate gravitatis in diverſis Terræ locis, ut etiam in determinanda illa altitudine, ex qua corpus libere caderet vi gravitatis noſtræ unico ſecundo horario, quam num. 422. poſuimus $= m$, & diximus eſſe proxime æqualem pedibus 15 cum uno digito. Quoniam experimenta inſtitui ſolent per globos filis pendentes, videndum, ubi ſit centrum oſcillationis commune & filo, & globo. Quin imo ſi in horologio pendeat pondus majus e virga rigida, & ponduſculum minus aptetur virgæ ita, ut per ipſam poſſit excurrere, quod Hugenius horologio temperando ipſi impoſuit; hac methodo invenietur centrum oſcillationis commune virgæ, & binis ponderibus, ut innoteſcat, quantum illo excurſu contrahatur, vel producatur cujuſvis oſcillationis tempus, & augeatur, vel minuatur numerus oſcillationum intra datum tempus, ut intra diem.

633 Porro, quoniam Bouguerius habita horum omnium, quin etiam & reſiſtentiæ aeris ratione, invenit, ſub Æquatore longitudinem penduli ſimplicis ad ſingula ſecunda horaria oſcillantis pedum Pariſienſium 3 l.7 $\frac{21}{100}$, & Pariſiis 8 $\frac{67}{100}$, ut diximus in nota ad 1962, hinc, & ex formula num. 575 facile deducitur ea altitudo pro utroque loco. Eſt formula $qq = \frac{lpp}{2mu}$, in qua m illa altitudo, l longitudo penduli ſimplicis, 1 ad p ratio diametri ad peripheriam, ſive 113

ad 355, 1 ad u, ut gravitas noſtra ad illam vim, adeoque $u = 1$, q tempus unius oſcillationis in minutis ſecundis, adeoque $= 1$. Quare cum inde, omiſſo $u = 1$, & $q = 1$, ſit $2m = lpp$, habebitur hoc theorema. *Eſt ut quadratum diametri ad quadratum peripheriæ, ita longitudo penduli ad duplam altitudinem quæſitam*, nimirum $1 . pp :: l . 2m$, adeoque calculo inito invenitur ea altitudo pro gravitate ſub Æquatore pedum 15 lin. 7 $\frac{42}{100}$, & pro Pariſienſi pedum 15 lin. 14 $\frac{62}{100}$, ſive pedum 15, & digiti 1 quamproxime, ut affirmavimus in nota ad verſum 578, a quo ad 618 hoc argumentum pertractat Noſter.

634 Idem ibidem a verſu 619 ad 625 agit de menſura communi, quam ope pedis horarii pro omnibus & gentibus, & ætatibus proponunt, appellato pede horario triente penduli ſimplicis ad ſingula ſecunda horaria oſcillantis. De ea in notis in hunc locum affirmavi multa eſſe, quæ hanc menſurarum rationem corrumpunt, ac incommodam reddunt, quorum præcipua capita hic innuam.

635 Primo quidem cum in aliis ab æquatore diſtantiis alia ſit gravitatis vis, & alia proinde penduli longitudo, non poteſt haberi menſura gentibus omnibus communis, niſi reducatur ad pedem horarium debitum certis Terræ locis, a quibus ad alia transferri non poteſt, niſi conſtet de lege, qua ab æquatore ad polum mutetur gravitatis vis, & per eam penduli longitudo, qua de re, quæ utique a phyſicis, nec omnino certis rationibus pendet, agemus ſequenti tomo, ubi videbimus, fieri poſſe, ut in eadem ab æquatore diſtantia diverſa ſit gravitas. Deinde, quid ſi Telluris maſſa mutetur, vel mutato internarum ejus partium ſitu, vel aliquid ex Cometicis atmoſphæris in eam cadente, vel ab ea relicto intra atmoſphæram Solarem, ut ſuſpicantur ſane multi? An non poſt longum tempus vis gravitatis immutaretur? Quid verò, ſi in motu diurno inæqualitas haberetur aliqua? Poſſet enim diurnus motus ex inæquali internarum Terræ partium textu longo tempore mutati, non ita parum ab actionibus Cometarum, & Planetarum in ipſam; poſſet idem turbari, mutatione interni textus partium ipſius Terræ, vel externæ etiam partium diſpoſitionis. Tranſlata enim materia e partibus polo propioribus, ubi minor eſt diurni motus velocitas, ad partes remotiores, retardari neceſſe eſt motum maſſæ totius, vel contra e remotioribus ad propiores, accelerari; quo quidem pacto, ſi conveniret humanum genus, poſſet ipſum per ſeſe diurnum motum vel accelerare, vel retardare. Quid autem ſi reſiſtentia materiæ atmoſphæram Solarem conſtituentis exiguam aliquam reſiſtentiam motui ipſi diurno exhiberet? Quid ſi Cometa quiſpiam oblique in Tellurem incurreret? Quid ſi aliud quidpiam, de quo ne cogitamus quidem, utrumvis, nimirum vel gravitatis vim, vel durationem ſecundi horarii immutaret. An non eâ mutatâ, menſura itidem illa pedis horarii immutaretur? Nihil ſane in creatis habemus firmum, ac ſtabile, nihil in eo rerum genere omnino certum.

§. V. Ad

§. V. Ad notam in verſ. 741
DE DIERUM INÆQUALITATE, ET ÆQUATIONE TEMPORIS.

636 In hac nota mentionem fecimus de inæqualitate dierum, & temporis æquatione, quam hic exponendam promiſimus. In primis diurnum communem motum æquabilem cenſent Aſtronomi, qui ex diurna Terræ converſione oritur circa proprium axem; quanquam an id ipſum revera ita ſe habeat, ut ne aliquot quidem ſecundotum diſcrimen intra eundem etiam annum habeatur, cenſeo, nec a priori, nec per obſervationes accuratè demonſtrari poſſe; nam quod ad longum pertinet annorum curſum, ut in ſuperiore §. innui, mutatio aliquanto major etiam haberi omnino poteſt. Sed intra brevem annorum curſum æquabilem ad ſenſum eſſe, illa indicant, quæ ex ejuſmodi ſuppoſitione in Aſtronomia deducuntur, & cum phænomenis congruunt, ut & horologia, in quibus methodo, de qua agemus in ſequenti §, a caloris, & frigoris actione libetata.

637 Annuus autem Solis motus in orientem & inæqualis eſt, & inæqualiter diurno motui opponitur. Sol nimirum per eccliptieam apparet nobis in orientem delatus ita, ut in apogeo ejus curſus ſit lentior, in perigeo celerior, quod provenit & ab inæquali Telluris celeritate in motu annuo (eſt enim (num.249) in ratione reciproca perpendiculi in tangentem demiſſi), & ex eo, quod idem etiam motus e majore diſtantia ſpectatus minor appareat. Porro hic ipſe motus, dum per ecclipticam fit, non dirigitur accuratè contra diurnum motum, qui fit circa polos æquatoris, niſi in ſolſtitiis, in quibus ecclipticа tropicos tangit; ſed ipſi maxime obliquus in æquatore, ibi minus opponitur, quam uſpiam alibi; ac præterea idem arcus eccliptieæ comparatus cum circuli æquatoris arcu ipſi æqualis eſt, cum reliquis parallelis ipſo major; unde fit, ut ex hoc etiam capite annuus Solis motus diurno magis opponatur in ſolſtitiis, quam in æquinoctiis.

638 Hiſce omnibus conſideratis, concipiantur bini appulſus Solis ad meridianum, qui aſtronomicæ diei durationem definiunt. Si ſequenti die Sol reſponderet eidem puncto ſphæræ cæleſtis; intervallum inter binos appulſus eſſet illud idem, quod habetur in diurno motu. Sed quoniam interea Sol proceſſit motu proprio; ad habendam durationem diei per id intervallum requiritur præterea illa diurnæ converſionis pars, quæ huic motui reſpondet. Si hic motus æqualis eſſet, & æquè ſemper opponeretur motui diurno; additamentum eſſet ſemper idem, & dierum durationes æquales. Diverſa ejus motus menſura, & diverſa oppoſitio ſunt bina capita, ex quibus inæqualitas quædam producitur, qua fit, ut intervalla inter illos binos appulſus aliis anni temporibus aliquanto longiora ſint, aliis breviora, & ex illarum binarum cauſarum combinatione res omnis omninó pendet.

639 Porro Aſtronomi concipiunt mediam quandam durationem æquabilem, quæ nimirum haberetur, ſi motus proprius Solis in orientem, & æquabilis eſſet, & æquè ſemper diurno motui opponeretur. Ea media duratio definitur adjecta tempori unius diurnæ converſionis particula, quæ reſpondet medio So-

 lis

lis motui, uni diei debito, ac eſt minutorum 3' ſecundorum 56. $\frac{1}{2}$, & tempus ex iis intervallis, ſive diebus, mente conceptis definitum appellant tempus medium. Aſſumunt ad libitum diem, quo die concipiunt in ipſo meridie bina tempora medium, & verum congruere. Tum inſequentibus temporibus diſcrimen inter hoc tempus medium æquabile mente conceptum, & verum tempus, quod verus Solis motus determinat, quod quidem nobis apparet, & idcirco dicitur *tempus apparens*, vocant Aſtronomi æquationem temporis, qua aliquando ablatâ, aliquando addita, tempus medium revocatur ad verum, vel viceverſa verum ad medium. Porro hæc æquatio excurrit per minuta 31 partim hinc, partim inde ita, ut inæqualitatum omnium ſumma quadrantem horæ ſuperet dimidio minuto temporis.

640 Ejuſdem generis inæqualitas habetur etiam in intervallis inter binos appulſus ad horizontem, qui appulſus italicorum dierum durationem determinant, ſed multo eſt major in ſphæra obliqua, ob multo majus diſcrimen inclinationis eclipticæ ad horizontem. Hic apud nos Romæ horum dierum inæqualitas ea eſt, ut totus ejus excurſus a medio tres ipſas horas ſuperet, diei duratione maxima computata ab occaſu ad occaſum durationem minimam excedente minutis primis tribus. Atque inde fit, ut horologium, quod æquabili motu feratur, accuratè referre per totum annum nequaquam poſſit nec Aſtronomicas, & communes Europæ horas, nec Italicas haſce, ſed accelerari debeat identidem, & retardari, vel index jam promoveri, jam retrahi; licet id ipſum incommodum in communi Europæ horologio ſit multo minus, quàm in hoc noſtro Italico.

641 Porro qui hanc dierum inæqualitatem non perpendunt, & ab infantia ipſa horas conſiderarunt tanquam certam quandam, & conſtantem menſuram, quæ 24 vicibus aſſumpta diem compleat, mirum quam turpiter errant, implicanturque, ubi de horologio italico cum aſtronomico, & communi Europæ univerſæ ſermo occurrit, ac de ſtabili hora meridiei in hoc, variabili in illo; ſed hæc innuiſſe ſit ſatis.

642 Illud adjiciam, Fixarum ſtellarum regreſſum ad meridianum, & ad quemvis cæleſtis ſpæræ circulum eodem ad ſenſum fieri tempore, quo diurna converſio peragitur, cum ipſæ proprios motus perquam exiguos habeant. Habent autem tres, unum nimirum lentiſſimum, quem veteres appellarunt *præceſſionem æquinoctiorum*, qui motus lentiſſimus eſt, cum vix annorum 25 millium periodo unicam converſionem abſolvat, ac binos alios a Bradleyo detectos, quorum alter, quem *axis nutationem* dicunt, qui periodo annorum 18 vix ad pauca minuta ſecunda pertinet, vix unius ſecundi diſcrimen in tempus inducit, alter ab aberratione luminis proveniens, quæ annua periodo abſolvitur in Fixis æquatori proximis, vix itidem toto anno unius ſecundi inæqualitatem ex omnibus inæqualitatibus collectam inducit, quæ in Fixis polo propioribus aliquanto eſt major, ſed, ſi non ita exigua ſit diſtantia Fixæ a polo, ad pauca minuta ſecunda ſemper extenditur, adeoque in ſingulis converſionibus diſcrimen ab æquabili diurni motus intervallo ſenſum omnem penitus effugit.

643 Hinc jure Noſter affirmavit verſu 862, hanc eſſe omnium, quas novimus, menſuram temporis maximè accuratam. Hæc autem menſura, ſive Fixarum dies, a Solari die medio deficit per illa minuta prima 3, ſecunda 36, $\frac{1}{2}$, quæ num. 638 nominavimus.

§. VI.

§. VI. Ad notam in verſ. 809
DE POLARIS STELLÆ ALTITUDINE PRO QUAVIS HORA.

644 In hac nota illud propoſui, ad inveniendam quavis hora poli altitudinem ope polaris ſtellæ, licet ea ad meridianum non devenerit, facile eſſe pro hora quavis definire, quanto magis vel minus debeat ipſa diſtare a Zenith, quam polus, ſive minus, vel magis ſupra horizontem elevari, quam ipſe polus, quod hic demonſtraturum promiſi.

645 Porro commodam id ipſum præſtandi occaſionem ſuppeditat exigua diameter circuli, quem circa polum ipſa ſtella Polaris deſcribit. Diſtat ea nunc a polo ipſo gradibus 2 quamproxime, quam menſuram fere accuratè habebit, in fine hujus anni 1755; tum reliquis inſequentibus decenniis ſingulis accedet ad ipſum polum per 3′. 24″. Eſt autem ejus aſcenſio recta ſub finem hujus anni graduum 9 quamproximè, quæ denis quibuſq; annis per minuta 19 promovetur.

646 Hinc autem eruitur, in fine Martii menſis Polarem ſtellam ſimul cum Sole ad Meridianum pervenire, cujus appulſum deinde ſingulis menſibus prævertet una hora quamproximè. Inde vero admodum facile, ſine ullis aſtronomicis tabulis, inveniri poteſt pro quavis propoſita die hora, qua ipſa ſtella ad Meridiani ſuperiorem partem deveniet, cui tempori ſi addantur, vel adimantur 6 horæ, habebuntur bina tempora, quibus ipſa polaris ſtella erit æquè elevata ſupra horizontem, ac polus: pro horis reliquis differentia ſic invenietur.

647 Fiat in fig. 76 centro *C*, intervallo *CA* circulus, cujus bini radii *CA*, F. 76 *CB* dividantur in tot minuta, quot minutis ſtella ipſa diſtat a polo, nimirum nunc in 120; peripheria autem incipiendo ab *A* verſus utramvis plagam, ut *E*, in partes æquales 24, quibus horarum numeri adſeribantur. Tum aſſumatur arcus *AF*, vel *Af*, qui exprimat horas, & minuta, quibus hora propoſita diſtat ab hora illa, qua fixa ipſa appellit ad ſuperiorem Meridiani partem, ducaturque *FG*, vel *fg* perpendicularis ad *AB*, & numerus minutorum *CG*, vel *Cg*, exhibebit, quanto ipſa ſtella ſit altior polo, ubi perpendiculum, ut *FG*, cadit inter *C*, & *A*, depreſſior vero, ubi, ut *fg* cadit inter *C*, & *B*.

648 Patet conſtructio ex eo, quod exiguus ille circulus haberi poteſt pro plano circulo, & patet errorem exiguum in hora appulſus ad *A*, quod habetur pro puncto ejus circuli altiſſimo, vix ullum ſenſibilem errorem parere in altitudine illa. Nam facile demonſtratur circa *D*, & *F* binis quibuſque minutis in hora committi errorem unius minuti in altitudine, ſed prope *A*, & *B* errorem ipſum minui quam plurimum; quem quidem errorem, qui penitus evitare velit, is calculo aſtronomico inveniat accuratè horam appulſus ad Meridianum in *A*, aſſumat accuratam differentiam horæ propoſitæ ab ea hora, qua inventa, innoteſcet diſtantia puncti *F* vel *f* a *D*, vel *E*, & erit, ut radius ad ſinum ejus diſtantiæ, ita diſtantia ipſius Fixæ a polo accuratè itidem definita per aſtronomicas tabulas, ad *CG*, vel *Cg* quæſitam altitudinum differentiam, qua inventâ, & inventâ ope quadrantis altitudine ipſius Fixæ ſupra horizontem, ac correcto refractionis errore habebitur quæſita poli altitudo, ſive loci latitudo accurata.

§. VII.

§. VII. Ad not. in verſ. 925

DE REMEDIO DILATATIONIS VIRGÆ IN PENDULIS HOROLOGIORUM.

649 In hac nota indicavi binas methodos corrigendi effectum caloris in virga penduli horologio applicati, alteram ope mercurii incluſi tubo adjecto virgæ, alteram ope virgarum diverſorum generum, quarum methodorum illuſtrationem promiſi. Sit in fig. 77 *AB* virga penduli, *C* pondus, *DE* tubus,
F.77 in quo Mercurius ab altitudine *DF* abeat ad altitudinem *DG*, dum virga calore producitur, & totum pondus *C* deſcendit. In eo deſcenſu deprimitur centrum oſcillationis ponderis *C*, virgæ, & tubi. Sed ſi virga minus dilatatur, quam Mercurius, ſuperficies Mercurii *G*, altior erit, quam eſset prius *F*, & fieri poterit, ut depreſso quidem ejus fundo D, ſed elevatâ multo magis ſuperficie ſupremâ *G*, centrum oſcillationis Mercurii aſcendat, & ita aſcendat, ut aſcenſus ipſe deſcenſum reliquorum compenſet, ac totius machinæ oſcillationis centrum eodem loco remaneat, quo erat prius.

650 Ut calculo determinetur Mercurii quantitas neceſsaria ad præſtandum ejuſmodi effectum, hac methodo licebit progredi. Determinetur analyticè diſtantia centri oſcillationis communis virgæ *AB*, globi *C*, tubi *DE*, & Mercurii *DF*, ante dilatationem, poſitis reliquis valoribus conſtantibus, & altitudine *DF* aſsumpta pro variabili $= x$, quod haud difficulter præſtabitur methodo num. 631. Tum aſsumatur exigua quævis elevatio Mercurii *FG*, quæ ad Mercurium totum *DF* ſit in ratione aſsumpta ad libitum 1 ad *r*, ut ſit $FG = rx$. Virgæ *AB* oblongatio reſpondens ipſi *FG* habebitur, ſi experimentis inveniatur ratio dilatationis Mercurii ad dilatationem ejus metalli, quo virga conſtat, quæ ſit 1 ad *m*, poſita enim longitudine virgæ $AB = a$, erit, ut $1 \times x$ ad $m \times a$, ita $FG = rx$ ad oblongationem virgæ $= amr$, quæ dabitur. Quæratur jam expreſſio diſtantiæ ab *A* centri oſcillationis totius virgæ *AB*, longioris jam per *amr*, globi *C*, tubi *DE*, quorum dilatatio negligi poterit, ſed & ipſa facile definiretur, ac Mercurii *DG*, & poſito hoc valore æquali priori, obtinetur valor *x*, nimirum longitudo ipſius columnæ Mercurii in tubo neceſsaria ad præſtandum effectum.

651 Porro ſi valor *r* concipiatur admodum exiguus, ut revera eſse debet ob actionem caloris, admodum exiguam contemptis iis terminis, in quibus is invenietur, reſpectu reliquorum, qui eo carent, habebitur valor *x* determinatus per cæteros valores tantummodo. Quod ſi valor *r* eſset magnus; pro alia magnitudine ipſius, ſive pro alia dilatatione, alia longitudo *DF* requireretur in tubo æque craſso; & ad elevandum centrum oſcillationis æque, ac deprimitur, per datam Mercurii maſsam, oporteret Mercurii tubum non æque craſsum conſtituere, ſed craſſitudinem ipſam mutare lege quadam, quæ ab ipſa ejuſmodi conditione determinanda eſsent, & curvaturam definire lateris tubi ipſius; ſed ea ad geometricas contemplationes, non ad phyſicos uſus pertinent.

652 Reſtituendi loca centri oſcillationis alia ratio eſt per regulas diverſorum metallorum, cujuſmodi plures methodi occurrunt in commentariis Acad. Pariſienſis ad annum 1741. Exponam eam, cujus mentionem feci in hac nota, & addam,

addam, quid cavendum in ea ſit. Binæ regulæ *ABED*, *BCFE* in fig. 78 pau- F.78
lo breviores pedibus tribus prior e cupro, quod magis dilatatur, poſterior e ferro, quod dilatatur minus, ita connectantur, ut in capite *AC* non poſſit altera ultra alteram excurrere, nec in latere communi *BE* a ſe invicem divelli poſſint, ſed tantummodo alterius ſuperficies per alterius ſuperficiem, ubi altera virga magis, & altera minus ope caloris fuerit diſtenta, delabi, & ex parte inferiori *DE*, *EF* prior ultra poſteriorem procurrere, quod facile pluribus methodis præſtari poteſt, vel ope denticulorum alterius, qui in alterius crenas ſe inſinuent, vel ope faſciolarum, quæ utramque ſimul amplectantur, vel alia conſimili ratione aliqua: eodem autem pacto brevior tertia regula *RLMK*, ex altera parte regulæ ferreæ adjungatur e metallo quovis, quæ per illam liberè ſurſum, deorſumque poſſit excurrere, ac ex inferiore parte pondus horologii *N* ſuſtineat.

653 Prima regula in ipſo fine habeat denticulum *D* quadratum prominentem, poſitâ litteta *D* in ima parte lateris interioris, tertia ſimilem denticulum *O* ad latus exterius, poſito *O* in ima parte lateris exterioris ipſius denticuli. Secunda illa ferrea prope latus primæ virgæ adjacens adnexam habeat regulam *GRSH* affixam cylindro *I* immiſso intra ipſam regulam perforatam, circa cujus axem *I* moveri poſſit in gyrum, & ejus latus ſuperius *GH* tranſeat per ipſum punctum I, ac ex utraque parte procurrat, & hinc quidem ſuſtineatur a puncto D, inde vero ope puncti O ſuſtineat regulam *LM*, & pondus *N*.

654 Porro ita collocati debent cylindrus *I*, & denticuli *D*,*O*, ut ſi rectæ horizontali per *O* ductæ occurrant verticales per *I*, & *D*, ſit *PO* ad *QO*, ut eſt dilatatio cupri, ad dilatationem ferri; nimirum ut 17 ad 10. Si enim producatur recta *PD* utcumque in *d*, & ducatur *dO*, cui occurrat recta *QI* in *i*, erit *Dd*, ad *Ii*, ut *DO* ad *IO*, ut *PO* ad *QO*, ſive ut dilatatio cupri ad dilatationem ferri. Quare ſi vi caloris deſcendat denticulus *D* in *d*; deſcendet punctum *I* in *i*, & regulæ latus *GH* abibit in *gh* ita, ut punctum O maneat immotum, & pondus *N* in altitudine eadem, contempta nimirum exigua oblongatione regulæ brevis infra denticulum *O*.

655 Eo pacto centrum oſcillationis penduli manebit eodem loco, ſi nulla habeatur ratio exiguæ depreſſionis ipſius factæ ob regularum productionem, quæ inſenſibilis erit, ſi regularum ipſarum pondus fuerit exiguum reſpectu ponderis *N*. Cæterum ejus quoque ratio haberi facile poſſet, ut & productionis virgæ *OM* cum appenſo pondere *N*; & ſatis erit removere punctum *O* a verticali *IQ* quantitate illâ exiguâ, quæ faciat, ut punctum O aſſurgat nonnihil ſupra priorem locum, dum *D* & *I* deprimuntur, quæ quidem quantitas facile admodum determinari poteſt. Sed hæc innuiſſe ſit ſatis.

656 Illud unum cavendum, ut punctum *I* fiat initio aliquanto ſuperius puncto *D*, vel ut anguli denticulorum ad *D*, & *O* acuantur nonnihil, ne ſi vi frigoris aſcendat *D* ſupra *I*, & *O* infra, innitatur virga mobilis angulo exteriori denticuli *D*, & interiori *O*, quo pacto ratio diſtantiarum *PO*, *QO*, a qua pendet ratio deſcenſuum, turbaretur, aucta *PQ*, & imminutâ *QO* per latus horizontale denticuli, ut & perturbatio aliqua haberetur, quamvis minor, ſi denticulorum forma eſſet cylindrica, vel latus regulæ *GH* per axem *I* non tranſiret.

657 Notandum & illud, poſſe toti machinæ adnecti machinulam, quæ ther-

thermometri vice fungatur, & caloris magnitudinem indicet; Si nimirum rotulam habeat, cujus denticuli a denticulis in *H* adnexis moveantur, rotula ipſa converſione vectis *IO* in gyrum acta; quæ ſi aliam in gyrum ageret & ea aliam motu multiplicato, ut libet; poſſet admodum ingens indicis motus minimos quoſque, & inſenſibiles prorſus caloris effectus indicare. Sed hæc itidem innuiſſe ſit ſatis.

§. VIII.

DE RELIQUIS AD LIBRUM III. SPECTANTIBUS, QUÆ IN PLURIBUS NOTIS PROMISSA SUNT.

658 Conjungam hic demum argumenta plura breviora, quorum illuſtrationes quædam promittuntur in reliquis hujuſce libri notis, in quo occurrunt nonnulla alia, quæ ſequentibus tomis tractanda ſunt, ut quæ ad Telluris figuram pertinent: alia ſublimiorem, & multo operoſiorem tractationem requirerent, atque adhuc ab hypotheſibus incertis penderent ita, ut vix ad uſus phyſicos traduci poſsent, cujuſmodi eſt geometrica determinatio eorum omnium, quæ pertinent ad reſiſtentiam fluidorum; quanquam multa, quæ ad ejus originem ſpectant, & cauſas, abunde in notis expoſita ſunt, & quæ pertinent ad computandum effectum reſiſtentiæ in Planetarum, & Cometarum motibus, dicentur fortaſse in ſequenti tomo, ut idem argumentum ex meæ theoriæ principiis pertractabitur iterum in tomo quarto. Quamobrem hic illa tantummodo, quæ promiſi, perſequar.

659 Occurrit primo loco in nota ad verſum 1336 determinatio relationis, quam habere debent ad ſe invicem diametri binorum globorum diverſæ denſitatis, ut illud, quod minus ponderat minorem habeat reſiſtentiam, pro quantitate ſuæ materiæ. Id autem ſic obtinebitur.

660 Sit denſioris diameter ad diametrum minus denſi, ut a ad b, denſitas ad denſitatem, ut m ad n. Erit moles illius ad molem hujus ut a^3 ad b^3, adeoque maſsa, ſive pondus, ut ma^3 ad nb^3. Quare ut hoc magis ponderet, debebit eſſe nb^3 majus, quam ma^3, & proinde ratio b^3 ad a^3 major, quam n ad m. Ex alia parte ſuperficies erit, ut a^2 ad b^2. Quare ut ſuperficies hujus, adeoque reſiſtentia ſit major pro quantitate materiæ ſuæ, debebit eſſe ratio b^2 ad a^2 major ratione nb^3 ad ma^3; ſive $ma^3 b^2$ major, quam $nb^3 a^2$; vel ma major, quam nb; nimirum nb minor, quam ma, & ratio b ad a minor, quam n ad m. Habetur igitur theorema ibi propoſitum, quod nimirum *id ſemper accidet, cum diameter minus denſi ad diametrum denſionis habuerit rationem minorem, quam hujus denſitas ad denſitatem illius; cubus autem diametri illius ad cubum diametri hujus majorem.*

661 In nota ad verſ. 1544 occurrit illud; cum frictio ſit pars tertia vis prementis alteram ſuperficiem contra alteram, gravitatem relativam, quæ in plano inclinato urget grave oblique ad deſcenſum, fore æqualem frictioni, ubi planum inclinatum continuerit cum horizonte angulum gr. 18. min. 26.

F. 54 662 Id patet in fig. 54 (num. 498). Eſt enim gravitas relativa ad vim, quæ premit oblique planum ut *AC* ad *CB*, ſive ut tangens anguli *CBA* ad radium. Cum igitur frictio æquetur tertiæ parti vis prementis planum, habebitur

debitur æqualitas gravitatis reſpectivæ cum hac vi, cum fuerit tangens inclinationis pars tertia radii, ſive poſito radio 100000, fuerit 33333. Id autem habetur in angulo graduum 18, min. 26 quamproximè, cum ejus tangens ſit 33330.

663 In nota ad verſum 1738 promiſi, dicturum aliquid in ſupplemento de Veterum argumentis pro Telluris ſphæricitate, verum non in hoc, ſed in ſequentium librorum ſupplemento id perſequar, in quo, ut innui in nota ad verſum 2007, omnia, quæ ad figuram Telluris pertinent, ſimul complectar. Ibidem autem & de inæqualitate gravitatis agam in diverſis Terræ locis, & de methodis inquirendi per obſervationes in gravitatis ipſius inæqualitatem pendulorum ope, ubi, quid potiſſimum cavendum ſit, me in ſupplemento dicturum promiſi in nota ad verſum 578. Dicam nimirum, ubi de ipſa inæqualitate gravitatis ex Newtoni principiis. Eo autem reducuntur omnia, ut rite cognoſcatur diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis, & computetur effectus gravitatis aeris, ac effectus reſiſtentiæ ipſius utcumque æſtimetur.

664 Demum in nota ad verſum 1980 promiſi determinationem relationis vis centrifugæ ſub æquatore ad vim gravitatis, ut & illud, quo pacto ex duplici capite magis ei opponatur ſub æquatore vis centrifuga, quam verſus polos.

665 Sit primo in fig. 29 arcus *Bb* is, qui uno ſecundo horario percurritur ſub æquatore, qui eſt ſecundorum 15, eritque *CB* ſemidiameter æquatoris, quæ ex Bouguerio eſt pedum Pariſienſium 19631723 ad *Db*, ut radius 10000000000000 ad ſinum verſum ſecundorum 15, quæ uno ſecundo temporis percurruntur, ſive ad 2644; unde proveniunt lineæ 7. $\frac{496}{1000}$. Eſt autem intervallum *be*, quod obſervatur in gravibus libere deſcendentibus vi gravitatis uno ſecundo (num. 633, pedum 15 lin. 7. $\frac{43}{100}$. Igitur erit vis centrifuga ad vim gravitatis, ut ille numerus ad hunc, nimirum ut 1 ad 289. F. 29

666 Et hoc quidem pertinet ad determinationem rationis, quam habet vis centrifuga ſub æquatore ad vim gravitatis ibidem, ubi tamen iterum notandum illud, vim centrifugam non eſſe activam vim, quæ opponatur vi gravitatis, & ipſi aliquid detrahat, ſed paſſivam tantummodo, ut oſtendimus num. 298, ubi expoſuimus, quo pacto integrum quidem effectum ſortiatur gravitatis vis, ſed nobis non appareat effectus integer, verum imminutus ea ſui parte, quæ menſuram habeat æqualem menſuræ vis centrifugæ; licet idcirco conſiderare poſſimus vim centrifugam, ut contrariam gravitati, & de ea aliquid detrahentem.

667 Quod autem attinet ad duplicem rationem, propter quam vis centrifuga magis opponitur gravitati ſub æquatore, quam verſus polos, conſideretur figura 79, in qua *P*, *p* ſint poli, *AB* diameter æquatoris habens pro centro centrum terræ *C*, ac *DE* ſemidiameter paralleli cujuſvis, cujus centrum erit in *E* in axe *Pp* eo remotius a centro Terræ *C*, quo locus *D* fuerit remotior ab æquatore *A*, & propior polo *P*. F. 79

668 In primis, quoniam in quovis circulari motu vis centrifuga dirigitur ad partes oppoſitas centro circuli deſcripti, in *A* dirigetur ad partes oppoſitas centro Terræ *CA* per *C*, in *D* ad partes oppoſitas centro circuli *E* per *ED*.

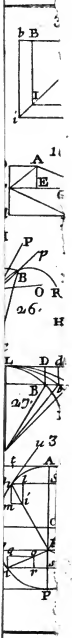
Gravitas autem ubique dirigitur ſaltem ad ſenſum ad centrum Terræ C, nimirum in A per AC, in D per DC. Cum igitur directio CA ſit penitus contraria directioni AC, & directio ED eo minus opponatur directioni DC, quo punctum D magis recedit ab æquatore A, & accedit ad polum P, patet, ſub æquatore vim centrifugam eſſe penitus contrariam vi gravitatis, in altis autem locis minus directè ipſi opponi, & eo minus, quo magis receditur ab æquatore; & acceditur ad polum.

669 Præterea ubi plures circuli eodem tempore deſcribuntur, vires centripetæ ſint (num. 264), ut circulorum radii, quibus viribus (num. 294) vires centrifugæ æquantur. Quare vis centrifuga in D ad vim centrifugam in A erit, ut DE ad AC, ſive proximè ad DC, nempe ut ſinus DP, nimirum ſinus diſtantiæ loci a polo ad radium. Ea autem ratio eo eſt minor, quo locus D magis recedit ab æquatore A, & magis accedit ad polum P, eo magis decreſcente DE. Igitur ipſa vis centrifuga ſub æquatore quidem eſt maxima, tum in acceſſu ad polum eo minor, quo magis ad ipſum polum acceditur.

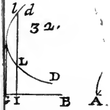
670 En igitur duo capita, ex quibus vis centrifuga eo minus detrahit de gravitate, quo magis ad polum acceditur. Quia nimirum quo magis acceditur ad polum, eo magis decreſcit ipſa vis centrifuga, quæ in ipſo polo evadit nulla, & quia eo minus directè opponitur gravitatis directioni ipſius directio. Patet igitur, quod ibidem fuerat propoſitum.

FINIS

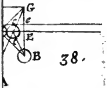
AOA 1G7G892



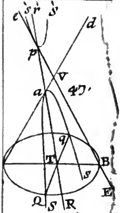
Digitized by Google



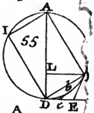
32.



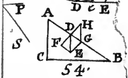
38.



47.



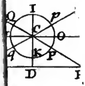
55.



54.

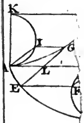
Digitized by Google

61.

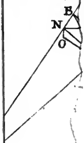








73



pag.	lin.	Errata	Corrige
24	18	munera ?	munera ,
70	14	ubi harum ,	ubi harum
71	13	Extat	Exeat
85	1	ſi	vl
98	30	uberi uſque	uberiuſque
110	22	contractum	contactum
119	11	pariter	pariter
147	12	qui	quæ
228	19	falſa	ſalſa
232	6	vapores .	vapores ,
237	23	reſpectant	reſpectent
238	6	corpore	corpora
243	36	8 , una	5 , una
244	14	corpus .	corpus ,
245	8	, non poſſe	non poſſe ,
262	18	ſicambri .	Sicambri ,
273	35	taptaretque	raptaretque
283	40	Tarræ	Terræ
290	44	poſſit	poſſint
293	43	alium	aliam
294	31	in marg. adde	F. 1
	26	abſolutum	relativum
295	12	qui	quæ
297	29	continuum	tempus continuum
298	20	nullo	ullo
299	22	has	hanc
301	13	nulli	nullo
316	24	vivium	virium
317	46	brevi teregi	breviter egi
318	38	145	147
320	34	vires , & velocitates	tempora , & velocitates
322	14	*HMB*	*AMB*
323	30	*CADE*	*CADQ*
325	28	*CE*	*CD*
329	23	*GM*	*GH*
	37	proligoni	poligoni
		proligonum	poligonum
330	16	*Et*	*EG*
	22	rectum .. acutum	acutum .. rectum
	26	ſoecundi	ſecundi
334	45	*CH*	*CE*
338	29	$2m \ldots 2m$	$m \ldots m$
338	32	$2P^3$	P^3
339	31	dele illud , *omiſſo termino conſtanti* 2	
342	35	25	2
343	11	*Am*	*AM*
		$\frac{Am^2 \times CH^2}{AM^2 \times CP^2}$	$\frac{AM^2 \times CH^2}{AM^2 \times CP^2}$
	19	$AM \times CCP^2$	$AM^2 \times CP^2$
345		totâ eâ paginâ pro *E* pone *L*	
346	36	tanrummodo	tantundem
	39	*DE*	*Db*
349	24	*hle*	*ebl*
350	13	aliquando	aliquanto
	29	*GN*	*GP*
	35	*HY*	*HV*
351	9	*BC*	*BG*
352	33	accedebant	accedebat
	45	futuræ	futuro
353	10	ſextum	ſeptimum
355	17	*Q* , & *q*	*q* , & *Q*
	18	*C* , & *c*	*c* , & *C*
		CQ , *cq*	*cq* , & *CQ*
357	32	$Q +$	$Q + q$
360	18	quum	quam
	22	$\frac{m - m - m}{m} = \frac{m}{m}$	$\frac{m - m - n}{m} = - \frac{n}{m}$
361	14	$n + cn$	$n + m$
	37	ad *D*, & *B*	quoque ad *D*
362	21	maximus	minimus
363	10	*AH* —	*AH* =
	14	*CD*	*EF*
	17	*AH*	*AB*
364	15	multiplicata	multiplicatâ
	41	334	356
	47	349	350
365	14	incurret cum	cum
	24	*AB*	*AC*
	33	367	366
	35	*KS*	*Kl*
366	18	*CCq*	*CCQ*
	19	$- Qq$	$- Cq$
	28	$+ c^2 q)^2$	$+ c^2 q)$
	29	$CQ - q$	$Q - q$

pag.	lin.	ERRATA	CORRIGE
367	5	& tempore	ac tempora
	27	ad *t*.	ad *t*, ſi in acre aſcendatur ad *s*
368	1	ſit *M*	Sit in
		FC	per FC
	32	ſi	ſi fuerit
369	19	ejus	ex ejus
371	10	fig. 40 .. F. 40	fig. 4 ... F. 4
		Totâ eâ paginâ pro N, & *D* pone *R*, & *T*	
376	43	998	994
377		in margine adde F. 40	
379	15	graviter	gravitate
	44	272	172
383	18	42	43
	25	1356	1341
	29	1388	1355
	31	*an*	*a*R
384	12	*Mm*	*mn*, & foci *F*, *f*
	33	*Gcg*, *Hch*	*GcH*, *gch*
385	17	ipſi	ipſis
387	2	*A*♌, *A*♌	*H*♌, *H*♌
388	2	verticuli	verticali
	12	F. 52 .. F. 52	F. 53 .. fig. 53
	29	ducatur	ducatur per *I*
	39	*PAV*	*PAN*
389	12	1778	1478
390	36	F. 53 .. fig. 53	F. 54 .. fig. 54
392	27	ad ipſam	ac ipſa
393	12	ipſius	ipſe
394	2	CE	*Ce*
395	8	*AF*	*AE*
400	28	indebant	includebant
408	30	centrum	centrum *M*
409	6	arcui *FI*	arcui
411	25	562	582
	28	*AI*	*AI*, ſive *LB*
	30	574	572
	46	*ii* ... *ii*	ii ... ii
413	27	ope	agit ope
	32	562	582
	42	fig. 71 .. F. 71	fig. 70 .. F. 70
414	15	*mutt mn*	*mutt*,
	24	*qq*	*qq*
415	39	notis ſunt	notis
416	20	F. 70 .. fig. 70	F. 71 .. fig. 71
	38	F. 71 .. fig. 71	F. 72 .. fig. 72
421	23	615	616
	37	*HO*	*hO*
	38	*SP*	*lP*
422	18	E ✕ G	E ✕ G:
	26	C	in C
423	27	*ff* ad *f*	*ff*^ ad *f*^
425	1	= 15	=
	38	575	595
427	13	in quibus methodo	methodo
428	45	1862	1863
	48	638	639
429	34	*D*, & *F*	18, & 6
	39	*D*, vel *E*	18, vel 6
431	18	*GRSH*	*GTSH*
	23	& *D*	& *D* in ♌, *R*
	37	facie	facile

18h
J
29

Digitized by Google